

VILNIAUS GEDIMINO TECHNIKOS UNIVERSITETAS

TEORINĖS MECHANIKOS KATEDRA

Leonidas Syrus, Petras Baradokas, Edvard Michnevič

TEORINĖ MECHANIKA

DINAMIKA

Mokomoji knyga

Vilnius „Technika“ 2008

UDK 531/534 (075,8)

Si-136

L. Syrus, P. Baradokas, E. Michnevič. Teorinė mechanika. Dinamika: mokomoji knyga.
Vilnius: Technika, 2008. 182 p. [23,0 sp. 1.]

Knygoje išdėstyta klasikinės mechanikos teorijos dalis – dinamika. Pateikta nagrinėjamų dinamių charakteristikų klasifikacija, išnagrinėti materialiojo taško, standžiojo kūno ir mechaninės sistemos dinamikos uždavinių apibrėžimai ir jų sprendimai. Aprašytos judančių materialųjų taškų ir mechaninės sistemos dinamikos bendrosios teoremos ir jų taikymo atvejai, pateikti standžiojo kūno dinamikos uždavinių sprendimo metodai.

Mokomoji knyga parašyta remiantis teorinės mechanikos kurso programa, patvirtinta Vilniaus Gedimino technikos universiteto mechanikos ir statybos specialybių pagrindinių studijų studentams ir rekomenduojama pagrindinių, vakarinių bei neakivaizdinių studijų studentams, siekiantiems savarankiškai susipažinti su dinamikos teorijos pagrindais.

Leidinių rekomendavo Vilniaus Gedimino technikos universiteto Fundamentinių mokslų fakulteto studijų komitetas

Recenzavo: prof. habil. dr. J. Atkočiūnas, VGTU Statybinės mechanikos katedra
prof. dr. V. Turla, VGTU Poligrafinių mašinų katedra

Redaktorė Viktorija Tamoševičienė

VGTU leidyklos „Technika“ 1016-S mokomosios metodinės literatūros knyga

<http://leidykla.vgtu.lt>

ISBN 978-9955-28-269-3

© L. Syrus, P. Baradokas, E. Michnevič, 2008

© VGTU leidykla „Technika“, 2008

PRATARMĖ

Svarbiausia ir sudėtingiausia teorinės mechanikos dalis dinamika nagrinėja paprasčiausių kūnų – materialiuju taškų, standžiųjų kūnų ir absoliučiai standžių kūnų mechaninių sistemų judėjimą.

Mokomoji knyga parašyta remiantis šiuolaikinėmis studijų programomis ir yra rekomenduojama mechanikos ir statybos specialybių pagrindinių studijų studentams, taip pat vakarinių bei neakivaizdinių studijų studentams, siekiantiems savarankiškai nagrinėti dinamikos pagrindus.

Autoriai dėkoja Vilniaus Gedimino technikos universiteto profesoriams J. Atkočiūnui ir V. Turlai už diskusijoms rengiant šią knygą skirtą laiką, už jų pastabas ir vertingas rekomendacijas, jie bus dėkingi ir skaitytojams už pastabas.

TURINYS

PRATARMĖ	3
ĮVADAS	6
1 PAGRINDINIAI APIBRĖŽIMAI IR JUDĖJIMO CHARAKTERISTIKOS	7
1.1. Dinamikos aksiomos	7
1.2. Materialiojo taško masė	10
1.3. Standžiojo kūno ir mechaninės sistemos masės centras	10
1.4. Inercijos momentai	11
1.4.1. Inercijos momentai lygiagrečiųjų ašių atžvilgiu	15
1.4.2. Inercijos momentai laisvai nukreiptos ašies atžvilgiu	16
1.4.3. Inercijos momentų skaičiavimo pavyzdžiai	18
1.5. Mechaninio judėjimo dinaminės charakteristikos	25
1.5.1. Materialiojo taško judesio kiekis	25
1.5.2. Materialiųjų taškų mechaninės sistemos judesio kiekis	26
1.5.3. Mechaninės sistemos judesio kiekio skaičiavimas	27
1.5.4. Materialiojo taško ir mechaninės sistemos kinetinis momentas	28
1.5.5. Standžiojo kūno kinetinio momento skaičiavimas	29
1.5.6. Materialiojo taško ir mechaninės sistemos kinetinė energija	31
1.5.7. Standžiojo kūno kinetinė energija	32
1.6. Veikiančiųjų jėgų poveikio matai ir jų charakteristikos	33
1.6.1. Materialiųjų taškų mechaninės sistemos vidinės jėgos	33
1.6.2. Jėgos impulsas	35
1.6.3. Jėgos darbas	36
1.6.4. Galingumas	46
1.6.5. Potencinės jėgos. Jėgų laukas. Potencinė energija	47
2. DINAMIKOS UŽDAVINIŲ APIBRĖŽIMAI IR SPRENDIMAI	51
2.1. Materialiojo taško diferencialinės judėjimo lygtys	51
2.1.1. Pagrindiniai materialiojo taško dinamikos uždaviniai	53
2.1.2. Reliatyvusis materialiojo taško judėjimas	67
2.2. Materialiųjų taškų sistemos diferencialinės judėjimo lygtys	72
2.3. Bendrosios dinamikos teoremos	72
2.3.1. Judesio kiekio teorema	73
2.3.2. Kinetinio momento teorema	76
2.3.3. Kinetinės energijos teorema	79
2.3.4. Mechaninės energijos tvermės dėsnis	81
2.4. Masės centro judėjimo teorema	82
2.5. Standžiojo kūno dinamika	84
2.5.1. Standžiojo kūno slenkamojo judėjimo dinamika	84
2.5.2. Standžiojo kūno sukamojo judėjimo apie nejudamąją ašį dinamika	85
2.5.3. Standžiojo kūno plokštuminio judėjimo dinamika	86

3. SUVARŽYTOS MECHANINĖS SISTEMOS DINAMIKA	88
3.1. Bendrosios sąvokos	88
3.1.1. Suvaržyta mechaninė sistema	88
3.1.2. Ryšiai	88
3.1.3. Apibendrintosios koordinatės	90
3.1.4. Virtualieji poslinkiai	91
3.1.5. Jėgos virtualusis darbas	92
3.1.6. Idealieji ryšiai	93
3.1.7. Apibendrintosios jėgos	93
3.2. Bendrieji mechanikos metodai	95
3.2.1. Virtualiųjų poslinkių principas	95
3.2.2. d'Alamberto principas	99
3.2.3. Besisukančio kūno dinaminės guolių reakcijos	106
3.2.4. Bendroji dinamikos lygtis	110
3.2.5. Bendroji dinamikos lygtis, išreikšta apibendrintomis jėgomis	113
3.2.6. Lagranžo antrojo tipo lygtys	114
4. SMŪGIS	120
4.1. Judesio kiekio teorema smūgiui	120
4.2. Kinetinio momento teorema smūgiui	123
4.3. Atsistatymo koeficientas	124
4.4. Ekscentrinis kūno smūgis į nejudantį glotnų paviršių	126
4.5. Tiesioginis centrinis dviejų kūnų smūgis	128
4.6. Karno teorema	132
4.7. Smūgio jėgos poveikis besisukančiam apie nejudamąją ašį kūnui	134
4.8. Smūgio centras	134
5. SVYRAVIMAI	138
5.1. Laisvieji svyravimai	139
5.2. Gęstantieji svyravimai	143
5.3. Priverstiniai svyravimai nesant slopinimui	146
5.3.1. Priverstinių svyravimų fazė	149
5.3.2. Priverstinių svyravimų amplitudė	150
5.3.3. Plakimas	153
5.3.4. Rezonansas	155
5.4. Priverstiniai svyravimai esant slopinimui	157
LITERATŪRA	161
PRIEDAI	162
1 priedas. Klausimai savarankiškam darbui	162
2 priedas. Pagrindinės dinamikos formulės	165

IVADAS

Dinamika yra teorinės mechanikos dalis, kuri nagrinėja materialiujų taškų, arba kūnų, judėjimą priklausomai nuo visų juos veikiančių jėgų ir šių kūnų inertiškumo.

Jėgos sąvoka, apibrėžta statikoje, laikoma veikianči pastoviu dydžiu [1–4]. Toks yra sunkis, automobilio traukos jėga, trinties jėga, vėjo arba vandens slėgis į paviršių ir kt. Statika nagrinėja tik statinį jėgų poveikį (jėgų veikiamas kūnas yra pusiausviras arba, kitaip tariant, nejuda) [3–7]. Kūno kinematinė būseną charakterizuojama jo greičiu. Šiuo atveju kūno greitis lygus nuliui, t. y. $\vec{v} = 0$.

Taikant ryšių atlaisvinimo principą [1], bet kuri nelaisvąjį kūną galima įsivaizduoti kaip laisvąjį, jeigu bus nutraukti kūno ryšiai ir pridėtos atitinkamos ryšių reakcijos. Šiuo atveju tariame, kad kūnas nekeičia savo kinematinės būsenos, t. y. nejuda. Veikianti jėgų sistema, tiek išorinių aktyviųjų, tiek pridėtų ryšių reakcijų, sudaro atsvarinių jėgų sistemą, kurios dedamosios jėgos gali būti pavadintos statinėmis, nes jų poveikis į laisvąjį kūną nekeičia kūno kinematinės būsenos ($\vec{v} = 0$).

Tačiau materialiuosius objektus veikiančios jėgos gali būti ir kintančios [7–11] pagal dydį ir pagal kryptį:

- a) jėgos gali priklausyti nuo laiko, t. y. $F = f(t)$. Pavyzdžiui, automobilio traukos jėga;
- b) jėgos gali priklausyti nuo padėties, t. y. $F = f(x)$. Pavyzdžiui, prie ištemptos arba suspaustos spyruoklės galo pritvirtintą kūną veikia atstatomoji spyruoklės jėga;
- c) jėgos gali priklausyti nuo greičio, t. y. $\vec{F} = f(\vec{v})$. Pavyzdžiui, kūną, judantį tam tikroje aplinkoje, veikia šios aplinkos pasipriešinimas.

Patyrimas rodo, kad, norint išjudinti arba sustabdyti judantį kūną, t. y. pakeisti jo greitį arba judėjimo kryptį, tenka pridėti tam tikrą jėgą, kuri pakeistų kūno judėjimo būseną [7–11]. Jėga, arba jėgų sistema, kuri yra pridėjama prie laisvojo kūno ir pakeičia jo kinematinę būseną, gali būti pavadinta dinamine. Dėl tokios jėgos poveikio laisvojo materialiojo taško judėjimas tampa netiesiaiegis ir netolydusis, pasikeičia taško judėjimo greičio kryptis arba greičio didumas. Greičio pakeitimo matas yra pagreitis. Tai reiškia, kad jėgos poveikis pasireiškia tuo, kad judančiam objektui yra suteikiamas pagreitis.

Greičio pokytis priklauso nuo veikiančių jėgų, taip pat nuo kūno medžiagos kiekio, kuris apibūdinamas kūno mase. Kūno judėjimas priklauso nuo jo geometrinių charakteristikų – dydžio ir formos, masės pasiskirstymo jame ir kt.

Materialiujų kūnų savybė pasipriešinti greičių pasikeitimui vadinama *inertiškumu*. Kūno inertiškumas priklauso nuo kūno masės ir jos išsidėstymo erdvėje.

Sisteminant nagrinėjamąją medžiagą dinamika skirstoma į dvi dalis: materialiojo taško dinamiką ir materialiujų taškų mechaninės sistemos dinamiką. Pirmojoje dalyje nagrinėjamas paprasčiausiojo kūno, arba materialiojo taško, judėjimas, t. y. tokio kūno, kurio matmenys yra be galo maži. Materialiujų taškų mechaninės sistemos dinamika nagrinėja judėjimą tokios materialiujų taškų visumos, kurioje taško judėjimas priklauso nuo kitų taškų judėjimo ir nuo ryšių tarp judančių taškų. Dinamika taip pat nagrinėja standžiojo kūno judėjimą, t. y. judėjimą tokios materialiujų taškų visumos, kurioje atstumai tarp bet kurių taškų judant kūnui nesikeičia.

Dinamikos uždavinių sprendimo pagrindus sudaro dinamikos aksiomos.

1 PAGRINDINIAI APIBRĖŽIMAI IR JUDĖJIMO CHARAKTERISTIKOS

Dinamika nagrinėja įvairius mechaninius reiškinius: kūnų judėjimą veikiant sunkio jėgoms, kūnų judėjimą paviršiais, veikiant tam tikroms jėgoms, mašinų ir mechanizmų judėjimą ir kt. Šiuos įvairius sudėtingus reiškinius galima nagrinėti ir uždavinius spręsti taikant kelis pagrindinius mechanikos dėsnius – dinamikos aksiomas, paremtas praktine patirtimi.

Mechanikos pagrindus suformulavo senovės graikijos filosofas ir mokslininkas Archimedas (287–212 m. pr. m. e.). Pagrindinius mechanikos dėsnius XVII a. apibendrino fizikas, mechanikas ir astronomas Galilėjus (Galileo Galilei, 1554–1642) savo knygoje *Pasikalbėjimai ir matematiniai įrodymai apie dvi naujas mokslo šakas...* (1638 m.). Klasikinės mechanikos principus suformulavo anglų fizikas, mechanikas, astronomas ir matematikas Niutonas (Isaac Newton, 1642–1727) savo svarbiausiame veikle *Matematiniai gamtos filosofijos pagrindai* (1687 m.).

1.1. Dinamikos aksiomos

Pirmoji aksioma – inercijos dėsnis (ši dėsnį 1638 m. suformulavo Galilėjus): *kiekvienas kūnas yra ramybės būsenos $\vec{v} = 0$ arba juda tiesiai ir tolygiai $\vec{v} = const$, kol atsiranda jėgos, kurios priverčia jį pakeisti šią būseną.*

Lotynų kalba dėsnis skamba taip: *corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statim suum mutare.*

Galilėjus iškėlė mintį, kad tikrai jėgos dinaminis poveikis turi įtakos laisvojo materialiojo kūno greičio kitimui.

Minėtoji kūno kinematinė būseną vadinama *inercine* ir šiuo atveju kūno pagreitis lygus nuliui, t. y. $\vec{a} = 0$. Atskaitos sistema, pagal kurią nagrinėjamas kūno judėjimas, vadinama *inercine* (nejudria) arba Galilėjaus atskaitos sistema. Spręsdami technikos uždavinius laikome, kad inercinė atskaitos sistema visada yra susijusi su Žeme.

Antroji dinamikos aksioma – pagrindinis dinamikos dėsnis. Pagrindinį dinamikos dėsni suformulavo Niutonas: *materialiojo taško pagreitis yra proporcingas tašką veikiančiai jėgai ir nukreiptas jėgos veikimo kryptimi.*

Lotynų kalba dėsnis skamba taip: *mutationem motus proportionalen esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.*

Aksioma nusako laisvai judančio materialiojo taško pagreičio atsiradimo priežastį – greičio pokytis yra pagreitis, o materialiojo taško judėjimo kiekis yra judančio taško dinaminė charakteristika, kuri lygi materialiojo taško masės ir greičio sandaugai, t. y. $m\vec{v}$ (žr. 1.5 sk.).

Tarkime, kad masės m tašką veikia pastoviojo dydžio ir krypties jėga \vec{F} . Kai pradiniu laiko momentu taško greitis yra \vec{v}_0 , o galutiniu laiko momentu yra \vec{v} , antrąjį Niutono (dinamikos) dėsni galima užrašyti taip:

$$\vec{F}(t - t_0) = m\vec{v} - m\vec{v}_0,$$

arba

$$\vec{F}\Delta t = m\vec{v} - m\vec{v}_0.$$

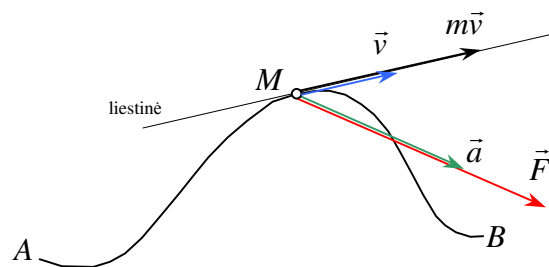
Jeigu jėgos veikimo laikas neapibrėžtai mažėja ir artėja prie nulio,

$$\vec{F} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m\vec{v} - m\vec{v}_0}{\Delta t} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt},$$

arba

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (1)$$

Gautoji lygtis yra antrojo Niutono (dinamikos) dėsnio matematinė išraiška, ji vadinama pagrindine dinamikos lygtimi. Iš šios lygties išplaukia pagrindinio dinamikos dėsnio apibrėžimas: *materialiojo taško masės ir pagreičio sandauga yra lygi jį veikiančiai jėgai, o pagreičio kryptis sutampa su jėgos veikimo kryptimi* (1 pav.).

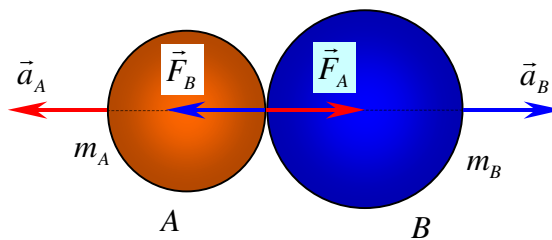


1 pav. Taško M judėjimas veikiant jėgai \vec{F}

Trečioji dinamikos aksioma – veiksmo ir atoveikio dėsnis. *Poveikis visada lygus atoveikiui (reakcijai), t. y. dviejų kūnų poveikiai vienas kitam yra vienodo dydžio ir nukreipti į priešingas puses.*

Lotynų kalba šis dėsnis skamba taip: *actioni centriam semper et aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper easse aequales et in paries contrarias dirigi.*

Tarkime, kad judantis materialusis m_A masės taškas A jėga \vec{F}_A veikia materialųjį m_B masės tašką B (2 pav.).



2 pav. Materialiųjų taškų sąveika

Užrašysime materialiajam taškui B pagrindinę dinamikos lygtį, įvertindami tai, kad taškas B juda pagreičiu \vec{a}_B :

$$\vec{F}_A = m_B \vec{a}_B.$$

Taško B atoveikis į taško A poveikį pasireiškia reakcija \vec{F}_B , kuri bus pridėta prie taško A ir kurios reikšmė remiantis pagrindine dinamikos lygtimi bus lygi taško A masės m_A ir taško pagreičio \vec{a}_A sandaugai, t. y.

$$\vec{F}_B = m_A \vec{a}_A.$$

Įvertinant tai, kad poveikis lygus atoveikiui, t. y. $F_A = F_B$, gaunama $m_A a_A = m_B a_B$, todėl

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{a_B}{a_A}. \quad (2)$$

Vadinasi, *materialiųjų taškų įgyjami pagreičiai yra atvirkščiai proporcingi jų masėms* – didesnės masės taškas įgyja mažesnį pagreitį, ir atvirkščiai. Be to, pagreičiai nukreipti į tą pačią tiesę, kaip ir veikiančios jėgos.

Ketvirtoji dinamikos aksioma – jėgų veikimo nepriklausomumo dėsnis. *Kai materialųjį tašką vienu metu veikia kelios jėgos, taško pagreitis lygus geometrinei sumai pagreičių, kuriuos taškas įgis nuo kiekvienos jėgos.*

Tarkime, materialųjį masės m tašką veikia jėgos $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$. Pasižymėsime taško pagreitį \vec{a} , o dydžiais $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ tuos pagreičius, kuriuos taškas įgytų, jeigu šios jėgos veiktų kiekviena atskirai. Remiantis jėgų veikimo nepriklausomumo dėsniu galima užrašyti:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n.$$

Dauginame abi šios lygties puses iš taško masės m :

$$m\vec{a} = m\vec{a}_1 + m\vec{a}_2 + \dots + m\vec{a}_n. \quad (3)$$

Remiantis pagrindiniu dinamikos dėsniu:

$$\vec{F}_1 = m_1 \vec{a}_1, \quad \vec{F}_2 = m_2 \vec{a}_2, \dots, \quad \vec{F}_n = m_n \vec{a}_n.$$

Įrašę jėgų reikšmes į (3) formulę, gauname:

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n,$$

arba

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (4)$$

Gautoji išraiška (4) yra *pagrindinis dinamikos dėsnis* tuo atveju, kai judantį materialųjį tašką veikia kelios jėgos.

1.2. Materialiojo taško masė

Nagrinėjant judančio materialiojo taško dinamikos klausimus susiduriame su šio taško medžiagos kiekiu, kuris vadinamas *masė*.

Klasikinėje mechanikoje laikoma, kad materialiojo taško masė yra pastovus dydis ir nepriklauso nuo judėjimo greičio. Todėl iš pagrindinės dinamikos lygties (1) išplaukia išvada, kad, norint suteikti materialiajam taškui tam tikrą pagreitį, reikia jį paveikti jėga, kuri priklausytų nuo taško masės. Kuo didesnė taško masė, tuo didesnė turėtų būti veikianti jėga, ir atvirkščiai. Kitaip sakant, išjudinti lengvesnį materialųjį tašką yra lengviau negu tašką, kurio masė didesnė, nes didesnės masės taško inertiškumas yra didesnis. Taigi materialiojo taško masė yra šio taško *inertiškumo matas*.

Iš pagrindinės dinamikos lygties (1) galima rasti masės bendrąją išraišką kilogramais:

$$m = \frac{F}{a} \text{ (kg)}, \quad (5)$$

o konkreti materialiojo taško masė gali būti rasta pagal žinomą veikiančiąją jėgą ir žinomą pagreitį:

$$m = \frac{G}{g}. \quad (6)$$

Pavyzdžiui, prie Žemės paviršiaus veikia sunkis G , o Žemės traukos pagreitis yra g (jis priklauso nuo geografinio pločio ir aukščio virš jūros lygio tos vietos, kurioje yra materialusis taškas). Žemės traukos pagreičio dydį galima apskaičiuoti pagal empirinę formulę:

$$g = 9,7805(1 + 0,00529 \sin^2 \varphi)(1 - 0,000000314h) \text{ [m/s}^2 \text{]}; \quad (7)$$

čia φ – materialiojo taško padėties geografinis plotis; h – materialiojo taško aukštis virš jūros lygio metrais.

1.3. Standžiojo kūno ir mechaninės sistemos masės centras

Statika [1] nagrinėja lygiagrečiųjų jėgų centro sąvoką, kuria remiantis buvo suformuluotas ir kitas apibrėžimas – standžiojo kūno *svorio centras*, arba toks standžiojo

kūno taškas C , kuriame pridėdamos kūno sunkis ir kurio koordinatės skaičiuojamos taikant formules:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n G_k x_k}{\sum_{k=1}^n G_k}, \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n G_k y_k}{\sum_{k=1}^n G_k}, \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^n G_k z_k}{\sum_{k=1}^n G_k}.$$

Įvertinę tai, kad tarp materialiojo taško sunkio ir masės yra priklausomybė (6), gauname elementaraus kūno arba jo dalies sunkio išraišką $G_k = m_k g$. Atlikę atitinkamus pakeitimus, gauname išraiškas taško C koordinatėms rasti:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{\sum_{k=1}^n m_k}, \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{\sum_{k=1}^n m_k}, \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k z_k}{\sum_{k=1}^n m_k}. \quad (8)$$

Mechaninės sistemos arba standžiojo kūno taškas C , kurio koordinatės randamos iš (8), vadinamas *masės centru*. Sprendžiant uždavinius daroma prielaida, kad jame sukongruota visa mechaninės sistemos arba standžiojo kūno masė. Šis taškas, analogiškai lygiagrečių jėgų centrui arba standžiojo kūno svorio centrui, nekeičia savo padėties, kai mechaninė sistema arba standusis kūnas yra pasukami bet koku kampu bet kuria kryptimi.

Matome, kad masės centro padėtis kiekvienu laiko momentu priklauso nuo taškų padėties ir taškų masių. Todėl galima padaryti išvadą, kad mechaninės sistemos, taip pat standžiojo kūno masės centras kiekvienu momentu sutampa su sunkio jėgos pridėties tašku. Sąvoka *masės centras* priimtina bet kokiai mechaninei sistemai nepriklausomai nuo to, ar šią sistemą kitos išorinės aktyvios jėgos veikia, ar ne. Masės centro sąvoka yra mechaninės sistemos masės pasiskirstymo charakteristika ir tinka bet kokiai atskaitos sistemai. Svorio centro sąvoka egzistuoja tik tuo atveju, kai mechaninė sistema arba standusis kūnas yra vienalyčiame sunkio jėgų lauke, pavyzdžiui, prie Žemės.

1.4. Inercijos momentai

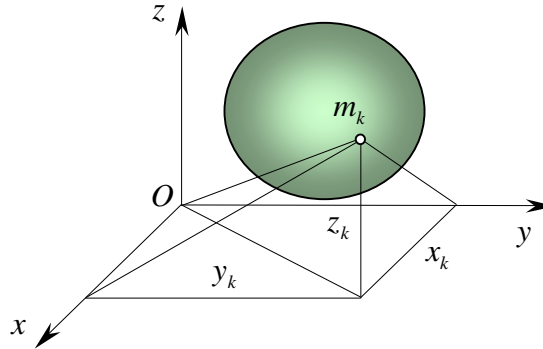
Kaip buvo minėta anksčiau, materialijų taškų arba kūnų savybė pasipriešinti greičių pasikeitimui vadinama jų inertiškumu. Taip pat buvo minėta, kad materialijų taškų mechaninės sistemos inertiškumas visų pirma priklauso nuo sistemos masės ir jos išsidėstymo erdvėje.

Materialijų taškų mechaninės sistemos inertiškumui įvertinti vartojama *inercijos momento* sąvoka. Inercijos momentas žymimas raide I ir bendruoju atveju išreiškiamas kaip mechaninę sistemą sudarančių elementariųjų dalelių masių ir jų atstumų iki nagrinėjamo taško arba koordinatinių ašies kvadrato sandaugų suma, t. y.:

$$I = \sum_{k=1}^n m_k \cdot h_k^2. \quad (9)$$

Nagrinėsime standžiojo kūno charakteristikas. Kiekvienas kūnas turi masę nepriklausomai nuo judėjimo pobūdžio. Tačiau masė yra kūno inertiškumo matas tik esant slenkamajam judėjimui. Esant kitiems kūno judėjimams inertiškumas charakterizuojamas inercijos momentu. Dažniausiai inercijos įtaka aktuali esant sukamajam judėjimui bet kurios ašies arba taško atžvilgiu.

Tarkime, kad erdvėje yra standusis kūnas, sudarytas iš n materialiujų taškų (3 pav.):



3 pav. Standžiojo kūno elementariosios dalelės koordinatės

Tardami, kad kūno bet kurios elementarios masės m_k atskaitos sistemoje $Oxyz$ koordinatės x_k, y_k, z_k turėsime tokius inercijos momentus koordinačių ašių atžvilgiu:

$$\begin{aligned} I_x &= \sum_{k=1}^n m_k (y_k^2 + z_k^2), \\ I_y &= \sum_{k=1}^n m_k (z_k^2 + x_k^2), \\ I_z &= \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2). \end{aligned} \quad (10)$$

Inercijos momentas koordinačių pradžios atžvilgiu vadinamas poliniu inercijos momentu, jo reikšmė bus tokia:

$$I_o = \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) \quad (11)$$

Kai inercijos momentai skaičiuojami koordinačių plokštumų atžvilgiu, galima taikyti tokias formulės:

$$\begin{aligned} I_{yOz} &= \sum_{k=1}^n m_k x_k^2, \\ I_{xOz} &= \sum_{k=1}^n m_k y_k^2, \\ I_{xOy} &= \sum_{k=1}^n m_k z_k^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Standžiojo kūno inercijos momentą bet kurios ašies, pavyzdžiui, Oz , atžvilgiu galima išreikšti kūno masės ir tiesinio dydžio i_z kvadrato sandauga:

$$I_z = M \cdot i_z^2; \quad (13)$$

čia M – kūno masė; i_z – kūno inercijos spindulys.

Iš (13) formulės išplaukia, kad *inercijos spindulys* i_z yra toks nuo Oz ašies taško nutolęs sąlyginis atstumas, kuriame reikia sukongcentruoti kūno masę tam, kad šio taško inercijos momentas būtų lygus kūno inercijos momentui.

Kūno inercijos momentai pasižymi tokiomis savybėmis:

- nepriklausomai nuo atskaitos sistemos pradžios pasirinkimo kūno inercijos momentai visada yra teigiami ir nusako masės išsidėstymą erdvėje;
- kūno inercijos momentų koordinačių ašių atžvilgiu suma lygi dvigubam poliniam inercijos momentui, t. y.

$$I_x + I_y + I_z = 2I_O; \quad (14)$$

- kūno inercijos momentų koordinačių plokštumų atžvilgiu suma lygi poliniam inercijos momentui, t. y.

$$I_{xOy} + I_{xOz} + I_{yOz} = I_O; \quad (15)$$

- kūno inercijos momentas bet kurios koordinačių ašies atžvilgiu lygus inercijos momentui koordinačių plokštumų, kurios eina per šią ašį, sumai, t. y.

$$\begin{aligned} I_x &= I_{xOy} + I_{xOz}, \\ I_y &= I_{xOy} + I_{yOz}, \\ I_z &= I_{xOz} + I_{yOz}. \end{aligned} \quad (16)$$

Be ašinių ir polinio inercijos momentų, dar yra *išcentriniai inercijos momentai*, kurie taip pat apibūdina kūno masės išsidėstymą erdvėje ir kurie skaičiuojami kaip taškų masių ir dviejų koordinačių sandaugų suma, t. y.

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \sum_{k=1}^n m_k \cdot x_k \cdot y_k, \\ I_{yz} &= \sum_{k=1}^n m_k \cdot y_k \cdot z_k, \\ I_{xz} &= \sum_{k=1}^n m_k \cdot x_k \cdot z_k. \end{aligned} \quad (17)$$

Iš formulių (17) išplaukia, kad išcentriniai inercijos momentai savo indeksų atžvilgiu yra simetriniai, t. y.

$$I_{xy} = I_{yx}, \quad I_{yz} = I_{zy}, \quad I_{xz} = I_{zx}.$$

Išcentriniai inercijos momentai priklauso ne tik nuo koordinatinių ašių krypties, bet ir nuo ašių pradžios pasirinkimo vietos. Kalbant apie išcentrinus inercijos momentus pasirinktame taške, laikoma, kad koordinatinių ašių pradžia sutampa su pasirinktuoju tašku.

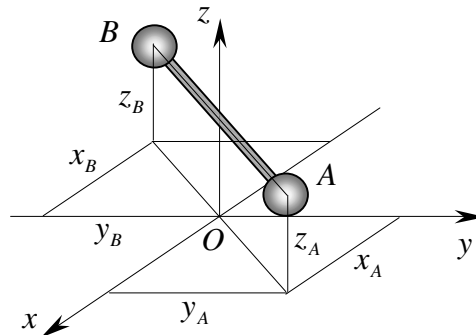
Prie išcentrinų inercijos momentų savybių galima priskirti tai, kad išcentriniai inercijos momentai gali turėti bet kokį ženklą ir gali būti lygūs nuliui.

Jeigu standžiojo kūno du išcentriniai inercijos momentai lygūs nuliui, tai indeksas išcentrinio inercijos momento pavadinime rodo koordinatinių ašių, kuri šiuo atveju vadinama *svarbiausiaja kūno inercijos ašimi* pasirinktame taške. Pavyzdžiui, jeigu $I_{xz} = I_{yz} = 0$, tai ašis Oz yra svarbiausioji inercijos ašis. Jeigu svarbiausioji ašis dar eina ir per kūno masės centrą, tai tokia ašis vadinama *svarbiausiaja centrine kūno inercijos ašimi*.

Nustatyta, kad:

- jeigu kūnas turi materialios simetrijos plokštumą, tai visiems kūno taškams ašis, kuri statmena simetrijos plokštumai, yra svarbiausioji inercijos ašis;
- jeigu kūnas turi materialios simetrijos ašį, tai ši ašis yra svarbiausioji centrinė kūno inercijos ašis, kuri vadinama dinaminės simetrijos ašimi.

Tarkime, materialiojo kūno simetrijos ašyje pasirenkame tašką O kaip atskaitos sistemos pradžią (4 pav.). Dekarto ašis išveskime taip, kad ašis Oz eitų per kūno simetrijos ašį.



4 pav. Standžiojo kūno išcentrinų inercijos momentų skaičiavimo schema

Kūno materialios simetrijos savybių ašies Oz atžvilgiu bet kokiam kūno taškui A , kurio elementari masė m_A ir koordinatės x_A, y_A, z_A , visada atsiras taškas B , kurio elementari masė m_B ir koordinatės x_B, y_B, z_B . Įvertinant tai, kad taškų A ir B elementarios masės yra lygios, t. y. $m_A = m_B = m$, ir koordinatės $x_B = -x_A, y_B = -y_A, z_B = z_A$, užrašysime išcentrinus inercijos momentus I_{xz} ir I_{yz} . Skaičiuodami išcentrinus inercijos momentus sudedame visų kūno elementarių masių ir atitinkamų koordinatinių sandaugas:

$$I_{xz} = \sum_{k=1}^n m_A \cdot x_A z_A + \sum_{k=1}^n m_B \cdot x_B z_B = \sum_{k=1}^n m \cdot x_A z_A + \sum_{k=1}^n m \cdot (-x_A) z_A = \sum_{k=1}^n m \cdot x_A z_A - \sum_{k=1}^n m \cdot x_A z_A = 0,$$

$$I_{z_C} = \sum_{k=1}^n m_k \cdot (x_k^2 + y_k^2).$$

Antrasis narys $\sum_{k=1}^n m_k \cdot (l_x^2 + l_y^2)$, kuriame kiekviena kūno elementari masė dauginama iš pastoviojo dydžio $(l_x^2 + l_y^2)$, pertvarkomas taip:

$$\sum_{k=1}^n m_k \cdot (l_x^2 + l_y^2) = (l_x^2 + l_y^2) \cdot \sum_{k=1}^n m_k = M \cdot d^2;$$

čia M – kūno masė, kuri yra lygi visų kūno materialijų taškų masių sumai; d – atstumas tarp ašių z ir z_1 ; $\sum_{k=1}^n m_k x_k$ ir $\sum_{k=1}^n m_k y_k$ – kūno materialijų taškų statinių momentų sumos.

Iš (8) formulės gausime:

$$\sum_{k=1}^n m_k x_k = M \cdot x_C \quad \text{ir} \quad \sum_{k=1}^n m_k y_k = M \cdot y_C;$$

čia x_C ir y_C – kūno masės centro koordinatės.

Koordinatinių ašis z išvesta per kūno masės centrą C , todėl $x_C = 0$ ir $y_C = 0$. Gauname, kad trečiasis ir ketvirtasis nariai lygūs nuliui, nes

$$\sum_{k=1}^n m_k x_k = 0 \quad \text{ir} \quad \sum_{k=1}^n m_k y_k = 0.$$

Galima padaryti išvadą, kad

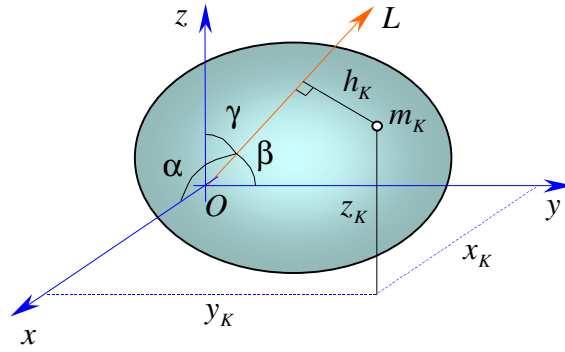
$$I_{z_1} = I_{z_C} + M \cdot d^2. \quad (18)$$

Gavome inercijos momento lygiagrečiųjų ašių atžvilgiu teoremą (*Heigenso ir Šteinerio teorema*): *standžiojo kūno inercijos momentas bet kurios ašies atžvilgiu lygus inercijos momento lygiagrečios ir išvestos per kūno masės centrą ašies atžvilgiu, ir kūno masės, padaugintos iš atstumo tarp ašių kvadrato, sumai.*

Iš (18) matome, kad standžiojo kūno, arba materialijų taškų sistemos, *mažiausias inercijos momentas yra per masės centrą išvestos ašies atžvilgiu.*

1.4.2. Inercijos momentai laisvai nukreiptos ašies atžvilgiu

Per laisvai pasirinktą kūno tašką O (6 pav.) išvedamos Dekarto koordinatinių sistemos ašys:



6 pav. Standžiojo kūno inercijos momento laisvai nukreiptos ašies atžvilgiu skaičiavimo schema

Iš taško O išvedame ašį OL , sudarančią su koordinatinių ašimis kampus α, β ir γ . Skaičiuosime kūno inercijos momentą šios ašies atžvilgiu.

Laisvai parenkamas kūno elementariosios masės m_k taškas, kurio koordinatės x_k, y_k, z_k , nutolęs nuo ašies OL atstumu h_k . Kūno inercijos momentas ašies OL atžvilgiu yra kiekvienos kūno elementariosios masės ir atstumo h_k iki ašies OL kvadratu sandaugų suma:

$$I_{OL} = \sum_{k=1}^n m_k h_k^2. \quad (19)$$

Naudodami analizinės geometrijos formulę, galime užrašyti išraišką atstumui h_k tarp taško ir ašies OL rasti:

$$h_k^2 = (y_k \cos \gamma - z_k \cos \beta)^2 + (z_k \cos \alpha - x_k \cos \gamma)^2 + (x_k \cos \beta - y_k \cos \alpha)^2.$$

Įtraukę gautąją h_k išraišką į (19) formulę ir atlikę matematinius pertvarkymus, gauname:

$$I_{OL} = \sum_{k=1}^n m_k h_k^2 = \cos^2 \alpha \sum_{k=1}^n (y_k^2 + z_k^2) + \cos^2 \beta \sum_{k=1}^n m_k (z_k^2 + x_k^2) + \cos^2 \gamma \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2) - 2 \cos \beta \cos \gamma \sum_{k=1}^n m_k y_k z_k - 2 \cos \gamma \cos \alpha \sum_{k=1}^n m_k z_k x_k - 2 \cos \alpha \cos \beta \sum_{k=1}^n m_k x_k y_k.$$

Toliau, įvertinę (10) ir (19) priklausomybes, galime užrašyti:

$$I_{OL} = \cos^2 \alpha \cdot I_x + \cos^2 \beta \cdot I_y + \cos^2 \gamma \cdot I_z - 2 \cos \beta \cos \gamma \cdot I_{yz} - 2 \cos \gamma \cos \alpha \cdot I_{xz} - 2 \cos \alpha \cos \beta \cdot I_{xy}. \quad (20)$$

Žinodami standžiojo kūno inercijos momentus Dekarto koordinatinių ašių atžvilgiu ir kūno išcentrinis inercijos momentus, pagal (20) formulę galime apskaičiuoti šio kūno inercijos momentą bet kaip nukreiptos ašies atžvilgiu.

1.4.3. Inercijos momentų skaičiavimo pavyzdžiai

Jeigu vienalyčio kūno geometrinė forma yra taisyklinga, tai jo inercijos momentus galima rasti integralinio skaičiavimo metodais.

Taikydami šį metodą tariame, kad vienalytis kūnas susideda iš be galo didelio skaičiaus elementariųjų masių m_i , kurių atstumai iki bet kuruos ašies, pavyzdžiui OK , yra h_i . Tuomet kūno inercijos momentas šios ašies atžvilgiu bus:

$$I_{OK} = \sum_{i=1}^n h_i^2 m_i.$$

Kuo daugiau turėsime elementariųjų kūno masių, tuo tikslesnė bus inercijos momento išraiška. Todėl paskutinę formulę galima perrašyti taip:

$$I_{OK} = \sum_{i=1}^n h_i^2 m_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n h_i^2 m_i.$$

Gauname:

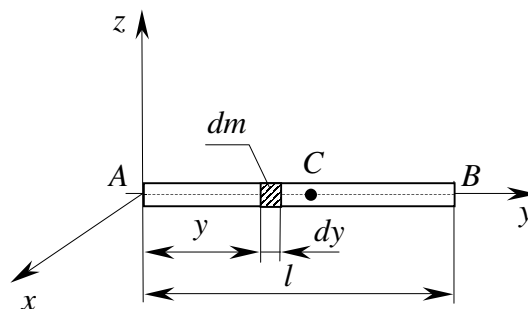
$$I_{OK} = \int_M h^2 dm; \quad (21)$$

čia dm – elementari vienalyčio kūno masė; h – šios masės atstumas iki ašies. Integravimas vyksta pagal visą kūno masę.

Taikysime šį inercijos momento skaičiavimo metodą kai kurių vienalyčių kūnų inercijos momentams skaičiuoti.

Plono strypo inercijos momentai

Vienalyčio pastovaus skerspjūvio masės M strypo ilgis l (7 pav.). Rasime jo inercijos momentus ašių Ax ir Az atžvilgiu.



7 pav. Plonas strypas

Pagal (21) galima užrašyti:

$$I_x = I_z = I_A = \int_M y^2 dm.$$

Įvertindami tai, kad elementari masė dm lygi strypo ilgio santykinio tankio $\gamma_l = \frac{M}{l}$ ir elementarios masės ilgio dy sandaugai, turėsime:

$$dm = \gamma_l \cdot dy = \frac{M}{l} \cdot dy.$$

Gauname:

$$I_A = \int_M y^2 dm = \int_{y_0=0}^y y^2 \cdot \frac{M}{l} \cdot dy = \frac{M}{l} \int_0^l y^2 dy = \frac{M}{l} \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_0^l = \frac{M}{l} \cdot \frac{l^3}{3} = \frac{1}{3} Ml^2.$$

Taigi vienalyčio plono pastovaus skerspjūvio strypo inercijos momentas jo galo atžvilgiu lygus:

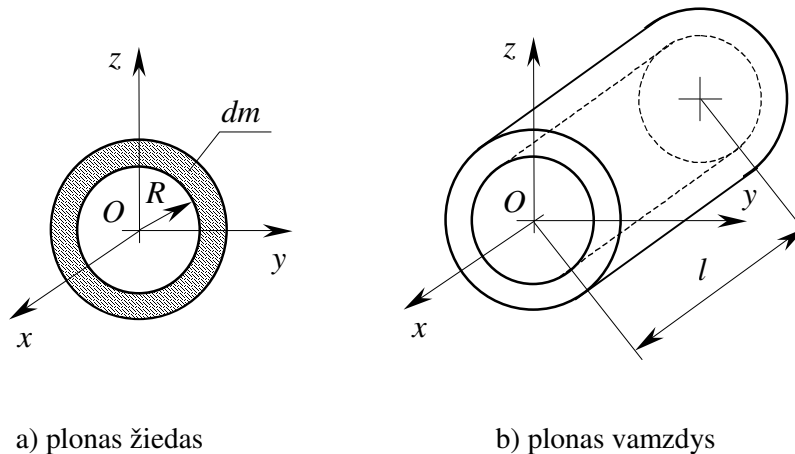
$$I_A = \frac{1}{3} Ml^2.$$

Taikant (18) formulę gaunama, kad šio strypo inercijos momentas masės centro atžvilgiu lygus:

$$I_C = \frac{1}{12} Ml^2.$$

Plono žiedo ir vamzdžio inercijos momentai

Tarkime, kad plono žiedo spindulys R ir masė M (8 pav., a).



8 pav. Simetriški tuščiaviduriai kūnai

Raskime žiedo inercijos momentą x ašies arba centro O atžvilgiu. Naudojant (21) formulę galima užrašyti:

$$I_x = I_O = \int_M R^2 dm.$$

Žiedo masė paskirstyta tolygiai vienodu atstumu nuo centro. Todėl

$$I_O = \int_M R^2 dm = R^2 \int_M dm = MR^2.$$

Taigi žiedo inercijos momentas jo centro atžvilgiu:

$$I_O = I_x = MR^2.$$

Įvertinant tai, kad inercijos momentai koordinačių ašių z ir y atžvilgiu yra lygūs, nes žiedas jų atžvilgiu išdėstytas simetriškai, ir tai, kad $I_x = I_O$, taikant (14) formulę, nesunkiai gaunami žiedo inercijos momentai koordinačių ašių z ir y atžvilgiu:

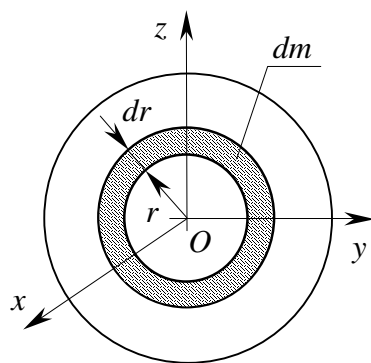
$$I_z = I_y = \frac{1}{2}MR^2.$$

Jeigu kūno masė išdėstyta plono vamzdžio pavidalu (8 pav., b), tai vamzdžio inercijos momento x ašies atžvilgiu skaičiavimas nepriklausys nuo vamzdžio ilgio, t. y.

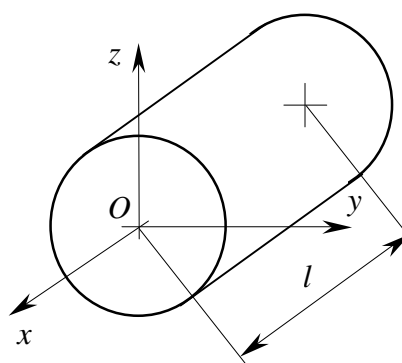
$$I_x = MR^2.$$

Plono skritulio inercijos momentai

Raskime plono skritulio, kurio spindulys R ir masė M , inercijos momentus (9 pav., a).



a) plonas skritulys



b) pilnutinis cilindras

9 pav. Simetriški vienalyčiai kūnai

Apskaičiuosime skritulio inercijos momentą centro O atžvilgiu. Taikydami skaičiavimams (21) formulę, gausime:

$$I_x = I_O = \int_M r^2 dm.$$

Įvertinę tai, kad elementari skritulio masė dm , kuri yra atstumu r nuo skritulio centro, lygi skritulio ploto tankio $\gamma_s = \frac{M}{\pi R^2}$ ir elementarios masės ploto $2\pi \cdot r \cdot dr$ sandaugai, t. y.

$$dm = \gamma_s \cdot ds = \frac{M}{\pi R^2} \cdot 2\pi \cdot r dr = \frac{2M}{R^2} r dr, \text{ gauname:}$$

$$I_x = I_O = \int_M r^2 dm = \int_0^R r^2 \frac{2M}{R^2} r dr = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} MR^2.$$

Taigi skritulio inercijos momentas jo centro ir ašies x atžvilgiu bus lygus:

$$I_x = I_O = \frac{1}{2} MR^2.$$

Taikydami (14) formulę, nesunkiai gauname:

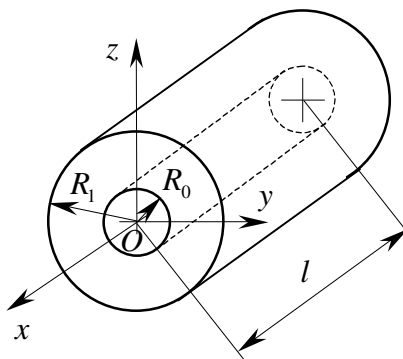
$$I_y = I_z = \frac{1}{4} MR^2.$$

Matome, kad skritulio inercijos momentas I_x nepriklauso nuo jo storio. Todėl pilnutinio cilindro (9 pav., b) masės inercijos momentas šios ašies atžvilgiu gali būti apskaičiuotas pagal skritulio inercijos momento ašies x skaičiavimo formulę, t. y.

$$I_x = \frac{1}{2} MR^2.$$

Storasienio vamzdžio inercijos momentas

Jeigu kūno masė išdėstyta kaip storasis vamzdis (10 pav.), kurio išorinis spindulys R , kiaurymės spindulys R_0 ir masė M , tai tokio vamzdžio inercijos momentas x ašies atžvilgiu lygus inercijos momento pilnutinio cilindro ir inercijos momento kiaurymės skirtumui, t. y. $I_x = I_1 - I_2$.



10 pav. Storasis vamzdis

Pilnutinio cilindro inercijos momentas x ašies atžvilgiu $I_1 = \frac{1}{2}M_1R^2$, o kiaurymės $I_2 = \frac{1}{2}M_2R_0^2$; čia M_1 – pilnutinio cilindro masė; M_2 – kiaurymės masė. Tuomet storasienio vamzdžio inercijos momentas bus lygus:

$$I_x = \frac{1}{2}(M_1R^2 - M_2R_0^2).$$

Tarę, kad storasienio vamzdžio tūrio sąlyginis tankis γ lygus kūno masei, padalytai iš kūno tūrio, gausime:

$$\gamma = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi(R^2 - R_0^2)b}$$

ir galėsime apskaičiuoti cilindrų mases M_1 ir M_2 , kurių tūriai V_1 ir V_2 .

Atlikę skaičiavimus, gausime:

$$M_1 = \gamma \cdot V_1 = \frac{M}{\pi b(R^2 - R_0^2)} \cdot \pi R^2 b = \frac{MR^2}{R^2 - R_0^2}$$

ir

$$M_2 = \gamma \cdot V_2 = \frac{M}{\pi b(R^2 - R_0^2)} \cdot \pi R_0^2 b = \frac{MR_0^2}{R^2 - R_0^2}.$$

Įvertinę masių reikšmes, gausime storasienio vamzdžio inercijos momentą centrinės ašies atžvilgiu:

$$I_x = \frac{1}{2}(M_1R^2 - M_2R_0^2) = \frac{1}{2} \left(\frac{MR^2}{R^2 - R_0^2} R^2 - \frac{MR_0^2}{R^2 - R_0^2} R_0^2 \right) =$$

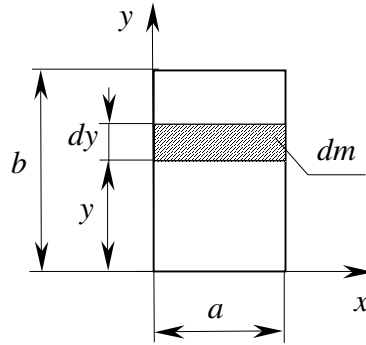
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{M}{R^2 - R_0^2} (R^4 - R_0^4) = \frac{1}{2} \cdot \frac{M}{R^2 - R_0^2} (R^2 - R_0^2) \cdot (R^2 + R_0^2).$$

Taigi gausime storasienio vamzdžio inercijos momentą x ašies atžvilgiu:

$$I_x = \frac{1}{2} \cdot M(R^2 + R_0^2).$$

Plono keturkampio inercijos momentas

Tarkime, kad kūno masė M tolygiai išdėstyta plonoje keturkampėje plokštelėje, kurios matmenys a ir b (11 pav.).



11 pav. Plona keturkampė plokštelė

Apskaičiuosime kūno inercijos momentą, pavyzdžiui, x ašies atžvilgiu. Taikant (21) formulę galima užrašyti:

$$I_x = \int_M y^2 dm.$$

Elementarios masės dm reikšmė lygi kūno ploto santykinio tankio $\gamma_s = \frac{M}{ab}$ ir elementarios masės ploto $ds = a \cdot dy$ sandaugai, t. y.

$$dm = \gamma_s \cdot ds = \frac{M}{ab} \cdot a \cdot dy = \frac{M}{b} \cdot dy.$$

Tuomet

$$I_x = \int_M y^2 dm = \int_0^b y^2 \cdot \frac{M}{b} \cdot dy = \frac{M}{b} \int_0^b y^2 dy = \frac{M}{b} \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_0^b = \frac{M}{b} \cdot \frac{b^3}{3}.$$

Taigi gavome plono keturkampio masės inercijos momentą x ašies atžvilgiu:

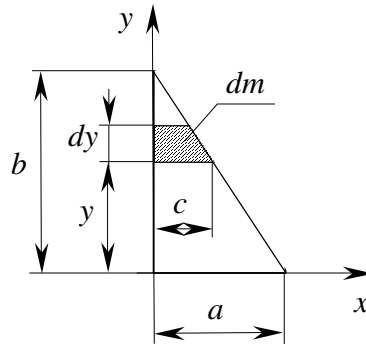
$$I_x = \frac{1}{3} Mb^2.$$

Nesunkiai gauname, kad

$$I_y = \frac{1}{3} Ma^2.$$

Plono trikampio inercijos momentas

Tarkime, kūno masė išdėstyta plono stačiakampio trikampyje (12 pav.).



12 pav. Plona trikampė plokštelė

Pritaikysime (21) formulę inercijos momentui x ašies atžvilgiu skaičiuoti. Galime užrašyti:

$$I_x = \int_M y^2 dm.$$

Iš (12 pav.) matome, kad elementari masė dm priklauso nuo pjūvio padėties, t. y. nuo y koordinatės, nes keičiasi elementarios masės dydis c . Nustatysime dydžio c pokytį priklausomai nuo y koordinatės.

Iš trikampių panašumo gauname:

$$\frac{b-y}{b} = \frac{c}{a},$$

todėl

$$c = \frac{a}{b}(b-y).$$

Elementari masė dm skaičiuojama kaip šios masės elementarusis plotas $ds = c \cdot dy$, padaugintas iš trikampio ploto sąlyginio tankio $\gamma_s = \frac{M}{S} = \frac{M}{1/2(ab)} = \frac{2M}{ab}$.

Įrašę visas reikšmes ir atlikę visus matematinius skaičiavimus, gauname trikampio inercijos momentą:

$$I_x = \int_M y^2 dm = \int_M y^2 ds \cdot \gamma_s = \frac{2M}{ab} \int_M y^2 c \cdot dy = \frac{2M}{ab} \cdot \int_0^b y^2 \cdot \frac{a}{b}(b-y) dy =$$

$$\frac{2aM}{abb} \int_0^b y^2 (b-y) dy = \frac{2M}{b^2} \left(b \int_0^b y^2 dy - \int_0^b y^3 dy \right) = \frac{2M}{b^2} \left(b \frac{y^3}{3} \Big|_0^b - \frac{y^4}{4} \Big|_0^b \right) =$$

$$\frac{2M}{b^2} \left(b \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} \right) = \frac{1}{6} Mb^2.$$

Taigi plono trikampio formos išdėstytos masės inercijos momentas x ašies atžvilgiu bus:

$$I_x = \frac{1}{6} Mb^2.$$

Gauname, kad inercijos momentas y ašies atžvilgiu bus:

$$I_y = \frac{1}{6} Ma^2.$$

Šis inercijos momento skaičiavimo metodas gali būti taikomas bet kokios formos trikampio masei išdėstyti, svarbu, kad koordinatinių ašis eitų trikampio šonu.

Taikant pateiktą metodiką galima rasti bet kokios formos kūnų masių išsidėstymo inercijos momentus. Sudėtingos geometrinės formos kūnų masių inercijos momentų reikšmės yra pateikiamos specialiojoje techninėje literatūroje – žinynuose.

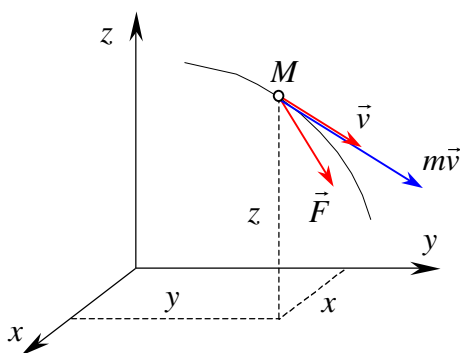
1.5. Mechaninio judėjimo dinaminės charakteristikos

Sprendžiant dinamikos uždavinius taikomos įvairios matematinės priklausomybės, kurios padeda nustatyti santykius tarp judėjimo matų ir veikiančiųjų jėgų poveikio. Charakterizuojant mechaninį judėjimą nepakanka žinoti, kokios yra judančio objekto kinematinės charakteristikos (greitis arba pagreitis). Svarbu žinoti, kuris kūnas darys didesnę (arba mažesnę) mechaninį poveikį kitam kūnui. Tai priklausys ne tik nuo kūnų judėjimo greičio, bet ir nuo jų masių, masės išsidėstymo erdvėje ir kūnų judėjimo dinaminės charakteristikų. Mechaninio judėjimo dinaminės charakteristikos yra *judėjimo kiekis*, *kinetinis momentas* ir *kinetinė energija*.

1.5.1. Materialiojo taško judesio kiekis

Kaip buvo minėta anksčiau, viena iš materialiojo taško judėjimo charakteristikų yra *judesio kiekis*. Judesio kiekis yra vektorinis dydis, kuris skaičiuojamas kaip materialiojo taško masės ir judėjimo greičio sandauga, t. y. $m\vec{v}$.

Tarkime, masės m materialusis taškas dėl jėgos \vec{F} poveikio juda erdvėje greičiu \vec{v} (13 pav.).



13 pav. Materialiojo taško judesio kiekis

Taško M judesio kiekio vektorius $m\vec{v}$ yra proporcingas taško masei, jis yra pridėtas prie taško ir nukreiptas greičio kryptimi.

Bet kuris vektorinis dydis, tarp jų ir judesio kiekis, gali būti išreikštas projekcijomis į koordinatinių ašis:

$$mv = \sqrt{(mv_x)^2 + (mv_y)^2 + (mv_z)^2}; \quad (22)$$

čia

$$mv_x = m \frac{dx}{dt}, \quad mv_y = m \frac{dy}{dt}, \quad mv_z = m \frac{dz}{dt}.$$

Judesio kiekio vektoriaus kryptis nusakoma kampais, kurie randami naudojant atitinkamas funkcijas:

$$\cos \alpha = \frac{mv_x}{mv}, \quad \cos \beta = \frac{mv_y}{mv}, \quad \cos \gamma = \frac{mv_z}{mv}.$$

Judesio kiekio dimensija [kg · m/s], arba [N · s].

1.5.2. Materialiųjų taškų mechaninės sistemos judesio kiekis

Mechaninės sistemos judesio kiekiu \vec{K} vadinama visų mechaninės sistemos materialiujų taškų judesio kiekių $m_k \vec{v}_k$ geometrinė suma, t. y.

$$\vec{K} = \sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_k. \quad (23)$$

Šio vektoriaus modulis gali būti išreikštas projekcijomis:

$$K = \sqrt{K_x^2 + K_y^2 + K_z^2};$$

čia

$$K_x = \sum_{k=1}^n m_k v_{kx}, \quad K_y = \sum_{k=1}^n m_k v_{ky}, \quad K_z = \sum_{k=1}^n m_k v_{kz}.$$

Mechaninės sistemos judesio kiekio vektoriaus \vec{K} padėtis erdvėje nusakoma kampais, kurie randami naudojant atitinkamus krypties kosinusus:

$$\cos \alpha = \frac{K_x}{K}, \quad \cos \beta = \frac{K_y}{K}, \quad \cos \gamma = \frac{K_z}{K}.$$

Tačiau materialiujų taškų mechaninės sistemos judesio kiekio vektorius \vec{K} neturi konkrečios pridėties vietos. Jis yra laisvasis vektorius, todėl laikoma, kad šis vektorius gali būti perkeltas lygiagrečiai su savimi į bet kuri mechaninės sistemos tašką.

1.5.3. Mechaninės sistemos judesio kiekio skaičiavimas

Iš formulių (8), skirtų mechaninės sistemos masės centro koordinatėms skaičiuoti, gauname:

$$\sum_{k=1}^n m_k x_k = M \cdot x_C, \quad \sum_{k=1}^n m_k y_k = M \cdot y_C, \quad \sum_{k=1}^n m_k z_k = M \cdot z_C.$$

Diferencijuodami šias priklausomybės laiko atžvilgiu, gausime:

$$\sum_{k=1}^n m_k \frac{dx_k}{dt} = M \cdot \frac{dx_C}{dt}, \quad \sum_{k=1}^n m_k \frac{dy_k}{dt} = M \cdot \frac{dy_C}{dt}, \quad \sum_{k=1}^n m_k \frac{dz_k}{dt} = M \cdot \frac{dz_C}{dt},$$

todėl

$$\sum_{k=1}^n m_k v_{kx} = M \cdot v_{Cx}, \quad \sum_{k=1}^n m_k v_{ky} = M \cdot v_{Cy}, \quad \sum_{k=1}^n m_k v_{kz} = M \cdot v_{Cz}.$$

Turime vektorinės priklausomybės projekcijas, galime užrašyti vektorinę išraišką:

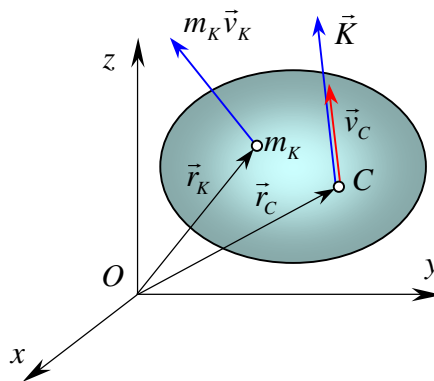
$$\sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_k = M \cdot \vec{v}_C.$$

Gautoje išraiškoje visų materialijų taškų judesio kiekių geometrinė suma pagal (23) formulę yra mechaninės sistemos judesio kiekis, t. y. $\sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_k = \vec{K}$.

Galutinai turėsime:

$$\vec{K} = M \cdot \vec{v}_C. \quad (24)$$

Darome patikslintą išvadą, kad sistemos judesio kiekis yra vektorinis dydis, skaičiuojamas kaip sistemos masės ir masės centro greičio sandauga, jis pridėtas sistemos masės centre ir nukreiptas masės centro greičio kryptimi (14 pav.).



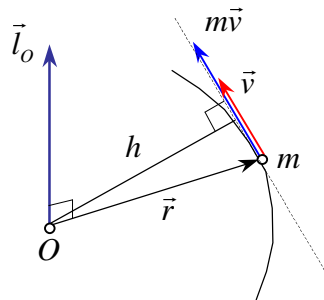
14 pav. Sistemos judesio kiekis

1.5.4. Materialiojo taško ir mechaninės sistemos kinetinis momentas

Materialiojo taško *kinetiniu momentu* bet kurio centro arba ašies atžvilgiu vadinamas judesio kiekio momentas to paties centro arba tos pačios ašies atžvilgiu.

Statika [1–7] nagrinėja jėgos sukamąjį efektą plokštumoje bet kurio centro atžvilgiu. Erdviniams statikos uždaviniams jėgos sukamojo efekto dydis buvo išreikštas vektorinio momento pavidalu [1]. Visas statikoje gautas išvadas jėgos momentui bet kurio centro atžvilgiu taikome *taško judesio kiekiui*.

Tarkime, masės m materialusis taškas M juda \vec{v} greičiu tam tikra trajektorija erdvėje (15 pav.).



15 pav. Materialiojo taško kinetinis momentas

Norint rasti judesio kiekio $m\vec{v}$ momentą centro O atžvilgiu, reikia padauginti vektoriaus $m\vec{v}$ modulį iš peties h (15 pav.) arba išnagrinėti padėties vektoriaus \vec{r} ir judesio kiekio vektoriaus $m\vec{v}$ vektorinę sandaugą $\vec{l}_o = \vec{r} \times m\vec{v}$. Šios vektorinės sandaugos produktą – vektorių \vec{l}_o reikia pridėti centre O . Vektorius \vec{l}_o yra naudojamas vektoriaus $m\vec{v}$ momentui centro O atžvilgiu žymėti erdvėje.

Vektorius \vec{l}_o atitinka materialiojo taško m kinetinį momentą centro O atžvilgiu ir pagal didumą yra lygus vektoriaus $m\vec{v}$ momentui centro O atžvilgiu (15 pav.). Vektorius \vec{l}_o pridedamas centre O statmenai plokštumai, išvestai per vektorių $m\vec{v}$ ir centrą O , ir pagal susitarimą nukreipiamas taip, kad žiūrint iš jo galo atrodytų, kad vektorius $m\vec{v}$ pasuka plokštumą prieš laikrodžio rodyklės kryptį.

Taigi materialiojo taško kinetinis momentas \vec{l}_o bet kurio centro O atžvilgiu lygus taško judesio kiekio $m\vec{v}$ vektoriniam momentui to paties centro atžvilgiu, t. y.

$$\vec{l}_o = \vec{M}_o(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v}. \quad (25)$$

Tašką O laikydami Dekarto atskaitos sistemos pradžia, turėsime (pagal statikoje taikomą jėgos momento skaičiavimo analogiją) kinetinių momentų koordinatinių ašių atžvilgiu reikšmes:

$$l_x = M_x(m\vec{v}) = y \cdot mv_z - z \cdot mv_y,$$

$$l_y = M_y(m\vec{v}) = z \cdot mv_x - x \cdot mv_z,$$

$$l_z = M_z(m\vec{v}) = x \cdot mv_y - y \cdot mv_x.$$

Mechaninės sistemos kinetinis momentas \vec{L}_O bet kurio laisvai pasirinkto centro O atžvilgiu yra lygus visų mechaninės sistemos materialiujų taškų kinetinių momentų \vec{l}_O to paties centro atžvilgiu geometrinei sumai, t. y.

$$\vec{L}_O = \sum_{k=1}^n \vec{l}_O = \sum_{k=1}^n \vec{M}_O(m_k \vec{v}_k) = \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k). \quad (26)$$

Mechaninės sistemos kinetinis momentas \vec{L}_O gali būti surastas pagal projekcijas į Dekarto koordinatinių ašis:

$$L_O = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2};$$

čia

$$L_x = \sum_{k=1}^n l_x = \sum_{k=1}^n M_x(m_k \vec{v}_k) = \sum_{k=1}^n (y_k \cdot m_k v_{kz} - z_k \cdot m_k v_{ky}),$$

$$L_y = \sum_{k=1}^n l_y = \sum_{k=1}^n M_y(m_k \vec{v}_k) = \sum_{k=1}^n (z_k \cdot m_k v_{kx} - x_k \cdot m_k v_{kz}),$$

$$L_z = \sum_{k=1}^n l_z = \sum_{k=1}^n M_z(m_k \vec{v}_k) = \sum_{k=1}^n (x_k \cdot m_k v_{ky} - y_k \cdot m_k v_{kx}).$$

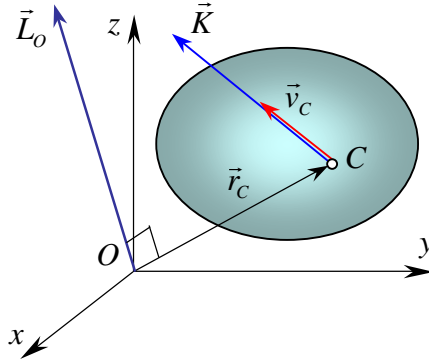
Sistemos kinetinio momento \vec{L}_O padėtis erdvėje nusakoma kampais, kurie randami naudojant atitinkamus krypties kosinusus: $\cos \alpha = \frac{L_x}{L_O}$, $\cos \beta = \frac{L_y}{L_O}$, $\cos \gamma = \frac{L_z}{L_O}$.

Materialiujų taškų mechaninės sistemos O centro atžvilgiu kinetinis momentas \vec{L}_O pridėtas tame pačiame centre.

1.5.5. Standžiojo kūno kinetinio momento skaičiavimas

Skaičiuodami standžiojo kūno judėjimo dinamines charakteristikas, vertinam tai, kad standusis kūnas yra materialiujų taškų sistemos visuma. Todėl galime taikyti mechaninei sistemai gautas išvadas standžiojo kūno dinamikos klausimams nagrinėti. Skaičiuodami standžiojo kūno kinetinį momentą, įvertiname kūno judėjimą.

Nagrinėsime kūno *slenkamąjį* judėjimą [12–13]. Žinome, kad esant bet kokiam kūno judėjimui, kūno judesio kiekis (24) yra lygus kūno masės ir masės centro greičio sandaugai, t. y. $\vec{K} = M \cdot \vec{v}_C$. Tarkime, kad kūno masės centro C padėtis nejudančiosios atskaitos sistemos atžvilgiu nusakoma padėties vektoriumi \vec{r}_C (16 pav.):



16 pav. Kūno kinetinis momentas esant slenkamajam judėjimui

Padauginę abi kūno kinetinio momento išraiškos puses iš \vec{r}_C , gauname:

$$\vec{r}_C \times \vec{K} = \vec{r}_C \times M \cdot \vec{v}_C,$$

arba

$$\vec{L}_O = \vec{r}_C \times M \cdot \vec{v}_C, \quad (27)$$

nes vektorinė sandauga $\vec{r}_C \times \vec{K}$ yra vektorinio dydžio \vec{K} , arba standžiojo kūno judėjimo kiekio vektoriaus \vec{K} momentas centro O atžvilgiu. Šis vektorius pridedamas centre O statmenai sukamojo efekto plokštumai taip, kad iš vektoriaus \vec{L}_O galo vektoriaus \vec{K} posūkis būtų matomas prieš laikrodžio rodyklę (16 pav.).

Taigi galime padaryti išvadą, kad esant slenkamajam judėjimui standžiojo kūno kinetinis momentas bet kurio centro atžvilgiu yra lygus kūno masės centro judesio kiekio momentui to paties centro atžvilgiu.

Esant kūno *sukamajam* judėjimui apie nejudamąją ašį, kinetinį momentą apie sukimosi ašį galime surasti kaip kūno taškų judesio kiekių momentų apie tą pačią ašį sumą pagal formulę:

$$L_z = \sum_{k=1}^n M_z(m_k \vec{v}_k).$$

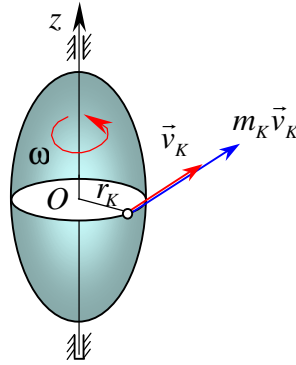
Jeigu standusis kūnas sukasi kampiniu greičiu ω apie nejudamąją ašį Oz (17 pav.), tai bet kurio taško judesio kiekio vektoriaus modulis lygus šio taško masės ir greičio sandaugai:

$$m_k v_k = m_k \cdot \omega \cdot r_k,$$

o judesio kiekio vektorius nukreiptas greičio kryptimi statmenai atkarpai nuo taško iki sukimosi ašies.

Taško judesio kiekio momentas sukimosi ašies atžvilgiu

$$M_z(m_k \vec{v}_k) = m_k v_k \cdot r_k = m_k \cdot \omega \cdot r_k^2.$$



17 pav. Kūno kinetinis momentas sukimosi ašies atžvilgiu

Skaičiuodami standžiojo kūno kinetinį momentą sukimosi ašies atžvilgiu turime sudėti visų kūno taškų kinetinius momentus tos pačios ašies atžvilgiu, t. y.

$$L_z = \sum_{k=1}^n M_z(m_k \vec{v}_k) = \sum_{k=1}^n m_k \cdot \omega \cdot r_k^2 = \omega \cdot \sum_{k=1}^n m_k r_k^2.$$

Visų kūno taškų masių ir jų atstumų iki sukimosi ašies kvadratų suma yra kūno inercijos momentas sukimosi ašies atžvilgiu, t. y. $I_z = \sum_{k=1}^n m_k r_k^2$.

Taigi gauname:

$$L_z = I_z \cdot \omega. \quad (28)$$

Galime padaryti išvadą, kad esant sukamajam judėjimui standžiojo kūno kinetinis momentas sukimosi ašies atžvilgiu lygus kūno inercijos momento sukimosi ašies atžvilgiu ir kūno kampinio greičio sandaugai. Jeigu žiūrint nuo sukimosi ašies galo kūnas sukasi prieš laikrodžio rodyklę, kinetinis momentas bus teigiamas, ir atvirkščiai, jeigu kūnas sukasi pagal laikrodžio rodyklę, tai kinetinis momentas bus neigiamas.

1.5.6. Materialiojo taško ir mechaninės sistemos kinetinė energija

Viena iš materialiojo taško mechaninio judėjimo dinaminė charakteristikų yra *kinetinė energija*, arba dydis $\frac{mv^2}{2}$, t. y. taško masės ir greičio kvadrato sandaugos pusė. Kinetinė energija yra skaliarinis mechaninio judėjimo matas, nes greičio vektoriaus kvadratas lygus skaliarinei vektorių sandaugai, t. y. $\vec{v}^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$. Vektorių skaliarinė sandauga lygi vektorių modulių sandaugai, padauginant iš kosinuso kampo tarp jų. Šiuo atveju kampas tarp vienodų vektorių lygus nuliui ir $\cos 0^\circ = 1$. Gauname $\vec{v}^2 = v^2$. Kinetinė energija visada yra

teigiamasis dydis ir nepriklauso nuo judėjimo krypties. Raskime kinetinės energijos $\frac{mv^2}{2}$ dimensiją:

$$[\text{masė} \cdot \text{greitis}^2] = \left[\text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right] = \left[\frac{\text{N}}{\text{m/s}^2} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right] = [\text{N} \cdot \text{m}] = [\text{J}]$$

Taigi kinetinės energijos dimensija – niutonmetrai $[\text{N} \cdot \text{m}]$ arba džauliai $[\text{J}]$.

Sistemos kinetinė energija vadinama mechaninės sistemos materialiuųjų taškų kinetinių energijų suma, t. y.

$$T = \sum_{k=1}^n \frac{m_k v_k^2}{2}. \quad (29)$$

Sistemos kinetinė energija taip pat yra teigiamasis dydis. Ji nepriklauso nuo materialiuųjų taškų greičių krypčių ir gali būti lygi nuliui tik tuomet, kai visų taškų greičiai bus lygūs nuliui.

1.5.7. Standžiojo kūno kinetinė energija

Skaičiuojant standžiojo kūno kinetinę energiją, vertinama tai, kad standusis kūnas yra materialiuųjų taškų sistemos atvejis. Taip pat daroma išvada, kad galima taikyti mechaninės sistemos išvadas standžiojo kūno kinetinei energijai skaičiuoti. Žinome, kad skaičiuojant standžiojo kūno dinamines charakteristikas įvertinamas kūno judėjimas. Todėl, nagrinėdami kūno *slenkamąjį* judėjimą, taikome bendrąją sistemos kinetinės energijos skaičiavimo formulę (29). Įvertindami tai, kad esant slenkamajam judėjimui visų taškų greičiai yra vienodi, galime juos pakeisti vieno taško greičiu (pavyzdžiui, masės centro). Tuomet turėsime:

$$T = \sum_{k=1}^n \frac{m_k v_k^2}{2} = \frac{v_C^2}{2} \sum_{k=1}^n m_k,$$

arba, galiausiai gauname:

$$T = M \frac{v_C^2}{2}. \quad (30)$$

Taigi esant *slenkamajam judėjimui kūno kinetinė energija skaičiuojama kaip taško, turinčio kūno masę ir judančio kūno masės centro judėjimo greičiu, kinetinė energija.*

Esant kūno *sukamajam* judėjimui apie nejudamąją ašį kinetinė energija skaičiuojama pagal tą pačią (29) formulę. Įvertinant tai, kad kiekvieno materialiojo taško linijinį greitį esant sukamajam judėjimui galima užrašyti kaip kūno kampinio greičio ir taško atstumo iki sukimosi ašies sandaugą, t. y. $v_k = \omega \cdot r_k$, gaunama:

$$T = \sum_{k=1}^n \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum_{k=1}^n \frac{m_k (\omega \cdot r_k)^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{k=1}^n m_k \cdot r_k^2.$$

Galiausiai gauname:

$$T = \frac{\omega^2}{2} \cdot I_z. \quad (31)$$

Taigi *standžiojo kūno kinetinė energija esant sukamajam judėjimui lygi kūno inercijos momentui sukimosi ašies atžvilgiu, padaugintam iš kūno kampinio greičio kvadrato pusės.*

Įvertinant tai, kad standžiojo kūno *plokštuminį judėjimą* laikome dviejų judėjimų suma – slenkamojo kartu su laisvai pasirinktu poliumi ir sukamojo apie šį polių, – *kūno kinetinė energija skaičiuojama kaip dviejų kinetinių energijų suma – slenkančiai kartu su laisvai pasirinktu poliumi judėjimo daliai ir sukamai apie pasirinktą polių judėjimo daliai.* Jeigu poliumi laikysime plokščiosios figūros masės centrą, tai kinetinės energijos išraišką galėsime užrašyti taip:

$$T = \frac{Mv_C^2}{2} + \frac{\omega^2 I_{zc}}{2}. \quad (32)$$

Skaičiuojant kūno inercijos momentą, atsižvelgiama į tai, kad esant plokščiajam judėjimui poliumi gali būti pasirinktas bet kuris kūno taškas, nebūtinai masės centras. Todėl kūno inercijos momentas yra skaičiuojamas apie ašį, einančią per pasirinktą polių.

1.6. Veikiančiųjų jėgų poveikio matai ir jų charakteristikos

Kaip jau buvo minėta, dinamika nagrinėja objektų judėjimą priklausomai nuo veikiančiųjų jėgų. Kitaip tariant, dinamika vertina materialiujų taškų arba standžiųjų kūnų tarpusavio sąveiką, arba mechaninio judėjimo priežastis, t. y. fizikinių dydžių, apibūdinančių kūnų tarpusavio sąveikos intensyvumą, įtaką judėjimui. Statika nagrinėja kūnų tarpusavio sąveikos matus – jėgą ir jėgos momentą, kurie apibūdina kūnų tarpusavio sąveiką konkrečiu laiko momentu. Bet dinamikos jėgos poveikio vertinimas priklauso ir nuo jėgos veikimo trukmės, ir nuo šios jėgos judančio kūno poslinkio. Čia vartojamos tokios mechaninės kūnų sąveikos sąvokos: *jėgos impulsas* ir *jėgos darbas*.

Nagrinėjant mechaninės sistemos dinamikos uždavinius, mechaninę sistemą veikiančias jėgas priimta klasifikuoti į išorines ir vidines, į aktyviausias jėgas ir ryšių reakcijas.

1.6.1. Materialiujų taškų mechaninės sistemos vidinės jėgos

Nagrinėdami taško judėjimą turime reikalą su jėgomis, kurios veikia tik šį izoliuotą materialųjį tašką. Tokias jėgas vadiname *išorinėmis*.

Tačiau gamtoje ir mūsų aplinkoje yra be galo daug judančių objektų, sudarytų iš materialiujų taškų arba standžiųjų kūnų visumos, kurioje kiekvieno taško judėjimas priklauso nuo kitų taškų judėjimo ir ryšių tarp jų. Tokia materialiujų taškų visuma vadinama *mechanine sistema*. Mechaninės sistemos pavyzdžiu gali būti bet kuris mechanizmas, staklės, automobilis ir kt.

Iš statikos žinome, kad, nagrinėdami suvaržytąjį kūną, be išorinių aktyviųjų jėgų, dar turime įvertinti jėgas, kurios atsiranda išoriniuose ryšiuose, vadinamąsias ryšių reakcijas. Tokios ryšių reakcijos dar vadinamos išorinėmis.

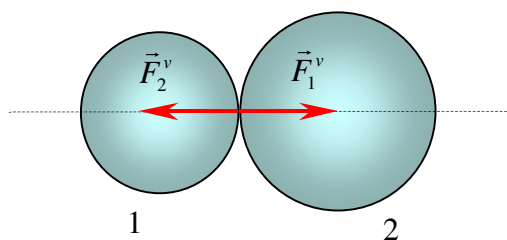
Nagrinėdami materialijų taškų mechaninę sistemą, turime įvertinti tai, kad kiekvieną materialųjį tašką veikia ne tik aktyviosios išorinės jėgos, bet ir jėgos, kurios atsiranda dėl kiekvieno taško poveikio kitam tos pačios sistemos taškui. Tokios jėgos vadinamos sistemos *vidinėmis* jėgomis. Išorines jėgas toliau žymėsime \vec{F}^i , o vidines – \vec{F}^v .

Vidinių jėgų savybės:

1. Mechaninės sistemos visų vidinių jėgų suminis vektorius, arba bendrasis poveikis sistemai, lygus nuliui, t. y.

$$\vec{R}^v = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^v = 0.$$

Pavyzdžiui, mechaninėje sistemoje parenkame du bet kuriuos materialiuosius taškus, kurie yra susiję (18 pav.).



18 pav. Mechaninės sistemos vidinės jėgos

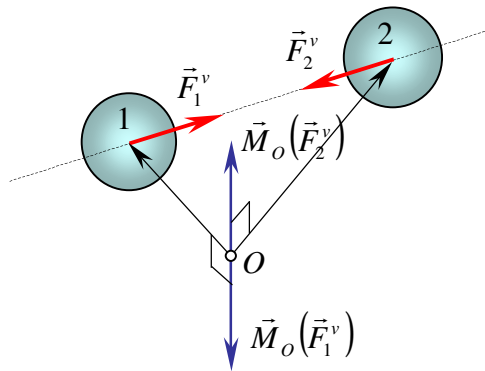
Žinodami, kad materialieji taškai veikia vienas kitą vienodo dydžio bet priešingų kryptių jėgomis \vec{F}_1^v ir \vec{F}_2^v , gauname $\vec{F}_1^v + \vec{F}_2^v = 0$.

Sudėję visas vidinės jėgas, gausime, kad jų geometrinė suma lygi nuliui, t. y.

$$\vec{R}^v = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^v = 0. \quad (33)$$

2. Mechaninės sistemos visų vidinių jėgų suminis vektorinis momentas bet kurio centro O atžvilgiu lygus nuliui:

$$\vec{M}_O^v = \sum_{k=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_k^v) = 0.$$



19 pav. Mechaninės sistemos vidinių jėgų vektoriniai momentai

Mechaninės sistemos dviejų taškų vidinės jėgos yra lygios (19 pav.) ir nukreiptos į priešingas puses. Todėl centro O atžvilgiu šios jėgos turės vienodo dydžio, bet priešingų kryptių vektorinius momentus. Matyti, kad šių vektorinių momentų geometrinė suma yra lygi nuliui, t. y.

$$\vec{M}_O(\vec{F}_1^v) + \vec{M}_O(\vec{F}_2^v) = 0.$$

Sudėję mechaninės sistemos visų vidinių jėgų vektorinius momentus centro O atžvilgiu, gausime, kad jų geometrinė suma lygi nuliui, t. y.

$$\vec{M}_O^v = \sum_{k=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_k^v) = 0. \quad (34)$$

1.6.2. Jėgos impulsas

Jėgos impulsu vadinamas fizikinis dydis, apibūdinantis jėgos poveikį kūnui arba materialiajam taškui per tam tikrą laiko tarpą. Jėgos impulsas yra vektorinis dydis, lygus jėgos ir laiko sandaugai, nukreiptas veikiančiosios jėgos kryptimi.

Kai turime kintamą jėgą, elementarusis jėgos impulsas randamas taip:

$$d\vec{S} = \vec{F} \cdot dt. \quad (35)$$

Nagrinėjant jėgos poveikį kūnui per tam tikrą laiko tarpą, integruojant (35) priklausomybę, gaunama impulso reikšmė per šį laiko tarpą:

$$\vec{S} = \int_{t_o=0}^t \vec{F} dt. \quad (36)$$

Jėgos impulso projekcijos į koordinatinių ašis:

$$S_x = \int_{t_o=0}^t F_x dt, \quad S_y = \int_{t_o=0}^t F_y dt, \quad S_z = \int_{t_o=0}^t F_z dt.$$

Kai jėga yra pastovi, jėgos impulsas per laikotarpį t skaičiuojamas kaip jėgos ir laiko sandauga:

$$\vec{S} = \vec{F} \cdot t.$$

Tegul kūną veikia jėgų sistema $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, kurios atstojamoji jėga lygi šių jėgų geometrinei sumai:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n.$$

Dauginame abi šios išraiškos puses iš elementaraus laiko tarpo dt ir integruodami laiko intervalu gauname:

$$\int_{t_0=0}^t \vec{R} dt = \int_{t_0=0}^t \vec{F}_1 dt + \int_{t_0=0}^t \vec{F}_2 dt + \dots + \int_{t_0=0}^t \vec{F}_n dt.$$

Kiekvienas narys gautoje lygybėje yra jėgos impulsas. Taigi turime:

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \dots + \vec{S}_n,$$

arba

$$\vec{S} = \sum_{i=1}^n \vec{S}_i.$$

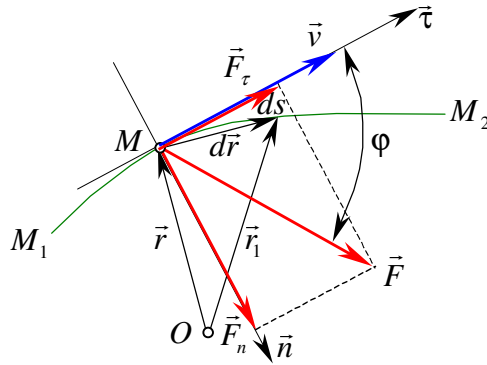
Galime padaryti išvadą, kad kai kūną veikia kelios jėgos, šių jėgų impulsas lygus atskirų jėgų impulsų geometrinei sumai. Jėgos impulso dimensija – $[\text{N} \cdot \text{s}]$.

1.6.3. Jėgos darbas

Kūną arba materialųjį tašką veikiančios *jėgos darbu* bet kurioje atkarpoje vadinamas fizikinis dydis, kuriuo įvertinamas veikiančiosios jėgos efektyvumas šioje atkarpoje, jėgos dydis, jėgos padėtis ir atkarpos didumas.

Tarkime, kad reikia rasti kintamos jėgos \vec{F} atliktą darbą, kai šios jėgos veikiamas taškas bet kokia trajektorija nuėjo kelią iš padėties M_1 į padėtį M_2 (20 pav.). Norint apskaičiuoti atkarpoje M_1-M_2 jėgos \vec{F} atliktą darbą, reikia sudalyti šią atkarpą į nykstamai mažas atkarpas – elementarius poslinkius ir sudėti jėgos \vec{F} darbus, atliktus šiuose elementariuose poslinkiuose.

Išskirsime be galo mažą trajektorijos atkarpą ds (20 pav.) ir surasime šioje atkarpoje pastovios jėgos \vec{F} atliktą darbą.



20 pav. Pastovios jėgos \vec{F} elementaraus darbo skaičiavimo schema

Elementarusis jėgos \vec{F} darbas atkarpoje ds išreiškiamas taip:

$$dA = F_{\tau} \cdot ds; \quad (37)$$

čia F_{τ} – jėgos \vec{F} dedamoji judančio taško M greičio vektoriaus \vec{v} kryptimi; ds – taško elementarus poslinkis, kuris ribinėje išraiškoje gali būti laikomas nukreiptu pagal greitį.

Matome (20 pav.), kad $F_{\tau} = F \cdot \cos \varphi$. Įrašę F_{τ} reikšmę į (37) formulę, gauname:

$$dA = F \cdot \cos \varphi \cdot ds, \quad (38)$$

t. y. jėgos elementarusis darbas lygus jėgos \vec{F} modulio ir poslinkio ds sandaugai, padaugintai iš kosinuso kampo tarp jų. Todėl galimi tokie jėgos \vec{F} ir poslinkio ds išsidėstymo atvejai:

- kai kampas $\varphi = 0^{\circ}$, tai $dA = F \cdot ds$, arba jeigu jėga ir poslinkis yra vienos krypties, jėgos darbas yra teigiamasis dydis, lygus jėgos ir poslinkio sandaugai;
- kai kampas $\varphi = 90^{\circ}$, tai $dA = 0$, t. y. jeigu jėga yra statmena poslinkiui, tai jos atliktas darbas lygus nuliui;
- kai kampas $\varphi = 180^{\circ}$, tai $dA = -F \cdot ds$, t. y. jeigu jėga ir poslinkis yra skirtingų kryptių, tai jėgos darbas yra neigiamas ir lygus jėgos ir poslinkio sandaugai.

Kinematikoje [12–13] turėjome greičio vektoriaus išraišką $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, iš kurios gauname judančio taško padėties vektoriaus pokytį $d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt$, kuris ribinėje išraiškoje nukreiptas pagal greitį. Taip pat turėjome išraišką greičio moduliui skaičiuoti $v = \frac{ds}{dt}$. Taigi galime užrašyti, kad $ds = v \cdot dt = |\vec{v}| \cdot dt = \frac{|d\vec{r}|}{dt} \cdot dt$, arba $ds = |d\vec{r}|$. Gautąjį dydį ds įrašę į (38) formulę, turėsime:

$$dA = F \cdot \cos \varphi \cdot ds = |\vec{F}| \cdot \cos \varphi \cdot |d\vec{r}|.$$

Šios lygybės dešinioji pusė yra vektorių \vec{F} ir $d\vec{r}$ skaliarinė sandauga. Todėl gauname:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (39)$$

t. y. jėgos elementarusis darbas yra skaliarinis dydis, lygus jėgos vektoriaus \vec{F} ir jėgos pridėties vietos spindulio vektoriaus diferencialo $d\vec{r}$ skaliarinei sandaugai.

Irašę į (39) formulę spindulio vektoriaus diferencialo $d\vec{r}$ reikšmę $d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt$, gausime $dA = \vec{F} \cdot \vec{v} \cdot dt$. Bet jėgos \vec{F} ir laiko atkarpos dt sandauga yra jėgos \vec{F} elementarus impulsas $d\vec{S}$. Galime užrašyti, kad

$$dA = d\vec{S} \cdot \vec{v}, \quad (40)$$

t. y. elementarusis jėgos darbas gali būti išreikštas kaip veikiančiosios jėgos elementaraus impulso ir greičio vektoriaus skaliarinė sandauga.

Jeigu užrašysime veikiančiosios jėgos \vec{F} ir elementaraus poslinkio $d\vec{r}$ dydžius pagal Dekarto koordinatinių ašis, tai turėsime:

$$dA = (F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}) \cdot (dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}).$$

Atlikę matematinius pertvarkymus, gausime

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (41)$$

Gavome analizinę elementariojo darbo skaičiavimo išraišką.

Visą jėgos \vec{F} atkarpoje nuo padėties M_1 iki padėties M_2 atliktą darbą gausime, jeigu sudėsime visus elementariusius darbus visuose elementariose atkarpose, kitaip tariant, integruodami visas matematinės elementariojo darbo išraiškas:

$$A = \int_{M_1}^{M_2} F_\tau ds, \quad (42)$$

$$A = \int_{M_1}^{M_2} F \cdot \cos \varphi ds, \quad (43)$$

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} d\vec{r}, \quad (44)$$

$$A = \int_{t_0}^t d\vec{S} d\vec{v}, \quad (45)$$

$$A = \int_{M_1}^{M_2} F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (46)$$

Jėgos darbo dimensija – $[N \cdot m]$, arba $[J]$.

Darbo išraiškos skaičiavimo pavyzdžiai

Atstojamosios jėgos darbas

Tegul judantį tašką veikia jėgų sistema, kurios atstojamoji jėga lygi sistemą sudarančių jėgų geometrinei sumai, t. y. $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_k$, arba $\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k$. Padauginę abi lygybės puses iš elementaraus taško poslinkio $d\vec{r}$, turėsime:

$$\vec{R} \cdot d\vec{r} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot d\vec{r} = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + \dots + \vec{F}_k \cdot d\vec{r}.$$

Gavome atstojamosios jėgos \vec{R} elementariojo darbo išraišką, kuri lygi visų veikiančiųjų jėgų elementariųjų darbų algebrinei sumai, t. y.

$$dA = \sum_{k=1}^n dA_k.$$

Nagrinėdami visų veikiančiųjų jėgų atliktą darbą atkarpoje nuo pradinės padėties M_1 iki galinės M_2 , turime susumuoti visus elementariusius darbus, atliktus veikiančios jėgų sistemos, t. y.

$$A = \sum_{k=1}^n dA_k = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}_1 d\vec{r} + \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}_2 d\vec{r} + \dots + \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}_k d\vec{r}.$$

Bet tą patį darbą atliks ir šios jėgų sistemos atstojamoji. Galima padaryti išvadą, kad atstojamosios jėgos darbas esant tam tikram poslinkiui lygus visų dedamųjų jėgų atliktų darbų esant tam pačiam poslinkiui algebrinei sumai.

Vadinasi,

$$\int_{M_1}^{M_2} \vec{R} d\vec{r} = \sum_{k=1}^n \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}_k d\vec{r},$$

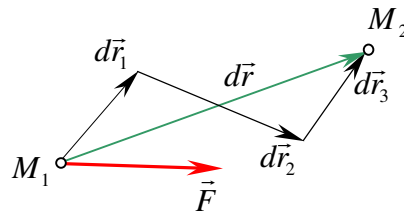
arba

$$A = \sum_{k=1}^n A_k,$$

t. y. atstojamosios jėgos darbas esant tam tikram poslinkiui yra lygus visų dedamųjų jėgų atliktų darbų esant tam pačiam poslinkiui algebrinei sumai.

Jėgos darbas esant sudėtiniam poslinkiui

Tarkime, kad taškas pereina iš padėties M_1 į padėtį M_2 , turėdamas įvairius elementarius poslinkius $d\vec{r}_k$ (21 pav.):



21 pav. Jėgos \vec{F} elementariojo darbo esant sudėtiniam poslinkiui skaičiavimo schema

Matome, kad suminis elementarus poslinkis yra sudedamųjų elementarių poslinkių algebrinė suma, t. y. $d\vec{r} = \sum_{k=1}^n d\vec{r}_k$. Padauginę šią lygybę iš \vec{F} , gauname:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \sum_{k=1}^n \vec{F} \cdot d\vec{r}_k.$$

Kairioji lygybės pusė yra jėgos \vec{F} darbo išraiška atkarpoje $M_1 M_2$. Dešiniojoje pusėje turime jėgos \vec{F} elementariųjų darbų sumą kiekvienoje elementarioje kelio atkarpoje.

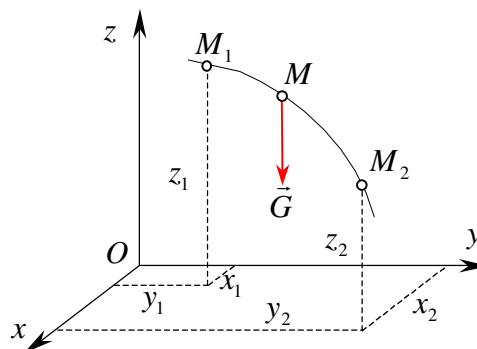
Turime:

$$A = \sum_{k=1}^n A_k,$$

arba elementarusis jėgos darbas esant sudėtiniam taško poslinkiui lygus algebrinei sumai elementariųjų darbų, kuriuos atliks jėga esant kiekvienam elementariam poslinkiui.

Sunkio darbas

Tegul masės m materialusis taškas juda vienalyčiame traukos lauke (22 pav.):



22 pav. Taško judėjimas dėl sunkio poveikio

Tašką M veikia sunkis $G = mg$. Nustatysime jo atliktą darbą, kai taškas iš padėties M_1 pereina į padėtį M_2 .

Darbo išraiškai skaičiuoti taikome analizinę darbo skaičiavimo išraišką (46). Tuomet gausime:

$$A = \int_{M_1}^{M_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \int_{z_1}^{z_2} (-mg) dz = -mg(z_2 - z_1) = mg(z_1 - z_2).$$

Kai aukščių skirtumas $h = z_1 - z_2$, $A = mg \cdot h$. Matyti, kad galimi tokie atvejai:

- kai $z_1 > z_2$, t. y. kai taškas veikiant sunkiui leidžiasi žemyn, sunkio darbas bus teigiamas;
- kai $z_2 > z_1$, t. y. kai taškas veikiant sunkiui kyla į viršų, sunkio darbas bus neigiamas.

Todėl galime teigti, kad sunkio darbas lygus sunkio ir aukščių skirtumo sandaugai:

$$A = \pm mg \cdot h \quad (47)$$

su pliuso ženklu, kai veikiant sunkiui materialusis taškas leidžiasi žemyn, ir su minuso ženklu, kai jis kyla aukštyn.

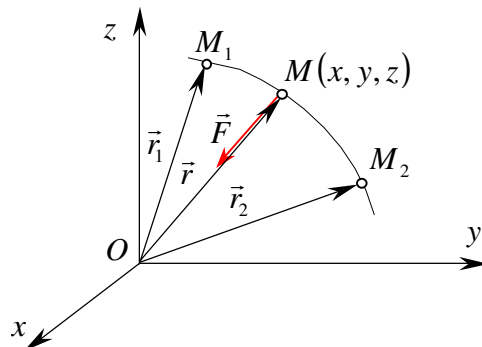
Iš to išplaukia, kad sunkio darbas nepriklauso nuo judėjimo trajektorijos ir yra lygus nuliui, kai galutinis judančio taško aukštis yra tame pačiame lygyje kaip ir pradinis. Laikoma, kad aukščiai atskaitomi nuo bet kurios horizontaliosios plokštumos.

Tamprumo jėgos darbas

Tamprumo jėga vadinama ta jėga, kuri aprašoma Huko dėsnio ir nukreipta kryptimi, priešinga poslinkiui (23 pav.)

$$\vec{F} = -c\vec{r};$$

čia \vec{r} – atstumas nuo taško M iki taško statinės pusiausvyros padėties, t. y. tokio taško, kuriame tamprumo jėga lygi nuliui; c – tamprumo koeficientas (konstanta).



23 pav. Tamprumo jėgos darbo skaičiavimo schema

Pasirinkę atskaitos sistemos pradžią taško statinės pusiausvyros padėtyje, turėsime:

$$F_x = -cx, \quad F_y = -cy, \quad F_z = -cz.$$

Taikydami (46) formulę, randame tamprumo jėgos atliktą darbą atkarpoje $M_1 M_2$:

$$A = \int_{M_1}^{M_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = -c \int_{M_1}^{M_2} (x dx + y dy + z dz) = -c \int_{M_1}^{M_2} r dr;$$

čia $x dx + y dy + z dz = r dr$, nes $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Atlikę integravimą gauname formulę, kurią taikome tamprumo jėgos atliktam darbui skaičiuoti:

$$A = -\frac{c}{2} (r_2^2 - r_1^2).$$

Jeigu pradiniu momentu taškas M yra toliau nuo statinės pusiausvyros padėties, negu antruoju laiko momentu (t. y. $r_1 > r_2$), tai tamprumo jėgos darbas bus teigiamas.

Jeigu pradinė taško M padėtis sutampa su taško statinės pusiausvyros padėtimi O , gauname, kad $r_1 = 0$, o tamprumo jėgos atlikto darbo išraiška bus tokia:

$$A = -\frac{c}{2} \cdot r^2. \quad (48 \text{ a})$$

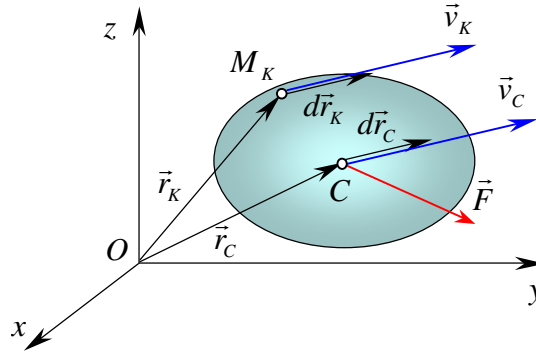
Atstumas r – trumpiausias atstumas tarp taško M ir taško statinės pusiausvyros padėties. Pažymėsime jį dydžiu λ ir vadinsime *deformacija*. Tuomet tamprumo jėgos darbas, jeigu jis skaičiuojamas atkarpoje nuo statinės taško padėties esant poslinkiui, visada bus neigiamas ir lygus pusei tamprumo koeficiento, padauginto iš deformacijos kvadrato.

$$A = -\frac{c}{2} \cdot \lambda^2. \quad (48 \text{ b})$$

Galima padaryti išvadą, kad tamprumo jėgos darbas nepriklauso nuo trajektorijos formos ir lygus nuliui, kai judėjimo trajektorija yra uždara.

Jėgos darbas esant kūno slenkamajam judėjimui

Tarkime, kūnas slenka. Atsižvelgiant į standžiojo kūno slenkamojo judėjimo savybes, visi kūno taškai turi vienodus pagal dydį ir kryptį greičius. Todėl, jeigu jėga \vec{F} veikia kūną taške M_k (24 pav.), tai jėgos elementarusis darbas gali būti rastas pagal bet kurią jau žinomą darbo apskaičiavimo formulę. Pavyzdžiui, pagal (39) gausime $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}_k$; čia \vec{r}_k – bet kurio standžiojo kūno taško M_k padėties vektorius.



24 pav. Jėgos \vec{F} darbas esant kūno slenkamajam judėjimui

Visą kelio atkarpoje nuo padėties M_1 iki padėties M_2 jėgos \vec{F} atliktą darbą gausime susumavę visus elementariusius darbus visose kūno elementariose atkarpose, t. y.

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}_k.$$

Esant kūno slenkamajam judėjimui poliumi gali būti laikomas bet kuris kūno taškas, pavyzdžiui, masės centras. Tuomet esant kūno slenkamajam judėjimui elementarusis jėgos darbas gali būti apskaičiuotas pagal formulę:

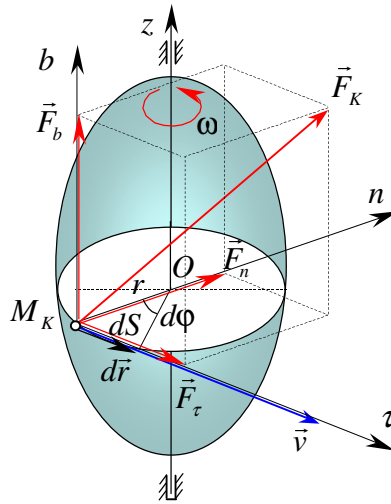
$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}_c. \quad (49)$$

Atkarpoje nuo taško M_1 iki taško M_2 jėgos \vec{F} atliktas darbas gali būti apskaičiuotas pagal formulę:

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}_c. \quad (50)$$

Jėgos darbas esant sukamajam apie nejudamąją ašį kūno judėjimui

Tarkime, veikiant jėgų sistemai $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, standusis kūnas (25 pav.) sukasi apie nejudamąją ašį Oz kampiniu greičiu ω . Vieną bet kokią šios jėgų sistemos jėgą \vec{F}_k išskaidysime į dedamąsias jėgas pagal natūraliųjų ašių kryptis. Tangentinę dedamąją \vec{F}_τ nukreipiame pagal liestinę trajektorijai kampinio greičio kryptimi, normalinę dedamąją \vec{F}_n – normalinės ašies kryptimi į trajektorijos centrą, binormalinę dedamąją \vec{F}_b – statmenai \vec{F}_τ ir \vec{F}_n .



25 pav. Jėgos \vec{F} darbas esant sukamajam apie nejudamąją ašį kūno judėjimui

Pagal Varinjoną teoremą atstojamosios jėgos \vec{F}_k momentas Oz ašies atžvilgiu lygus dedamųjų jėgų \vec{F}_τ , \vec{F}_n , \vec{F}_b momentų sumai tos pačios ašies atžvilgiu. Tačiau jėgos \vec{F}_n ir \vec{F}_b momentų apie ašį Oz neturi. Be to, tarp šių jėgų ir taško M_k elementaraus poslinkio dS yra 90° kampas. Todėl jėgos \vec{F}_n ir \vec{F}_b esant standžiojo kūno sukamajam judėjimui apie nejudamąją ašį Oz darbo neatliks. Matome, kad jeigu esant kūno sukamajam judėjimui jėgos \vec{F}_n ir \vec{F}_b nesuteikia kūnui sukamojo efekto, tai šios jėgos ir darbo neatliks. Iš čia išplaukia išvada, kad esant standžiojo kūno sukamajam judėjimui apie nejudamąją ašį sukamąjį efektą kūnui suteikia tik jėgos \vec{F}_k tangentinė dedamoji \vec{F}_τ , kurios atliktas elementarusis darbas skaičiuojamas pagal (37) formulę, t. y. $dA = F_\tau \cdot ds$.

Atsižvelgę į tai, kad poslinkio ds ribinė reikšmė lygi poslinkiui $d\vec{r}$, nukreiptam greičio kryptimi trajektorijos liestine, pertvarkome jėgos \vec{F}_τ darbo išraišką taip:

$$dA = F_\tau \cdot ds = F_\tau \cdot dr = F_\tau \cdot r \cdot d\varphi = M_z(\vec{F}_\tau) \cdot d\varphi = M_z(\vec{F}_k) \cdot d\varphi.$$

Gavome, kad jėgos \vec{F}_k elementariojo darbo reikšmė esant standžiojo kūno sukamajam judėjimui lygi šios jėgos momento apie sukimosi ašį dydžiui, padaugintam iš elementariojo kūno posūkio kampo, t. y.

$$dA = M_z(\vec{F}_k) \cdot d\varphi.$$

Jeigu jėgos sukimo kryptis sutampa su kūno posūkio kampo $d\varphi$ kryptimi, tai jėgos atliktas darbas bus teigiamas, o jeigu skirtingų krypčių, tai atliktas darbas bus neigiamas.

Skaičiuojant standųjį kūną veikiančios jėgų sistemos atliktą elementarųjį darbą esant kūno elementariam posūkiui apie nejudamąją ašį, reikia rasti kiekvienos jėgos darbą esant šiam kūno judėjimui ir susumuoti surastus darbus. Tą patį gausime, jeigu susumuosime visų jėgų momentus apie sukimosi ašį ir padauginsime iš kūno posūkio kampo $d\varphi$, nes turime:

$$dA = \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) \cdot d\varphi = d\varphi \cdot \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k).$$

Visų jėgų momentų suma apie sukimosi ašį lygi jėgų sistemos suminiam momentui apie šią ašį. Todėl galime teigti, kad esant standžiojo kūno sukamajam judėjimui apie nejudamąją ašį visų veikiančių jėgų elementarusis darbas lygus šios jėgų sistemos suminiam momentui sukimosi ašies atžvilgiu, padaugintam iš posūkio kampo $d\varphi$, t. y.

$$dA = M_z \cdot d\varphi. \quad (51)$$

Jeigu esant kūno sukamajam judėjimui apie nejudamąją ašį posūkio kampas kinta nuo pradinės reikšmės φ_1 iki galutinės reikšmės φ_2 , tai suminė jėgų darbų reikšmė bus tokio dydžio:

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi. \quad (52)$$

Kai visų išorinių jėgų suminis momentas sukimosi ašies atžvilgiu yra pastovus, gauname:

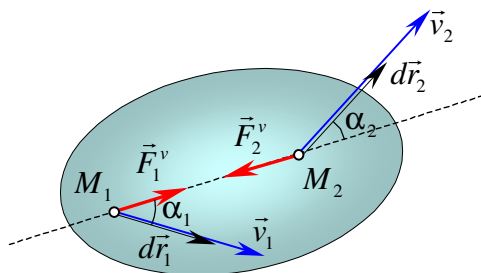
$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi = M_z \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = M_z \cdot (\varphi_2 - \varphi_1),$$

t. y. jeigu esant kūno sukamajam judėjimui apie nejudamąją ašį posūkio kampas kinta nuo pradinės reikšmės φ_1 iki galutinės reikšmės φ_2 , tai galutinė jėgų darbų suma bus lygi šios jėgų sistemos suminiam momentui sukimosi ašies atžvilgiu, padaugintam iš posūkio kampo pokyčio, t. y.:

$$A = M_z \cdot (\varphi_2 - \varphi_1). \quad (53)$$

Standžiojo kūno vidinių jėgų darbas

Tarkime, veikiant jėgų sistemai, standusis kūnas juda erdvėje. Pažymėsime bet kurių dviejų kūno taškų M_1 ir M_2 vidines jėgas \vec{F}_1^v ir \vec{F}_2^v (26 pav.).



26 pav. Standžiojo kūno vidinių jėgų atliktojo darbo skaičiavimo schema

Laikant, kad esant bet kokiam kūno judėjimui, išskyrus slenkamąjį, visų kūno taškų, tarp jų ir taškų M_1 ir M_2 , poslinkiai bus $d\vec{r}_1$ ir $d\vec{r}_2$, t. y. jie judės greičiu \vec{v}_1 ir \vec{v}_2 ir su atkarpa $M_1 - M_2$ sudarys α_1 ir α_2 kampus.

Pagal (39) formulę užrašysime vidinių jėgų \vec{F}_1^v ir \vec{F}_2^v elementariųjų darbų sumą esant šiems elementariems poslinkiams. Gausime:

$$dA_1^v + dA_2^v = \vec{F}_1^v \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2^v \cdot d\vec{r}_2 = \vec{F}_1^v \cdot \vec{v}_1 dt + \vec{F}_2^v \cdot \vec{v}_2 dt = (\vec{F}_1^v \cdot \vec{v}_1 + \vec{F}_2^v \cdot \vec{v}_2) dt.$$

Įvertinę tai, kad standžiojo kūno dviejų taškų vidinės jėgos yra lygios $\vec{F}_1^v = \vec{F}_2^v$, ir atlikę matematinius pertvarkymus, galime užrašyti:

$$dA_1^v + dA_2^v = (F_1^v v_1 \cos \alpha_1 + F_2^v v_2 \cos(180^\circ - \alpha)) dt = F_1^v (v_1 \cos \alpha_1 - v_2 \cos \alpha_2) dt = 0.$$

Gavome, kad *vidinių jėgų darbų suma esant bet kokiam kūno poslinkiui lygi nuliui*, nes standžiojo kūno dviejų taškų greičių projekcijos į tiesę, jungiančią šiuos taškus, yra lygios.

1.6.4. Galingumas

Galingumu vadinsime jėgos darbą, atliktą per laiko vienetą, t. y.

$$N = \frac{dA}{dt}. \quad (54)$$

Atsižvelgę į jėgos darbo išraišką (39), kad $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$, ir įrašę šią išraišką į (54) formulę, gauname galingumo išraišką:

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt},$$

arba

$$N = \vec{F} \cdot \vec{v}, \quad (55)$$

t. y. jėgos galingumas yra lygus veikiančiosios jėgos ir šios jėgos pridėties taško greičio skaliarinei sandaugai. Kai veikiančiosios jėgos \vec{F} kryptis sutampa su judėjimo kryptimi, kampas tarp jėgos \vec{F} ir greičio \vec{v} yra lygus nuliui, t. y. $\alpha = 0^\circ$, gausime tokią galingumo išraišką:

$$N = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv \cos 0^\circ,$$

arba

$$N = F \cdot v. \quad (56)$$

Galime padaryti praktikai svarbią išvadą: tam, kad judanti transporto priemonė, kurios galingumas yra žinomas, turėtų didesnę traukos jėgą, reikia suteikti jai mažesnę greitį. Taip

daroma šiuolaikinėse visureigiuose, kurių pavarų dėžės leidžia mažinti varančiųjų ratų apsisukimus.

Taikydami (54) ir (51) formules, galime išreikšti galingumą esant kūno sukamajam judėjimui, t. y.

$$N = \frac{dA}{dt} = M_z \frac{d\varphi}{dt},$$

arba

$$N = M_z \omega, \quad (57)$$

t. y. esant kūno sukamajam judėjimui galingumas lygus sukamojo momento ir kūno kampinio greičio sandaugai.

Iš (54) formulės išplaukia, kad galingumo dimensija yra džaulis per sekundę. Galingumas matuojamas vatais, t. y.

$$1 \left[\frac{\text{Nm}}{\text{s}} \right] = 1 \left[\frac{\text{J}}{\text{s}} \right] = 1[\text{W}].$$

Mechanizmo galingumas išreiškiamas ir arklio jėga [a. j.]. Santykis tarp vienos arklio jėgos ir vato yra toks: 1 a. j. = 0,736 kW = 736 W.

1.6.5. Potencinės jėgos. Jėgų laukas. Potencinė energija

Nagrinėdami jėgos darbą matėme, kad kai kurių jėgų darbas nepriklauso nuo nueito kelio ir judėjimo trajektorijos, bet priklauso tik nuo taško pradinės ir galutinės padėties. Tokios jėgos vadinamos *potencinėmis* ir yra svarbios įvairioms mechanikos ir fizikos sritims. Erdvės dalis, kurios kiekviename taške veikia jėga, priklausanti nuo taško koordinatų, vadinama *jėgų lauku*. Jėgų laukas vadinamas stacionariuoju, jei nusakančios jį fizinės sąlygos yra visą laiką tos pačios. Stacionarus jėgos laukas vadinamas *potenciniu*, jei egzistuoja tokia lauko taškų koordinatų *jėgos funkcija* $U(x, y, z)$, kurios išvestinė bet kurios krypties atžvilgiu duoda tos krypties dedamąją jėgą:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (58)$$

Jėgos funkcija pasižymi šiomis savybėmis:

1. Skaičiuojant jėgos elementarųjį darbą pagal (41) formulę, galima užrašyti:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F_x dx + F_y dy + F_z dz, \quad (59)$$

iš čia, įvertinę (58), gauname:

$$dA = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz, \quad (60)$$

arba

$$dA = dU(x, y, z). \quad (61)$$

Darome išvada, kad *jėgos elementarusis darbas potenciniame jėgų lauke yra lygus jėgos funkcijos pilnajam diferencialui.*

2. Skaičiuodami atkarpoje nuo pradinės padėties $M_0(x_0, y_0, z_0)$ iki padėties $M(x, y, z)$ jėgos atliktą pilnutinį darbą, gausime:

$$A_{M_0M} = \int_{M_0}^M dA = \int_{M_0}^M dU = U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z)_0,$$

arba

$$A = U - U_0. \quad (62)$$

Galima padaryti išvada, kad, taškui pereinant iš vienos padėties į kitą, *pilnutinis jėgos darbas yra lygus jėgų funkcijų skirtumui šiuose taškuose ir nepriklauso nuo taško judėjimo trajektorijos.*

Taip pat galime pažymėti, kad *jėgos darbas potenciniame jėgos lauke uždaroje atkarpoje lygus nuliui*, nes judėjimo pradinis ir galinis taškai turi vienodas jėgos funkcijos reikšmes.

Nagrinėjant potencinių jėgų lauką, kartais tenka nustatyti dar vieną jėgų lauko funkciją – *potencinę energiją V*, kuri apibūdina lauko taškuose *sukauptas energijos atsargas*.

Materialiojo taško potencinė energija yra lygi darbui, kurį atlieka lauko jėgos, perkeldamos materialųjį tašką iš padėties M į pradinę padėtį M_0 , t. y. $V = A_{MM_0} = -A_{M_0M}$, arba, kitaip tariant, potencinė energija lygi jėgos funkcijos pokyčiui:

$$V = U_0 - U. \quad (63)$$

Laikant, kad potencinės energijos $V(x, y, z)$ ir jėgų funkcijos $U(x, y, z)$ nuliniai taškai sutampa, arba pasirinkus pradinę padėtį, kurios $U_0 = 0$, gaunama:

$$V = -U, \quad (64)$$

t. y. bet kuriame jėgų lauko taške potencinė energija lygi jėgų lauko reikšmei tame pačiame taške su priešingu ženklu arba potencinės jėgos darbui su priešingu ženklu.

Remdamiesi priklausomybe (64), gauname:

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \\ F_y &= \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial y}, \\ F_z &= \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\partial V}{\partial z}, \end{aligned} \quad (65)$$

arba jėgos projekcijos į koordinatinių ašis potenciniame jėgų lauke lygios paimtosioms su priešingu ženklu potencinės energijos dalinėms išvestinėms pagal atitinkamas koordinatas.

Istoriškai potencinės energijos sąvoka buvo pavartota anksčiau negu jėgų funkcija. Atliekant kai kuriuos skaičiavimus patogiau taikyti jėgų funkciją, kadangi formulės, į kurias įeina ši funkcija, neturi minuso ženklo. Apskaičiavę jėgų funkciją, remdamiesi (64) lygybe, sužinosime ir potencinę energiją.

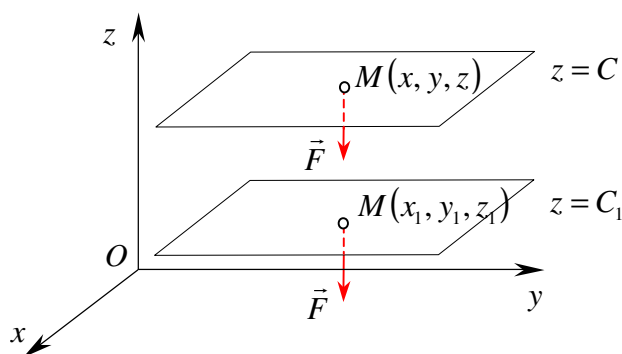
Izotropinio sunkio lauko jėgų funkcijos skaičiavimas

Kai koordinatinių ašis Oz (27 pav.) nukreipta į viršų, sunkio projekcijos į ašis bus tokios:

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = -mg.$$

Taikydami (41) ir (59) formules, apskaičiuojame sunkio elementarųjį darbą:

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -mg \cdot dz.$$



27 pav. Sunkio lauko jėgų funkcijos skaičiavimo schema

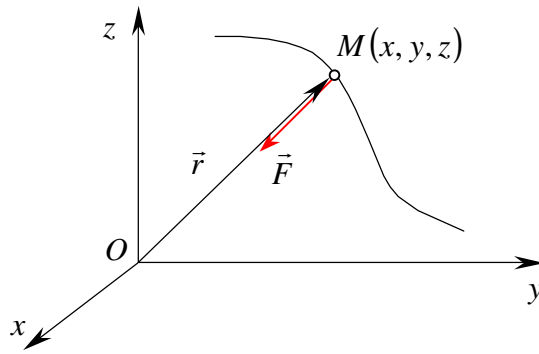
Kadangi pagal (61) $dU = dA$, gauname $dU = -mg \cdot dz$, todėl $U = \int dU = -mg \int dz$. Taigi izotropinio sunkio lauko jėgų funkcija:

$$U = -mgz + C. \quad (66)$$

Šio lauko sunkis yra pastovios krypties ir didumo (modulio). Lauko lygio lygtis $U = C$ arba $z = \text{const}$ rodo, kad lygio paviršiai yra horizontaliosios plokštumos.

Tamprumo jėgos jėgų funkcijos skaičiavimas

Nagrinėsime tiesinę tamprumo jėgą (28 pav.), kuri atitinka Huko dėsnį, t. y. $\vec{F} = -c\vec{r}$; čia \vec{r} – atstumas nuo taško iki statinės pusiausvyros padėties, kurioje $\vec{F} = 0$; c – pastovusis koeficientas – standumo koeficientas.



28 pav. Tamprumo jėgos jėgų funkcijos skaičiavimo schema

Jėgos projekcijos: $F_x = -cx$, $F_y = -cy$, $F_z = -cz$. Elementarusis jėgos darbas:

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -c(xdx + ydy + zdz) = -crdr.$$

Kadangi $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, gauname $xdx + ydy + zdz = rdr$. Todėl, atlikę nesudėtingus veiksmus, turėsime elementarųjį jėgos darbą:

$$dA = d\left(-\frac{cr^2}{2}\right).$$

Jėgos funkciją apskaičiuojame iš formulės:

$$U = \int dU + C = \int d\left(-\frac{cr^2}{2}\right) + C,$$

todėl gausime tamprumo jėgos jėgų funkcijos reikšmes:

$$U = -\frac{cr^2}{2} + C. \tag{67}$$

Iš čia išplaukia, kad lygio paviršiai $U = C$ yra spindulių $r = \text{const}$ sferos.

2. DINAMIKOS UŽDAVINIŲ APIBRĖŽIMAI IR SPRENDIMAI

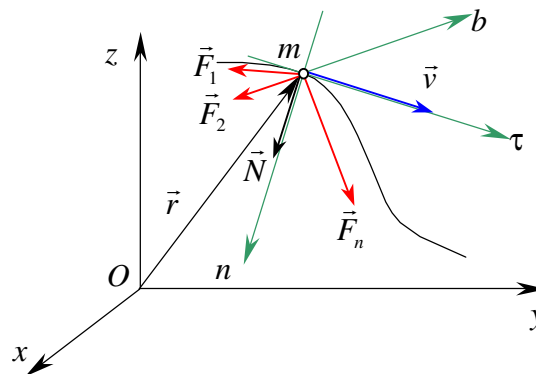
Taikant materialiojo taško pagrindinį dinamikos dėsnį (1), galima išvesti šio taško diferencialines judėjimo lygtis, kurias taikant ir sprendžiami materialiojo taško dinamikos uždaviniai. Jeigu nagrinėjamas objektas yra laisvasis materialusis taškas, kuris neturi judėjimo apribojimo ir gali judėti bet kokia kryptimi, tai dinamikos uždaviniams spręsti galima taikyti pagrindinį dinamikos dėsnį (1). Jeigu laisvąjį materialųjį tašką veikia kelios išorinės jėgos, tai dinamikos uždaviniui spręsti galima taikyti diferencialines judėjimo lygtis ir ketvirtąją dinamikos aksiomą (4). Jeigu nagrinėjamas judantis objektas yra nelaisvasis materialusis taškas, tai pagal statikos ryšių atlaisvinimo aksiomą nelaisvąjį kūną bus galima laikyti laisvuju, jeigu nutrauksime esamus ryšius ir vietoj jų pridėsime atitinkamas ryšių reakcijų jėgas.

Taigi laisvojo ir nelaisvojo materialiojo taško diferencialinės judėjimo lygtys skirsis tik tuo, kad nelaisvojo materialiojo taško diferencialinėse judėjimo lygtyse, be veikiančių išorinių jėgų, bus įvertintos ir ryšių reakcijų jėgos.

Materialiojo taško diferencialinėms lygtims išvesti nedarysime skirtumo tarp laisvojo ir nelaisvojo taškų, bet įvertinsime visas veikiančiąsias jėgas kaip išorines jėgas (žinomas), taip pat ir ryšių reakcijų jėgas (nežinomas).

2.1. Materialiojo taško diferencialinės judėjimo lygtys

Nagrinėjamas masės m materialusis taškas juda su pagreičiu \vec{a} dėl išorinių jėgų $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ poveikio (29 pav.).



29 pav. Materialiojo taško judėjimas erdvėje

Taikant ketvirtąją dinamikos aksiomą (4), šiam taškui galima užrašyti pagrindinį dinamikos dėsnį:

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (68)$$

Dešiniojoje šios priklausomybės pusėje yra visos veikiančiosios jėgos – tiek žinomos (aktyviosios), tiek nežinomos (ryšių reakcijos), nes nelaisvajam materialiajam taškui taikome

statikos ryšių atlaisvinimo principą ir pridėdami nežinomas ryšių reakcijų jėgas, tuomet nelaisvasis taškas tampa laisvu.

Suprojektuosime (68) priklausomybę Dekarto koordinatinių ašių sistemoje. Gauname:

$$\begin{cases} ma_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}, \\ ma_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}, \\ ma_z = \sum_{i=1}^n F_{iz}. \end{cases}$$

Kinematikoje turėjome, kad taško pagreičio projekcija į bet kurią Dekarto koordinatinių ašių lygi antrajai išvestinei nuo atitinkamo judėjimo dėsnio, t. y.

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

Todėl

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum_{i=1}^n F_{ix}, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = \sum_{i=1}^n F_{iy}, \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = \sum_{i=1}^n F_{iz}. \end{cases} \quad (69)$$

Šios lygtys yra *materialiojo taško diferencialinės judėjimo lygtys*, užrašytos projekcijų Dekarto koordinatinių ašių sistemoje pavidalu.

Jeigu (68) išraišką suprojektuosime natūraliųjų ašių sistemoje, turėsime:

$$\begin{cases} ma_n = \sum_{i=1}^n F_{in}, \\ ma_\tau = \sum_{i=1}^n F_{i\tau}, \\ ma_b = \sum_{i=1}^n F_{ib}. \end{cases}$$

Taip pat iš kinematikos kurso žinome, kad pagreičio projekcijos į natūraliąsias ašis bus:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad a_\tau = \frac{d^2 s}{dt^2}, \quad a_b = 0.$$

Įvertinę pagreičių projekcijas, turėsime:

$$\left\{ \begin{array}{l} m \frac{v^2}{\rho} = \sum_{i=1}^n F_{in}, \\ m \frac{d^2 s}{dt^2} = \sum_{i=1}^n F_{it}, \\ 0 = \sum_{i=1}^n F_{ib}. \end{array} \right. \quad (70)$$

Šios lygtys yra *materialiojo taško diferencialinės judėjimo lygtys*, užrašytos projekcijų į natūraliąsias koordinačių ašis pavidalu.

Sprendžiant dinamikos uždavinius kartais patogiau projektuoti materialiojo taško pagrindinį dinamikos dėsnį (68) į kitos atskaitos sistemos koordinačių ašis. Tokiu atveju reikia žinoti pagreičių projekcijas į šitas ašis. Tada ir diferencialines judėjimo lygtis turėsime kaip projekcijas į atitinkamos koordinačių sistemos ašis.

2.1.1. Pagrindiniai materialiojo taško dinamikos uždaviniai

Taikant diferencialines lygtis sprendžiami du pagrindiniai dinamikos uždaviniai.

Pirmasis dinamikos uždavinys:

žinant materialiojo taško masę m ir judėjimo dėsnį, reikia rasti tašką veikiančią jėgą.

Tarkime, žinomi masės m taško judėjimo dėsniai Dekarto koordinačių ašių atžvilgiu $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$. Taikome diferencialines judėjimo lygtis. Veikiančiosios jėgos projekcijas į koordinačių ašis galima rasti padauginus materialiojo taško masę iš antrosios koordinačių išvestinės pagal laiką, t. y.

$$\left\{ \begin{array}{l} F_x = m \frac{d^2 x}{dt^2}, \\ F_y = m \frac{d^2 y}{dt^2}, \\ F_z = m \frac{d^2 z}{dt^2}. \end{array} \right.$$

Toliau pagal jėgos projekcijas galime rasti jėgos modulį:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

ir jėgos kryptį erdvėje:

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F}, \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F}, \quad \cos \lambda = \frac{F_z}{F}.$$

Antrasis dinamikos uždavinys:

žinant materialiojo taško masę m ir tašką veikiančias jėgas, reikia nustatyti taško judėjimo dėsnį.

Sprendžiant antrąjį dinamikos uždavinį į kairiąsias lygčių (69) arba (70) puses reikia įrašyti taško masę m , o į dešiniąsias – visų veikiančiųjų jėgų projekcijų sumą. Ieškomą judėjimo dėsnį gausime suintegravę šias lygtis du kartus.

Akivaizdu, kad šis uždavinys turi didesnę praktinę reikšmę ir yra gerokai sudėtingesnis už pirmąjį dinamikos uždavinį.

Atsižvelgiant į tai, kad bendruoju atveju materialųjį tašką veikiančios jėgos gali priklausyti nuo laiko, padėties arba greičio, privalu įvertinti tai, kad šių jėgų atstojamoji jėga \vec{F} taip pat priklausys nuo laiko, koordinatų ir greičio projekcijų, t. y.

$$\vec{F} = \vec{F}(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z).$$

Uždaviniui spręsti taikome diferencialines judėjimo lygtis, išreikštas projekcijomis į Dekarto koordinatų ašis (69). Todėl nagrinėjamo materialiojo taško diferencialinės judėjimo lygtys bus tokios:

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z), \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z), \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z). \end{cases} \quad (71)$$

Siekiant nustatyti, kaip juda materialusis taškas, arba, kitaip tariant, norint rasti taško judėjimo lygtis, reikia du kartus integruoti šias diferencialines judėjimo lygtis.

Po lygčių (71) pirmojo integravimo gausime taško greičio projekcijų reikšmes su trimis integravimo konstantomis:

$$\begin{cases} v_x = \varphi_1(t, C_1, C_2, C_3), \\ v_y = \varphi_2(t, C_1, C_2, C_3), \\ v_z = \varphi_3(t, C_1, C_2, C_3). \end{cases} \quad (72)$$

Po antrojo integravimo gauname taško koordinatų kitimo dėsnius su šešiomis integravimo konstantomis:

$$\begin{cases} x = f_1(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ y = f_2(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ z = f_3(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6). \end{cases} \quad (73)$$

Integravimo konstantas galime rasti pagal pradines judėjimo sąlygas, t. y. pagal žinomus taško greitį ir padėtį, pavyzdžiui, pradiniu laiko momentu.

Jeigu žinome, kad pradiniu laiko momentu, kai $t = t_0$, taškas yra padėtyje, kurios koordinatės $x = x_0$, $y = y_0$ ir $z = z_0$, ir turi pradinį greitį, kurio projekcijos $v_x = v_{0x}$, $v_y = v_{0y}$ ir $v_z = v_{0z}$, tai, išrašę šias reikšmes į greičių (72) ir koordinačių (73) bendruosius sprendimus, rasime visas integravimo konstantas $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$. Įvertinę konstantų reikšmes, gausime tokio pavidalo materialiojo taško judėjimo lygtis:

$$\begin{cases} x = f_1(t, x_0, y_0, z_0, v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}), \\ y = f_2(t, x_0, y_0, z_0, v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}), \\ z = f_3(t, x_0, y_0, z_0, v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}). \end{cases} \quad (74)$$

Matome, kad kai materialųjį tašką veikia ta pati išorinė jėga, taško judėjimas priklausys nuo pradinių sąlygų. Pavyzdžiui, materialusis taškas dėl sunkio poveikio gali:

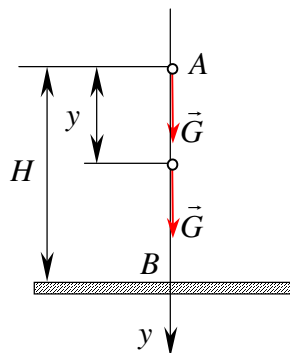
- judėti vertikaliai žemyn, jeigu buvo paleistas laisvai kristi;
- judėti pradiniu momentu į viršų, jeigu jam buvo suteiktas vertikalios krypties greitis;
- judėti tam tikra trajektorija, jei taškas įgijo greitį kampu su horizontu.

Nagrinsime materialiojo taško judėjimą, kai tašką veikia:

- 1) nekintama nuolatinė jėga;
- 2) jėga, priklausanti nuo laiko;
- 3) jėga, priklausanti nuo judėjimo greičio;
- 4) jėga, priklausanti nuo taško padėties.

Tarkime, materialųjį tašką veikia pastovi jėga, pavyzdžiui, sunkis. Tegul pradiniu momentu padėtyje A (30 pav.) esantis nejudantis taškas yra paleidžiamas judėti vertikaliai žemyn nesuteikiant jam pradinio greičio. Rasime šio taško judėjimo nepaisant oro pasipriešinimo dėsnį.

Koordinačių ašį nukreipiame judėjimo kryptimi (30 pav.).



30 pav. Taško judėjimas dėl sunkio poveikio

Užrašysime taško judėjimo diferencialinę lygtį:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = G,$$

arba

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg,$$

nes materialiojo taško sunkis $G = mg$.

Užrašysime judėjimo pradines sąlygas. Pradiniu laiko momentu $t_0 = 0$, $y_0 = 0$ ir pradinis greitis $v_0 = 0$. Pertvarkę judėjimo diferencialinę lygtį, gauname:

$$m \frac{dv}{dt} = mg.$$

Atskyrę kintamuosius, turėsime:

$$dv = g dt.$$

Integruodami gautąją lygtį esant atitinkamoms riboms, kurias nustato judėjimo pradinės sąlygos, gausime:

$$\int_{v_0=0}^v dv = \int_{t_0=0}^t g dt,$$

arba greičio bendrąją išraišką:

$$v = gt.$$

Įvertinę tai, kad greitis yra pirmoji kelio išvestinė pagal laiką, lygtį galime užrašyti taip:

$$\frac{dy}{dt} = gt.$$

Atskyrę kintamuosius, turėsime:

$$dy = g dt.$$

Suintegravę gausime:

$$\int_{y_0=0}^y dy = \int_{t_0=0}^t g dt.$$

Galiausiai gausime tokį materialiojo taško judėjimo dėsnį:

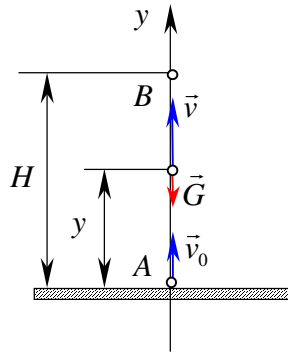
$$y = g \frac{t^2}{2}.$$

Materialiojo taško laisvojo kritimo dėsnius pirmasis suformulavo Galilėjus:

- 1) laisvai krintančio kūno greitis proporcingas kritimo laikui;
- 2) krintančio kūno atstumai proporcingi laiko kvadratui.

Jeigu norime rasti materialiojo taško kritimo iš aukščio H laiką, galime taikyti išvestąją koordinatės y formulę, t. y. $H = \frac{gt_H^2}{2}$. Iš jos randame kritimo laiką $t_H = \sqrt{2H/g}$.

Nagrinėsime atveji, kai materialusis taškas metamas vertikaliai į viršų jam suteikiant pradinį greitį v_0 (31 pav.). Nustatysime taško judėjimą nepaisant oro pasipriešinimo.



31 pav. Taško judėjimas vertikaliai į viršų

Iš pradžių apibrėšime judėjimo pradines sąlygas: kai $t_0 = 0$, tai $y_0 = 0$ ir $v_{0,y} = v_0$.

Užrašome taško judėjimo diferencialinę lygtį:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -G,$$

arba

$$m \frac{dv}{dt} = -mg.$$

Atskiriame kintamuosius ir integruojame:

$$dv = -gdt,$$

$$\int_{v_{0,y}=v_0}^v dv = \int_{t_0=0}^t (-g)dt,$$

$$v - v_0 = -gt.$$

Po pirmojo integravimo gauname taško judėjimo greičio pokyčio bendrąją išraišką:

$$v = v_0 - gt.$$

Įvertinę tai, kad greitis yra pirmoji judėjimo dėsnio išvestinė, t. y. $v = \frac{dy}{dt}$, galime užrašyti: $\frac{dy}{dt} = v_0 - gt$. Atskyrę kintamuosius gauname: $dy = v_0 dt - g dt$. Suintegravę, turėsime: $\int_{y_0=0}^y dy = \int_{t_0=0}^t v_0 dt - \int_{t_0=0}^t g dt$. Po antrojo integravimo gauname materialiojo taško judėjimo dėsnį:

$$y = v_0 t - g \frac{t^2}{2}.$$

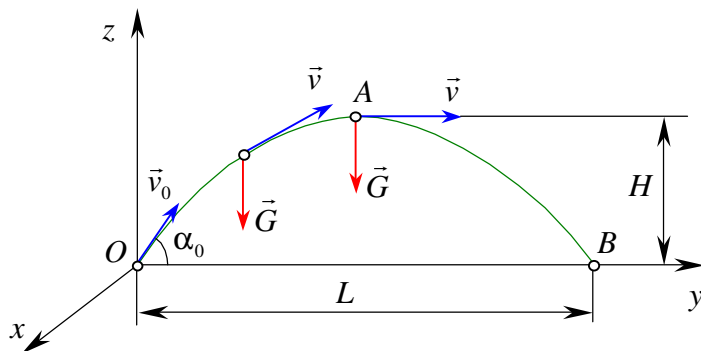
Naudodami gautas lygtis, galime rasti, pavyzdžiui, per kokį laiką ir į kokį aukštį H pakils taškas.

Padėtis B (31 pav.) ypatinga tuo, kad judantis taškas turės greitį $v = 0$. Įrašę greičio reikšmę $v = 0$ į bendrąją greičio pokyčio formulę, gauname taško judėjimo laiką: $t = v_0/g$.

Įrašę šią laiko reikšmę į judėjimo dėsnio išraišką, gauname taško pakilimo aukštį: $H = \frac{v_0^2}{2g}$.

Įdomesnis, tačiau sudėtingesnis sprendimo požiūriu uždavinys būna, kai materialusis taškas, mestas pradiniu greičiu v_0 tam tikru kampu su horizontu, juda veikiant tik sunkiui (32 pav.).

Parinksime Dekarto koordinatčių ašis taško judėjimo pradžioje ir parodysime taško pradinio greičio vektoriaus \vec{v}_0 kryptį koordinatčių ašių atžvilgiu.



32 pav. Taško judėjimas vertikaliaja plokštuma

Judėjimo pradinės sąlygos: kai $t_0 = 0$, tai $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ ir $v_{0x} = 0$, $v_{0y} = v_0 \cos \alpha_0$, $v_{0z} = v_0 \sin \alpha_0$. Judėjimas vyksta erdvėje, todėl pagal (69) užrašysime tris taško judėjimo diferencialines lygtis:

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum_{i=1}^n F_{ix}, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = \sum_{i=1}^n F_{iy}, \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = \sum_{i=1}^n F_{iz}. \end{cases}$$

Pakeitę pagreičių projekcijas ir įrašę veikiančiųjų jėgų projekcijų reikšmes, turėsime:

$$\begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = 0, \\ m \frac{dv_y}{dt} = 0, \\ m \frac{dv_z}{dt} = -mg. \end{cases}$$

Įvertinę taško judėjimo pradines sąlygas, po pirmojo integravimo gausime greičių bendrąsias išraiškas:

$$\begin{cases} v_x = 0, \\ v_y = v_0 \cos \alpha_0, \\ v_z = v_0 \sin \alpha_0 - gt. \end{cases}$$

Po antrojo judėjimo dėsnių integravimo turėsime materialiojo taško judėjimo lygtis:

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = v_0 \cos \alpha_0 \cdot t, \\ z = v_0 \sin \alpha_0 \cdot t - g \frac{t^2}{2}. \end{cases}$$

Analizuodami greičių ir judėjimo dėsnių formules darome išvadą, kad mestas kampu α_0 su horizontu materialusis taškas judės vertikaliojoje plokštumoje, ašies Ox atžvilgiu jis nejudės.

Iš judėjimo lygčių nesunkiai gauname, kad taškas judės parabole:

$$z = y \cdot \operatorname{tg} \alpha_0 - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0} y^2.$$

Turėdami materialiojo taško greičio ir judėjimo dėsnio bendrąsias išraiškas, galime rasti maksimalų taško judėjimo pakilimo aukštį H (32 pav.). Padėtyje A taško greitis yra nukreiptas pagal liestinę trajektorijai, arba statmenai ašiai Oz . Tuomet iš sąlygos $v_z = 0$ gauname, kad

taško judėjimo pakilimo iki padėties A laikas bus $t = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g}$. Įrašę šią laiko reikšmę į koordinatės z išraišką, nesunkiai gauname pakilimo aukštį $H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{2g}$. Matome, kad judėjimo trajektorijos aukštis priklauso nuo pradinio greičio krypties, t. y. nuo kampo α_0 . Maksimalus aukštis bus kai $\alpha_0 = 90^\circ$ ($\sin 90^\circ = 1$), kurio reikšmė $H = \frac{v_0^2}{2g}$, kas atitinka jau nagrinėtąjį taško judėjimo atvejį, kai taškas juda į viršų pradiniu greičiu v_0 .

Norint rasti, kaip toli judės šis taškas horizontalia kryptimi, reikia žinoti judėjimo laiką, kurį galima būtų įrašyti į koordinatės y bendrąją išraišką. Iš judėjimo schemos (32 pav.) matome, kad trajektorijos galinio taško B koordinatė $z = 0$. Tuomet turėsime $v_0 \sin \alpha \cdot t - g \frac{t^2}{2} = 0$, arba $t \left(v_0 \sin \alpha - g \frac{t}{2} \right) = 0$; iš čia gauname dvi laiko reikšmės: $t_1 = 0$, kas atitinka taško judėjimo pradinę padėtį ($z = 0$), ir $t_2 = \frac{2v_0}{g} \sin \alpha$.

Ši laiko reikšmė ir yra taško judėjimo laikas. Įrašę šį laiką į koordinatės y formulę, gauname taško judėjimo horizontalia kryptimi atstumą L .

$$L = y = v_0 \cos \alpha \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$

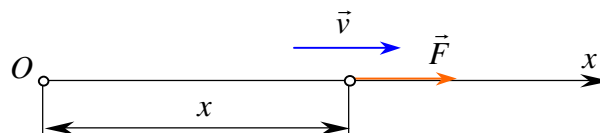
Maksimalus taško judėjimo nuotolis bus, kai $\sin 2\alpha = 1$. Iš čia gauname, kad $2\alpha = 90^\circ$.

Galime padaryti išvadą, kad maksimalų atstumą horizontalia kryptimi taškas turės, kai bus mestas kampu $\alpha = 45^\circ$ su horizontu, ir šis atstumas $L_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$.

Judėjimo atvejis, kai materialųjį tašką veikia jėga, priklausanti nuo laiko

Tarkime, horizontaliai judantį materialųjį masės m tašką (33 pav.) veikia horizontali jėga, kurios reikšmė didėja proporcingai laikui, pavyzdžiui, pagal dėsnį $F = kt$.

Tegul pradiniu laiko momentu taškas yra rimties būsenos. Nustatysime šio taško judėjimo dėsnį.



33 pav. Taško judėjimas horizontalia plokštuma

Parinkę atskaitos sistemos pradžią taško pradinėje padėtyje O ir taško judėjimo kryptimi nukreipę koordinatinių ašių Ox , užrašysime taško judėjimo pradines sąlygas: kai $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $v_0 = 0$.

Užrašysime taško diferencialinę judėjimo lygtį:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F.$$

Pertvarkę pagreičio išraišką ir įrašę jėgos reikšmę, gausime:

$$m \frac{dv_x}{dt} = kt.$$

Todėl galima užrašyti:

$$dv_x = \frac{k}{m} t dt.$$

Po pirmojo diferencialinės lygties integravimo, įvertinę judėjimo pradines sąlygas, nesunkiai gauname greičio bendrąją išraišką:

$$v_x = \frac{k}{2m} t^2.$$

Po antrojo diferencialinės lygties integravimo gauname ieškomą materialiojo taško judėjimo dėsnį:

$$x = \frac{k}{6m} t^3.$$

Matyti, kad ieškodami taško greitį arba judėjimo lygtį ir integruodami diferencialinę judėjimo lygtį turime įvertinti jėgos matematinę išraišką.

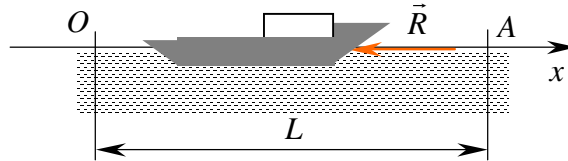
Atvejis, kai veikiančioji jėga priklauso nuo greičio

Tuo atveju, kai kūnas juda materialiojoje aplinkoje, jį veikia šios aplinkos pasipriešinimo jėga, kuri priklauso nuo kūno judėjimo greičio. Kai judėjimo greitis nedidelis, pasipriešinimo jėga proporcinga šiam greičiui, t. y. $R = kv$. Pavyzdžiui, judantį automobilį veikia oro pasipriešinimo jėga. Kai greitis didelis, pasipriešinimo jėga proporcinga greičio kvadratui, t. y. $R = kv^2$. Pavyzdžiui, judantį greitaeigį laivą arba skrendantį lėktuvą veikia vandens arba oro pasipriešinimo jėgos. Kai kūno greitis labai didelis, pasipriešinimo jėga proporcinga greičio kubui, t. y. $R = kv^3$. Pavyzdžiui, grįžtantis į Žemę kosminis laivas patiria oro pasipriešinimo jėgą, kuri esant dideliame greičiui pasiekia labai dideles reikšmes.

Pasipriešinimo jėgos atvejis

Tegul masės m laivas juda greičiu v_0 . Variklius išjungus laivą veikia vandens pasipriešinimo jėga, kuri proporcinga laivo judėjimo greičio kvadratui ir lygi $R = \mu m v^2$; čia μ – vandens pasipriešinimo koeficientas; m – laivo masė. Nustatysime, per kiek laiko laivo greitis sumažės iki v ir kokį atstumą jis nuplauks.

Parinksime atskaitos sistemos pradžią taške O , kur laivo greitis lygus v_0 , ir nukreipsime koordinatinių ašį laivo judėjimo kryptimi (34 pav.).



34 pav. Laivo judėjimas

Laivo judėjimo pradinės sąlygos: kai $t_0 = 0$, tai $x_0 = 0$ ir $v_{0x} = v_0$. Užrašysime laivo diferencialinę judėjimo lygtį:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -R,$$

kurioje pertvarkysime pagreitį atitinkančią dalį ir į kurią įrašysime jėgos reikšmę:

$$m \frac{dv_x}{dt} = -\mu m v^2.$$

Tarkime, greičio projekcija $v_x = v$, nes laivo greitis į ašį Ox projektuojamas visu dydžiu. Atskyrę kintamuosius gausime:

$$\frac{dv}{v^2} = -\mu dt.$$

Vertindami judėjimo pradines sąlygas galime užrašyti:

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2} = -\mu \int_{t_0=0}^t dt.$$

Integruodami gausime:

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = \mu t.$$

Gavome matematinę išraišką, kurioje laivo greitis v yra išreikštas netiesiogiai. Pertvarkę lygtį nesunkiai gausime greičio priklausomybę nuo laiko:

$$v = \frac{v_0}{v_0\mu t + 1}.$$

Žinodami, kad greitis yra pirmoji kelio išvestinė, t. y. $v = \frac{dx}{dt}$, turėsime:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{v_0\mu t + 1}.$$

Atskyrę kintamuosius galime užrašyti:

$$dx = \frac{v_0}{v_0\mu t + 1} dt.$$

Integruodami abi lygties puses, įvertinę pradinę sąlygą, nesunkiai gausime laivo judėjimo dėsnio bendrąją išraišką:

$$x = \frac{1}{\mu} \ln(v_0\mu t + 1).$$

Turėdami laivo greičio ir judėjimo dėsnio bendrąsias priklausomybes nuo laiko, galime spręsti ir pateiktąjį uždavinį:

- rasti laiką, per kurį laivas pasieks greitį v ;
- rasti atstumą, kurį nuplauks laivas per šį laiko tarpą.

Iš greičio bendrosios formulės gausime judėjimo laiko reikšmę:

$$t = \frac{1}{\mu v v_0} (v_0 - v).$$

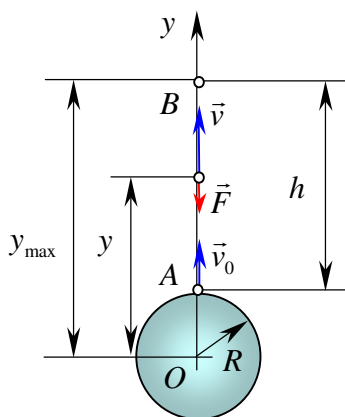
Irašę laiką į kelio išraišką ir atlikę matematinius pertvarkymus, turėsime ieškomą kelio ruožą:

$$L = x = \frac{1}{\mu} \ln \frac{v_0}{v}.$$

Jeigu pasipriešinimo jėga bus priklausoma nuo greičio aukštesniu laipsniu, diferencialinėms lygtims integruoti reikės taikyti kitas integralines priklausomybes, aprašytas specialiojoje matematinėje literatūroje.

Taško judėjimo atvejis, kai jį veikianti jėga priklauso nuo padėties

Tarkime, materialusis taškas, mestas pradiniu greičiu v_0 nuo Žemės paviršiaus vertikaliai į viršų, juda veikiant Žemės traukos jėgai, kuri yra atvirkščiai proporcinga atstumo iki Žemės centro kvadratui (35 pav.). Rasime šio taško judėjimą, nukreipdami koordinačių ašį nuo Žemės centro taško judėjimo kryptimi.



35 pav. Taško judėjimas vertikaliai į viršų nuo Žemės paviršiaus

Taško judėjimo pradinės sąlygos: kai $t_0 = 0$, tai $v_y = v_0$ ir $y_0 = R$; čia R – Žemės spindulys.

Užrašome taško judėjimo diferencialinę lygtį:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -F,$$

arba

$$m \frac{dv_y}{dt} = -\frac{k}{y^2},$$

nes traukos jėga $F = \frac{k}{y^2}$; čia k – proporcingumo koeficientas, kurį galima rasti pagal žinomą

jėgą, veikiančią tašką žinomoje vietoje. Mūsų atveju, kai taškas yra Žemės paviršiuje, jo padėtis $y = R$, o traukos jėga lygi šio taško sunkiui, t. y. $F = mg$. Įrašę visas reikšmes į jėgos

bendrają išraišką, turėsime $mg = \frac{k}{R^2}$; iš čia proporcingumo koeficientas bus lygus

$k = mgR^2$. Taigi judantį materialųjį tašką veikianti traukos jėga bus lygi:

$$F = \frac{mgR^2}{y^2},$$

o diferencialinė judėjimo lygtis bus tokia:

$$m \frac{dv_y}{dt} = -\frac{mgR^2}{y^2}.$$

Sudauginę abi lygties puses iš dy , gausime:

$$m \frac{dv_y}{dt} dy = -\frac{mgR^2}{y^2} dy.$$

Toliau galime užrašyti:

$$v_y dv_y = -gR^2 \frac{dy}{y^2}.$$

Integravę iki atitinkamų ribų, turėsime:

$$\int_{v_0}^{v_y} v_y dv_y = -gR^2 \int_R^y \frac{dy}{y^2}.$$

Galiausiai gausime:

$$\frac{v_y^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = gR^2 \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{R} \right),$$

iš čia galime gauti bendrojo pavidalo greičio išraišką, išreikštą netiesiogiai kaip padėties funkciją:

$$v_y^2 = v_0^2 - 2gR^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{y} \right),$$

arba

$$v_y = \sqrt{v_0^2 - 2gR^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{y} \right)}.$$

Naudodami šią priklausomybę galime rasti, pavyzdžiui, taško maksimalų atstumą nuo Žemės centro priklausomai nuo jam suteikto pradinio greičio v_0 . Tokiame taške B greičio projekcija $v_y = 0$. Tai reiškia, kad judantis taškas, nutolęs maksimaliu atstumu nuo Žemės, sustoja ir po to juda atgal Žemės link. Iš greičio formulės nesunkiai gauname, kad maksimalus nuotolis išreiškiamas taip:

$$y_{\max} = \frac{2gR^2}{2gR - v_0^2}.$$

Taško pakilimo aukštį virš Žemės galime rasti kaip skirtumą tarp maksimalaus atstumo ir Žemės spindulio, t. y. $h = y_{\max} - R$.

Iš maksimalaus nuotolio formulės matome, kad atstumas y_{\max} didėja, didėjant taško pradiniam greičiui v_0 . Todėl galime rasti pradinį greitį, kuriam esant taško atstumas nuo Žemės didėja iki begalybės, t. y. nustatysime sąlygas, kada mestas materialusis taškas negrįžta į Žemę. Tariant, kad $y_{\max} = \infty$, iš minėtosios formulės gauname, kad $2gR - v_0^2 = 0$, ir gausime išraišką pradinio greičio reikšmei skaičiuoti:

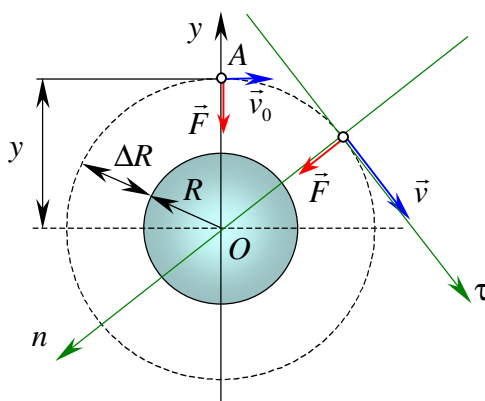
$$v_0 = \sqrt{2gR}.$$

Įvertinę, kad laisvojo kritimo pagreitis $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, ir laikydami, kad Žemės spindulys $R = 6370 \text{ km}$, gausime:

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 10^{-3} \cdot 6370} \approx 11,2 \text{ km/s}.$$

Šis greitis vadinamas *antruoju kosminiu greičiu*. Kūnas, mestas tokiu greičiu nuo Žemės paviršiaus vertikaliai į viršų, niekada negrįš į Žemę. Tokį greitį turi įgyti kosminis laivas, kad galėtų judėti nuo Žemės kitų planetų link.

Nagrinėsime materialiojo taško judėjimo atvejį, kai taškas bus mestas horizontaliojoje plokštumoje Žemės atžvilgiu pradinio greičiu v_0 . Atvejis, kai materialųjį tašką veikia pastovus sunkis, buvo išnagrinėtas anksčiau. Nustatyta, kad toks taškas, kai pradinis greitis su horizontaliaja plokštuma sudaro tam tikrą kampą, krinta į Žemę. Nagrinėsime atvejį, kai tašką veikianti jėga priklauso nuo padėties ir yra proporcinga atstumo iki Žemės centro kvadratui. Nustatysime greičio reikšmę, kuriai esant šis taškas judės apskritimu aplink Žemę (36 pav.).



36 pav. Taško judėjimas apie Žemę

Buvo minėta, kad tašką veikianti Žemės traukos jėga $F = \frac{mgR^2}{y^2}$. Tarkime, kad taškas prie Žemės paviršiaus judės greičiu \vec{v} , kuris nukreiptas liestine taško judėjimo trajektorijai.

Taško judėjimui aprašyti taikysime diferencialines judėjimo lygtis natūraliųjų ašių atžvilgiu (70), t. y.

$$m \frac{v^2}{\rho} = \sum_{i=1}^n F_{in},$$

arba, įrašę reikšmes, gausime:

$$m \frac{v^2}{\rho} = \frac{mgR^2}{y^2}.$$

Įvertinę tai, kad atstumą ΔR galime laikyti be galo mažu, gausime $y = R$ ir $\rho = R$. Taigi

$$m \frac{v^2}{R} = \frac{mgR^2}{R^2},$$

iš čia nesunkiai galime gauti greičio išraišką:

$$v = \sqrt{gR}.$$

Įrašę reikšmes, turėsime:

$$v = \sqrt{9,81 \cdot 10^{-3} \cdot 6370} = 7,91 \text{ km/s}.$$

Šis greitis vadinamas *pirmuoju kosminiu greičiu*. Tokį greitį reikia suteikti materialiajam taškui, kad jis judėtų aplink Žemę nenukrisdamas į ją. Tokį patį greitį turi įgyti ir kosminis aparatas arba palydovas, kad galėtų sukis aplink Žemę nenukrisdamas į ją, t. y. kad taptų dirbtiniu Žemės palydovu.

2.1.2. Reliatyvusis materialiojo taško judėjimas

Nagrinėdami materialiojo taško judėjimą padarėme prielaidą, kad jis juda inercinės (nejudančios) atskaitos sistemos atžvilgiu. Tikrovėje tokios atskaitos sistemos neegzistuoja, nes nėra absoliučiai nejudančių kūnų, su kuriais galėtume susieti tokias atskaitos sistemas. Sprendžiant daugelį uždavinių, atskaitos sistemos neinertiškumo ignoravimas reikšmingos paklaidos neduoda, o skaičiavimą gerokai supaprastina. Todėl ši prielaida dažnai taikoma skaičiavimams.

Tačiau mechanikoje yra sričių, kur tokia prielaida neleidžiama, pavyzdžiui, dangaus kūnų mechanikoje, kosminių skrydžių teorijoje ir kt. Jėgų veikiamo materialiojo taško judėjimas atrodys vienaip nejudančios sistemos atžvilgiu ir visai kitaip judančios sistemos atžvilgiu. Visos taško kinematinės charakteristikos – judėjimo trajektorija, greitis ir pagreitis – bus skirtingi šiose atskaitos sistemose.

Kinematikoje, nagrinėdami sudėtinį taško judėjimą, išskyrėme tris judėjimus: absoliutųjį, reliatyvųjį ir keliamąjį. Skaičiuojant balistines trajektorijas ir ypač kosminių laivų

trajektorijas, svarbus yra reliatyvusis taško judėjimas – taško judėjimas judančių objektų atžvilgiu.

Iš kinematikos žinome, kad absoliutusias taško pagreitis susideda iš trijų dedamųjų:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_k + \vec{a}_c, \quad (75)$$

formulėje $\vec{a}_r, \vec{a}_k, \vec{a}_c$ – taško reliatyvusis, keliamasis ir Koriolio pagreičiai.

Tašką veikiančių jėgų atstojamąją jėgą žymėsime vektoriumi $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$. Ši jėga materialiajam taškui suteikia absoliutųjį pagreitį. Remdamiesi antruoju dinamikos dėsnium, turime:

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (76)$$

Irašę pagreičio išraišką iš (75) į (76), gausime:

$$\vec{F} = m\vec{a}_r + m\vec{a}_k + m\vec{a}_c. \quad (77)$$

Iš čia galime išreikšti $m\vec{a}_r$ narį:

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + (-m\vec{a}_k) + (-m\vec{a}_c). \quad (78)$$

Nagrinėdami gautąją išraišką, galime padaryti išvadą, kad reliatyvųjį judėjimą sukurianti jėga susideda iš trijų dalių: tiesiogiai prie taško pridėtų jėgų \vec{F} ir dviejų jėgų, pastebimų tik judančios sistemos atžvilgiu. Vieną iš šių jėgų pavadinsime *keliamąja inercijos jėga*:

$$\vec{\Phi}_k = -m\vec{a}_k, \quad (79)$$

kitą – *Koriolio inercijos jėga*:

$$\vec{\Phi}_c = -m\vec{a}_c. \quad (80)$$

Taško reliatyviojo judėjimo keliamoji inercijos jėga yra nukreipta priešinga keliamojo judėjimo pagreičiui kryptimi ir lygi taško masės ir keliamojo pagreičio modulio sandaugai. Koriolio inercijos jėga yra nukreipta priešinga Koriolio pagreičio vektoriui kryptimi ir lygi taško masės ir Koriolio pagreičio modulio sandaugai.

Irašę (79) ir (80) lygybes į (78), gausime:

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{\Phi}_k + \vec{\Phi}_c. \quad (81)$$

Lygtis (81) yra *materialiojo taško reliatyviojo judėjimo diferencialinė lygtis, pateikta vektorine forma*. Suprojektavę šią lygtį į judamąsias (reliatyviasias) koordinačių ašis, gausime taško reliatyviojo judėjimo diferencialines lygtis koordinačių (skalariiniu) pavidalu:

$$\begin{aligned}
m \frac{d^2 x_r}{dt^2} &= F_x + \Phi_{kx} + \Phi_{cx}, \\
m \frac{d^2 y_r}{dt^2} &= F_y + \Phi_{ky} + \Phi_{cy}, \\
m \frac{d^2 z_r}{dt^2} &= F_z + \Phi_{kz} + \Phi_{cz}.
\end{aligned} \tag{82}$$

Lygtys (81) ir (82) išreiškia dinaminę Koriolio teoremą.

Taškas juda reliatyviu judėjimu, kai veikia ne tik tiesiogiai pridėtos jėgos \vec{F} , bet ir keliamoji $\vec{\Phi}_k$ bei Koriolio $\vec{\Phi}_c$ inercijos jėgos.

Reliatyviojo judėjimo atvejai

a) *Kai judanti atskaitos sistema slenka*

Tuomet $\vec{\omega}_k = 0$ ir $\vec{a}_c = 2(\vec{\omega}_k \times \vec{v}_r) = 0$. Taigi $\vec{\Phi}_c = -m\vec{a}_c = 0$. Vadinasi,

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{\Phi}_k. \tag{83}$$

Atitinkamai supaprastėja ir skaliarinės lygtys (82).

b) *Kai judanti atskaitos sistema slenka tiesiai ir tolygiai*

Tuomet \vec{a}_k ir \vec{a}_c lygūs nuliui. Keliamoji ir Koriolio inercijos jėgos taip pat lygios nuliui, t. y. $\vec{\Phi}_k \equiv 0$, $\vec{\Phi}_c \equiv 0$. Diferencialinė judėjimo lygtis atrodo taip:

$$m\vec{a}_r = \vec{F},$$

t. y. jeigu judanti atskaitos sistema slenka tiesiai ir tolygiai, ją galima laikyti inercine. Visi mechaniniai reiškiniai joje vyks taip pat, kaip ir nejudančioje sistemoje. Jokiais bandymais, atliekamais šioje sistemoje, negalėsime nustatyti, ar ji juda, ar ne. Šis atvejis išreiškia Galilėjaus klasikinės mechanikos reliatyvumo principą.

c) *Materialiojo taško reliatyvi pusiausvyra*

Tarkime, kad materialusis taškas, veikiamas jėgų, judančios sistemos atžvilgiu yra rimties būsenos. Šiuo atveju \vec{v}_r ir \vec{a}_r lygūs nuliui, o $\vec{\Phi}_c \equiv 0$. Reliatyviojo judėjimo diferencialinė lygtis (81) tampa tokia:

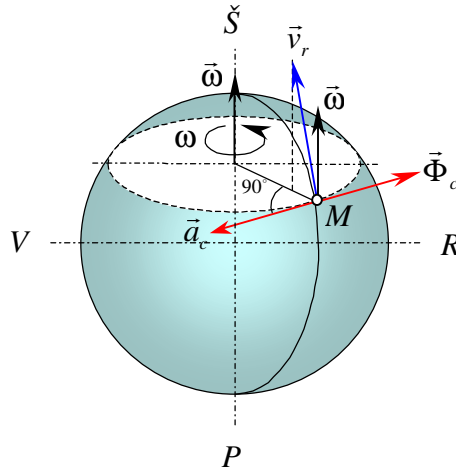
$$\vec{F} + \vec{\Phi}_k = 0. \tag{84}$$

Iš (84) lygties matyti, kad reliatyvią taško pusiausvyrą turėsime tada, kai prie taško pridėtos jėgos \vec{F} ir keliamoji inercijos jėga $\vec{\Phi}_k$ yra pusiausviros. Tai galima gauti ir tuomet, kai $\vec{v}_r \parallel \vec{\omega}_k$ ir $\vec{v}_r = \text{const}$.

Pavyzdžiai:

1. Koriolio inercijos jėga gamtoje ir technikoje

Tarkime, kad Žemės meridiane iš pietų į šiaurę šiaurės pusrutulyje greičiu \vec{v}_r juda traukinys M (37 pav.).



37 pav. Traukinio judėjimas į šiaurę

Žemė sukasi iš vakarų į rytus, todėl kampinio greičio vektorius $\vec{\omega}_k$ bus nukreiptas sukimosi ašimi iš pietų P į šiaurę \check{S} . Pasukę vektoriaus \vec{v}_r projekciją kampinio greičio ω_k kryptimi 90° kampu, gausime Koriolio pagreičio vektoriaus \vec{a}_c kryptį – paralelės liestinę iš rytų į vakarus, t. y. žiūrint pagal traukinio judėjimą – į kairiąją pusę. Traukinio ratai dėl Koriolio inercijos jėgos $\vec{\Phi}_c$ spaus bėgius priešinga kryptimi, t. y. į dešinę pusę, o, turint galvoje ratų konfiguraciją, visas spaudimas teks tik dešiniajam bėgiui. Traukiniui judant iš šiaurės į pietus, vektorių \vec{v}_r , \vec{a}_c , $\vec{\Phi}_c$ kryptys bus priešingos, ir ratai vėl spaus dešinią (traukinio judėjimo atžvilgiu) bėgį. Todėl, esant dviejų eilių bėgiams, šiaurės pusrutulyje visada greičiau susidėvi dešinėsios pusės bėgiai.

Dėl Koriolio inercijos jėgos šiaurės pusrutulyje paplaunamas dešinysis meridiane tekančių upių krantas. Dėl Koriolio inercijos jėgos poveikio šiaurės pusrutulyje šiaurės vėjas pereina į rytų – susidaro rytų pasatai.

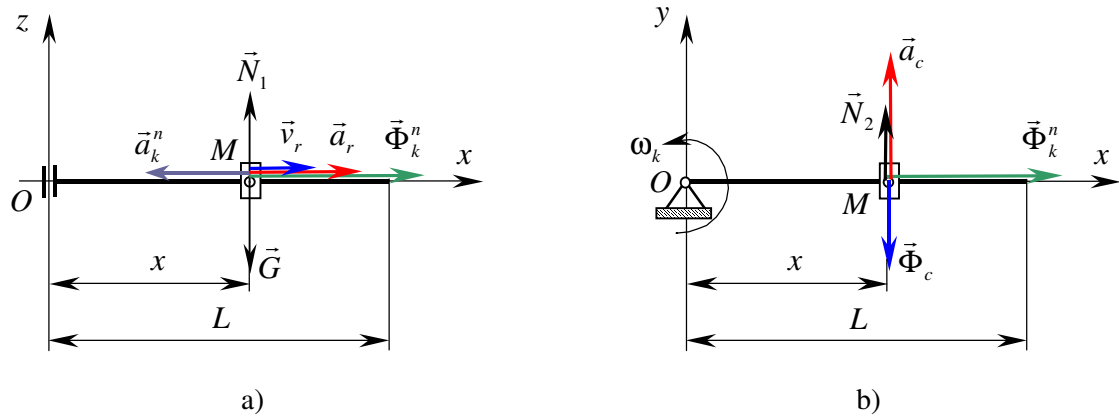
2. Materialiojo taško reliatyviojo judėjimo dėsnis

Glotnus 0,5 m ilgio strypas tolygiai sukasi horizontaliojoje plokštumoje. Sukimosi greitis $\omega_k = 2\pi \left[\frac{1}{s} \right]$. Ant strypo užmautas žiedas. Tam tikru laiko momentu strypo viduryje esančiam žiedui leidžiama slysti. Rasime žiedo (38 pav.) reliatyviojo judėjimo lygtį.

38 pav. yra pavaizduotos dvi strypo projekcijos – iš šono ir iš viršaus. Judančią atskaitos sistemą $Oxyz$ susiejame su strypu. Keliamasis sistemos judėjimas yra strypo sukimasis, reliatyvusis judėjimas yra žiedo M slinkimas Ox ašimis. Kai sukimasis yra tolygus, $\vec{\omega}_k = \text{const}$, $\varepsilon = 0$, $\vec{a}_k = \vec{a}_k^n + \vec{a}_k^\tau = \vec{a}_k^n$, $a_k^\tau = \varepsilon \cdot x = 0$, $a_k^n = \omega_k^2 x$.

Taško reliatyviojo judėjimo diferencialinė lygtis bus:

$$m\vec{a}_r = \sum \vec{F}_i + \vec{\Phi}_k^n + \vec{\Phi}_c.$$



38 pav. Žiedo reliatyvusis judėjimas

Schemoje parodome taško pagreičius ir veikiančiąsias jėgas. Tašką veikia sunkis \vec{G} , vertikali bei horizontali reakcijos \vec{N}_1 ir \vec{N}_2 ir keliamoji normalinė inercijos jėga $\vec{\Phi}_k^n$ bei Koriolio inercijos jėga $\vec{\Phi}_c$. Inercijos jėgų kryptys priešingos atitinkamiems pagreičiams, o moduliai:

$$\Phi_k^n = ma_k^n = mx\omega_k^2,$$

$$\Phi_c = ma_c = 2m\omega_k v_r.$$

Sudarome diferencialinę judėjimo lygtį Ox ašies atžvilgiu:

$$ma_r = \Phi_k^n = mx\omega_k^2.$$

Pažymėję $a_r = \ddot{x}$ ir padaliję iš masės m , gausime diferencialinę judėjimo lygtį:

$$\ddot{x} - \omega_k^2 x = 0.$$

Sprendimo ieškome $x = e^{rt}$ pavidalu. Įrašę šį sprendinį į lygtį, gauname charakteristinę lygtį $r^2 - \omega_k^2 = 0$, kurios šaknis $r_{1,2} = \pm\omega_k$.

Diferencialinės lygties sprendinys bus toks:

$$x = C_1 e^{\omega_k t} + C_2 e^{-\omega_k t}.$$

Judėjimo greitį gausime diferencijuodami judėjimo lygtį laiko atžvilgiu:

$$\dot{x} = \omega_k (C_1 e^{\omega_k t} - C_2 e^{-\omega_k t}).$$

Konstantas C_1 ir C_2 randame iš pradinių sąlygų: kai $t = 0$, $x_0 = \frac{1}{2} = 0,25$ m, $\dot{x}_0 = 0$. Įrašome šias reikšmes į judėjimo ir greičio lygtis: $0,25 = C_1 + C_2$, $0 = C_1 - C_2$; iš čia

$C_1 = C_2 = 0,125$. Įrašę kampinio greičio $\omega_k = 2\pi$ ir konstantų reikšmes į judėjimo lygtį, gauname žiedo reliatyviojo judėjimo dėsnį:

$$x = 0,125(e^{2\pi t} + e^{-2\pi t}).$$

2.2. Materialiųjų taškų sistemos diferencialinės judėjimo lygtys

Tarkime, turime materialiųjų taškų mechaninę sistemą, t. y. tokią taškų visumą, kurios kiekvieno taško judėjimas priklauso nuo kitų taškų judėjimų ir priklauso nuo ryšių tarp jų.

Užrašysime diferencialines judėjimo lygtis vienam mechaninės sistemos taškui. Tam reikia nutraukti šio taško ryšius su kitais sistemos taškais, taip pat su kitais kūnais ir pridėti atitinkamas reakcijas. Projektacijų į Dekarto koordinačių ašis pavidalu turėsime:

$$\begin{cases} m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} = F_{kx}^i + F_{kx}^v, \\ m_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} = F_{ky}^i + F_{ky}^v, \\ m_k \frac{d^2 z_k}{dt^2} = F_{kz}^i + F_{kz}^v; \end{cases}$$

čia m_k – k -ojo taško masė; $\frac{d^2 x_k}{dt^2}$, $\frac{d^2 y_k}{dt^2}$, $\frac{d^2 z_k}{dt^2}$ – k -ojo taško pagreičio projekcijos į koordinačių ašis; F_{kx}^i , F_{ky}^i , F_{kz}^i – visų išorinių jėgų, tarp jų ir išorinių atramos reakcijų, veikiančių pasirinktą tašką, atstojamosios jėgos projekcijos į pasirinktas koordinačių ašis; F_{kx}^v , F_{ky}^v , F_{kz}^v – visų vidinių jėgų, veikiančių pasirinktą tašką, atstojamosios jėgos projekcijos į pasirinktas koordinačių ašis.

Jeigu mechaninėje sistemoje yra n materialiųjų taškų, tai galime užrašyti iš viso $3n$ diferencialines lygtis. Spręsdami šias lygtis kartu, galime rasti visas kiekvieną materialųjį tašką veikiančias jėgas (pirmasis dinamikos uždavinys) arba galime rasti kiekvieno taško judėjimo dėsnį (antrasis dinamikos uždavinys).

Matematinio požiūriu tokie uždaviniai yra labai sudėtingi. Todėl, sprendžiant materialiųjų taškų sistemos dinamikos uždavinius, patogiau nagrinėti ne kiekvieno sistemos taško dinamiką atskirai, o iš karto visos materialiųjų taškų visumos dinamikos klausimus, kas ir bus parodyta tolesniuose skyriuose.

2.3. Bendrosios dinamikos teoremos

Kaip buvo parodyta anksčiau, taikant diferencialines judėjimo lygtis, galima spręsti tiek pirmąjį, tiek antrąjį dinamikos uždavinius. Tačiau kai kurių dinamikos uždavinių sprendimas gali būti supaprastintas, jeigu taikysime bendrąsias dinamikos teoremas – judesio kiekio, kinetinio momento arba kinetinės energijos teoremas.

2.3.1. Judesio kiekio teorema

Ši teorema nustato santykį tarp judančio objekto judesio kiekio ir veikiančiosios jėgos impulso.

Materialiajam m masės taškui, judančiam dėl jėgos \vec{F} poveikio pagreičiu \vec{a} , užrašysime pagrindinį dinamikos dėsnį $m\vec{a} = \vec{F}$, kurį pertvarkę gausime: $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$, arba

$$d(m\vec{v}) = \vec{F}dt. \quad (85)$$

Turime materialiojo taško *judesio kiekio teoremą*, t. y. *materialiojo taško judesio kiekio diferencialas lygus tašką veikiančios jėgos \vec{F} elementariam impulsui*.

Projektuodami (85) lygtį į Dekarto koordinačių ašis, gausime teoremą projekcijų pavidalu, t. y.

$$\begin{cases} d(mv_x) = F_x dt, \\ d(mv_y) = F_y dt, \\ d(mv_z) = F_z dt, \end{cases} \quad (86)$$

arba *diferencialas nuo materialiojo taško judesio kiekio projekcijos į bet kurią ašį lygus jėgos elementaraus impulso projekcijai į tą pačią ašį*.

Integravę (86) lygtį gausime teoremos išplėstinę formą:

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \vec{S}, \quad (87)$$

t. y. *materialiojo taško judesio kiekio pokytis per tam tikrą laikotarpį lygus veikiančiosios jėgos impulsui per tą patį laikotarpį*.

Projektuodami (87) lygtį į Dekarto koordinačių ašis, gauname judesio kiekio pokyčio teoremą projekcijų pavidalu:

$$\begin{cases} mv_x - mv_{0x} = S_x, \\ mv_y - mv_{0y} = S_y, \\ mv_z - mv_{0z} = S_z, \end{cases} \quad (88)$$

arba *materialiojo taško judesio kiekio pokyčio projekcija į bet kurią ašį per tam tikrą laikotarpį lygi veikiančiosios jėgos impulso projekcijai per tą patį laikotarpį*.

Tuo atveju, kai nagrinėjame materialiujų taškų mechaninę sistemą, judesio kiekio teoremai taikyti pasirenkame vieną bet kurią sistemos materialųjį tašką, kuriam ir užrašysime pagrindinį dinamikos dėsnį:

$$m_k \vec{a}_k = \vec{F}_k^i + \vec{F}_k^v; \quad (89)$$

čia m_k – konkretaus taško masė; \vec{a}_k – šio taško pagreitis; \vec{F}_k^i – išorinių jėgų, veikiančių šį tašką, atstojamoji jėga; \vec{F}_k^v – vidinių jėgų, veikiančių šį tašką, atstojamoji jėga.

Įvertinus tai, kad $\vec{a}_k = \frac{d\vec{v}_k}{dt}$ ir taško masė yra pastovus dydis, pertvarkę (89) lygtį, turėsime šiam taškui tokią išraišką:

$$\frac{d}{dt}(m_k \vec{v}_k) = \vec{F}_k^i + \vec{F}_k^v.$$

Tokias lygtis galime užrašyti visiems mechaninės sistemos n taškams. Sudėję gautas n lygtis, turėsime:

$$\sum_{k=1}^n \frac{d}{dt}(m_k \vec{v}_k) = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i + \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^v.$$

Dešiniojoje išraiškos pusėje turime visų išorinių bei vidinių jėgų geometrines sumas. Žinome, kad visų išorinių jėgų geometrinė suma lygi sistemos suminiam vektoriui, t. y.

$\vec{R}^i = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i$. Taip pat žinome, kad pagal (33) vidinių jėgų suminis vektorius lygus nuliui, t. y.

$\vec{R}^v = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^v = 0$. Iš analizinės matematikos išplaukia, kad $\sum_{k=1}^n \frac{d}{dt}(m_k \vec{v}_k) = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n (m_k \vec{v}_k)$.

Mechaninės sistemos materialijų taškų judesio kiekių geometrinė suma pagal (23) formulę lygi sistemos judesio kiekiui, t. y. $\sum_{k=1}^n (m_k \vec{v}_k) = \vec{K}$.

Įvertinę tai, kas išdėstyta, turėsime galutinę išraišką:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{R}^i. \quad (90)$$

Galime padaryti išvadą, kad *išvestinė nuo sistemos judesio kiekio laiko t atžvilgiu lygi visų išorinių jėgų, kurios veikia šią mechaninę sistemą, suminiam vektoriui*. Tai materialijų taškų mechaninės sistemos judesio kiekio teoremos vektorinė forma.

Projektuodami (90) išraišką į Dekarto koordinatčių ašis, turėsime teoremos koordinatinę formą, t. y.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dK_x}{dt} = R_x^i, \\ \frac{dK_y}{dt} = R_y^i, \\ \frac{dK_z}{dt} = R_z^i, \end{array} \right.$$

arba

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n m_k v_{kx} = \sum_{k=1}^n F_{kx}^i, \\ \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n m_k v_{ky} = \sum_{k=1}^n F_{ky}^i, \\ \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n m_k v_{kz} = \sum_{k=1}^n F_{kz}^i. \end{cases} \quad (91)$$

Iš čia išplaukia išvada, kad *mechaninės sistemos judesio kiekio projekcijos į bet kurią ašį išvestinė lygi visų išorinių jėgų, kurios veikia šią sistemą, projekcijų į tą pačią ašį sumai*. Tai materialijų taškų mechaninės sistemos judesio kiekio teoremos koordinatinė forma.

Išvados:

1. Jeigu visų išorinių jėgų suminis vektorius lygus nuliui, t. y. $\vec{R}^i = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i = 0$, tai iš (90) lygties išplaukia, kad mechaninės sistemos judesio kiekis bus pastovus didis, t. y. $\vec{K} = \text{const}$.
2. Jeigu visų išorinių jėgų projekcijų suma į bet kurią ašį lygi nuliui, pavyzdžiui, $\sum_{k=1}^n F_{kx}^i = 0$, tai iš (91) lygties išplaukia, kad mechaninės sistemos judesio kiekio projekcija į tą pačią ašį bus pastovus dydis, t. y. $K_x = \sum_{k=1}^n m_k v_{kx} = \text{const}$.

Pertvarkysime mechaninės sistemos judesio kiekio teoremą. Iš (90) lygties galime užrašyti:

$$d\vec{K} = \vec{R}^i dt,$$

arba

$$d\vec{K} = d\vec{S}^i. \quad (92)$$

Taigi *mechaninės sistemos judesio kiekio diferencialas lygus veikiančių sistemą išorinių jėgų elementariam impulsui*.

Integruodami (92) lygtį gausime *mechaninės sistemos impulso teoremą išplėstinės formos*:

$$\vec{K} - \vec{K}_0 = \vec{S}^i, \quad (93)$$

t. y. *mechaninės sistemos judesio kiekio pokytis per tam tikrą laikotarpį lygus visų išorinių jėgų impulsui per tą patį laikotarpį*.

Projektuodami (93) lygtį į Dekarto koordinačių ašis, gausime *impulsų teoremos koordinatinę formą*:

$$\begin{cases} K_x - K_{0x} = S_x^i, \\ K_y - K_{0y} = S_y^i, \\ K_z - K_{0z} = S_z^i, \end{cases} \quad (94)$$

arba *mechaninės sistemos judesio kiekio pokyčio projekcijos į koordinatinių ašis per tam tikrą laikotarpį lygios visų išorinių jėgų impulso projekcijoms į tas pačias koordinatinių ašis.*

Judesio kiekio pokyčio teorema taikoma tais atvejais, kai nagrinėjami uždaviniai apie greičių pasikeitimus per tam tikrą žinomą laikotarpį.

2.3.2. Kinetinio momento teorema

Pagal (25) formulę turime materialiojo taško kinetinio momento, arba taško judesio kiekio momento centro O atžvilgiu, išraišką $\vec{l}_O = \vec{M}_O(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v}$.

Diferencijuodami šią lygtį laiko t atžvilgiu, turėsime:

$$\frac{d\vec{l}_O}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} =$$

$$\vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F}.$$

Kaip žinome iš vektorinės algebros, vienos krypties vektorių vektorinė sandauga lygi nuliui, t. y. $\vec{v} \times m\vec{v} = 0$. Iš statikos žinome, kad vektorinė sandauga $\vec{r} \times \vec{F}$ lygi jėgos \vec{F} vektoriniam momentui centro O atžvilgiu, t. y. $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_O(\vec{F})$. Todėl gauname:

$$\frac{d\vec{l}_O}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}),$$

arba

$$\frac{d}{dt} \vec{M}_O(m\vec{v}) = \vec{M}_O(\vec{F}). \quad (95)$$

Turime *kinetinio momento teoremos* vektorinę formą, arba *materialiojo taško kinetinio momento bet kurio centro atžvilgiu išvestinė lygi veikiančiosios jėgos vektoriniam momentui to paties centro atžvilgiu.*

Projektuodami (95) lygtį į koordinatinių ašis, turėsime:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} M_x(m\vec{v}) = M_x(\vec{F}), \\ \frac{d}{dt} M_y(m\vec{v}) = M_y(\vec{F}), \\ \frac{d}{dt} M_z(m\vec{v}) = M_z(\vec{F}). \end{cases} \quad (96)$$

Šios lygtys išreiškia materialiojo taško *kinetinio momento teoremą* koordinačių forma, t. y. *materialiojo taško kinetinio momento bet kurios ašies atžvilgiu išvestinė lygi veikiančiosios jėgos momentui tos pačios ašies atžvilgiu.*

Teoremos išvados:

1. Jeigu veikiančiosios jėgos momentas bet kurios ašies atžvilgiu lygus nuliui, pavyzdžiui, $M_z(\vec{F})=0$, tai iš (96) formulės gauname, kad taško kinetinis momentas tos pačios ašies atžvilgiu bus pastovus, t. y. $M_z(m\vec{v})=\text{const}$.
2. Jeigu jėgos \vec{F} veikimo linija, judant materialiajam taškui, visą laiką eina per tą patį erdvės nejudantį tašką O , tai tokia jėga vadinama centrine, o taškas O – jėgos centru. Šiuo atveju jėgos momentas centro O atžvilgiu lygus nuliui, t. y. $\vec{M}_O(\vec{F})=0$. Tuomet iš (95) lygties išplaukia, kad materialiojo taško kinetinis momentas \vec{l}_O centro O atžvilgiu bus pastovus, t. y. $\vec{l}_O = \vec{M}_O(m\vec{v}) = \text{const}$. Galime padaryti išvadą, kad, veikiant centrinei jėgai, judantis materialusis taškas visada brėš plokščią trajektoriją, nes jos plokštuma eina per veikiančiosios jėgos centrą statmenai pastoviam kinetinio momento vektoriui \vec{l}_O .

Nagrinėdami materialiujų taškų mechaninę sistemą pagal (95) formulę užrašysime vienam sistemos taškui kinetinio momento teoremos išraišką, įvertindami tai, kad tašką, kurio masė m_k , veikia išorinių bei vidinių jėgų atstojamosios jėgos, taip pat tai, kad taškas juda greičiu \vec{v}_k . Turėsime:

$$\frac{d}{dt} \vec{M}_O(m_k \vec{v}_k) = \vec{M}_O(\vec{F}_k^i) + \vec{M}_O(\vec{F}_k^v).$$

Tokias išraiškas užrašysime visiems mechaninės sistemos n taškams ir jas sudėsime. Gausime:

$$\sum_{k=1}^n \frac{d}{dt} \vec{M}_O(m_k \vec{v}_k) = \sum_{k=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_k^i) + \sum_{k=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_k^v).$$

Šios lygties dešiniojoje pusėje turime išorinių jėgų suminį momentą centro O atžvilgiu $\vec{M}_O^i = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_k^i)$ ir vidinių jėgų suminį momentą to paties centro O atžvilgiu $\vec{M}_O^v = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_k^v)$, kuris pagal vidinių jėgų savybes (34) yra lygus nuliui.

Pertvarkę minėtąją lygtį gausime:

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n \vec{M}_O(m_k \vec{v}_k) = \vec{M}_O^i.$$

Mechaninės sistemos materialijų taškų kinetinių momentų centro O atžvilgiu geometrinė suma pagal (26) lygi sistemos kinetiniam momentui, t. y. $\vec{L}_O = \sum_{k=1}^n \vec{l}_O = \sum \vec{M}_O(m_k \vec{v}_k)$. Todėl galutinę *sistemos kinetinio momento* teoremos išraišką galime užrašyti taip:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^i, \quad (97)$$

arba *materialijų taškų mechaninės sistemos kinetinio momento bet kurio centro O atžvilgiu išvestinė lygi veikiančių išorinių jėgų suminiam momentui to paties centro atžvilgiu.*

Projektuodami (97) lygtį į Dekarto koordinačių ašis, nesunkiai gauname:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n M_x(m_k \vec{v}_k) = \sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k^i), \\ \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n M_y(m_k \vec{v}_k) = \sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k^i), \\ \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n M_z(m_k \vec{v}_k) = \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k^i). \end{cases} \quad (98)$$

Turime sistemos kinetinio momento teoremą projekcijų pavidalu, t. y. *materialijų taškų mechaninės sistemos kinetinio momento projekcijos į bet kurią ašį išvestinė lygi veikiančių išorinių jėgų momentų sumai tos pačios ašies atžvilgiu.*

Sistemos kinetinio momento teoremos išvados:

1. Tarkime, kad veikiančių išorinių jėgų suminis momentas bet kurio O centro atžvilgiu lygus nuliui, t. y. $\vec{M}_O^i = 0$. Tuomet iš (97) lygties išplaukia, kad sistemos kinetinis momentas \vec{L}_O to paties centro O atžvilgiu bus pastovus, t. y. $\vec{L}_O = \sum_{k=1}^n \vec{M}_O(m_k \vec{v}_k) = \text{const.}$
2. Jeigu veikiančių išorinių jėgų momentų suma bet kurios ašies atžvilgiu lygi nuliui, pavyzdžiui, $\sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k^i) = 0$, tai iš (98) formulės gauname, kad sistemos kinetinis momentas tos pačios ašies atžvilgiu bus pastovus, t. y. $\sum_{k=1}^n M_z(m_k \vec{v}_k) = \text{const.}$

Šie kinetinio momento pastovumo atvejai atsiranda ir tuo atveju, kai iš viso nėra išorinių jėgų. Šiuo atveju sistemos kinetinis momentas nejudamo centro arba nejudamosios ašies atžvilgiu lieka nekintamas.

Kartais patogiau remtis kita kinetinio momento teoremos išraiška. Iš (97) formulės galime užrašyti:

$$d\vec{L}_O = \vec{M}_O^i dt,$$

arba integruodami turėsime:

$$\vec{L} - \vec{L}_0 = \int_{t_0=0}^t \vec{M}_O^i dt, \quad (99)$$

t. y. kinetinio momento pokytis per tam tikrą laiką lygus išorinių jėgų momentų impulsų sumai per tą patį laiką.

Projektuodami (99) į koordinačių ašis, po matematinių pertvarkymų nesunkiai gausime skaliarines lygybes:

$$\begin{cases} L_x - L_{0x} = \int_{t_0=0}^t \sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k^i), \\ L_y - L_{0y} = \int_{t_0=0}^t \sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k^i), \\ L_z - L_{0z} = \int_{t_0=0}^t \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k^i), \end{cases} \quad (100)$$

arba *mechaninės sistemos kinetinio momento bet kurios ašies atžvilgiu pokytis kuriuo nors laikotarpiu lygus ją veikiančių išorinių jėgų momentų impulsų tuo pačiu laikotarpiu tos pačios ašies atžvilgiu sumai.*

Kinetinio momento teorema dažniausiai taikoma tais atvejais, kai taško arba kūno judėjimas vyksta dėl centrinės jėgos poveikio.

2.3.3. Kinetinės energijos teorema

Ši teorema nustato santykį tarp judančio materialiojo taško kinetinės energijos ir veikiančios tašką jėgos atliktojo darbo.

Tarkime, materialiajam taškui, kurio masė m , judančiam dėl jėgos \vec{F} poveikio pagreičiu \vec{a} , užrašysime pagrindinį dinamikos dėsnį $m\vec{a} = \vec{F}$, kurį pertvarkę gausime $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$.

Padauginsime abi šios lygties puses iš $d\vec{r}$. Turėsime:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Pertvarkę lygtį nesunkiai gausime:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dA, \quad (101)$$

nes pagal (39) formulę jėgos \vec{F} ir elementaraus poslinkio $d\vec{r}$ sandauga yra šios jėgos elementarusis darbas, o santykis $\frac{d\vec{r}}{dt}$ yra judančio taško greitis \vec{v} , kuris ir yra su diferencialo ženklu. Gavome materialiojo taško *kinetinės energijos teoremą* diferencialine forma, t. y.

materialiojo taško kinetinės energijos diferencialas lygus veikiančiosios jėgos elementariajam darbui.

Integravę gautą lygtį gausime *kinetinės energijos pokyčio teoremą* išplėstine forma:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A, \quad (102)$$

arba materialiojo taško kinetinės energijos pokytis kelio ruože lygus veikiančiosios jėgos atliktam darbui tame pačiame kelio ruože.

Tuo atveju, kai nagrinėjame materialijų taškų mechaninę sistemą, kinetinės energijos teoremai taikyti pasirenkame bet kurį vieną sistemos materialųjį tašką, kuriam ir užrašysime pagrindinį dinamikos dėsnį:

$$m_k \vec{a}_k = \vec{F}_k^i + \vec{F}_k^v;$$

čia m_k – konkretaus taško masė; \vec{a}_k – šio taško pagreitis; \vec{F}_k^i – išorinių jėgų, veikiančių šį tašką, atstojamoji jėga; \vec{F}_k^v – vidinių jėgų, veikiančių šį tašką, atstojamoji jėga.

Padauginsime abi šios lygties puses iš $d\vec{r}_k$. Po nedidelių matematinių lygties pertvarkymų, nesunkiai gausime:

$$d\left(\frac{m_k v_k^2}{2}\right) = \vec{F}_k^i \cdot d\vec{r}_k + \vec{F}_k^v \cdot d\vec{r}_k,$$

arba vienam mechaninės sistemos materialiajam taškui turime kinetinės energijos teoremos diferencialinę išraišką, pagal kurią *sistemos materialiojo taško diferencialas lygus veikiančių šį tašką jėgų, tiek išorinių, tiek vidinių, elementariajam darbui.*

Jeigu tokias išraiškas užrašytume visiems mechaninės sistemos n taškams ir jas sudėtume, tai, įvertinę materialijų taškų greičių keitimosi ribas nagrinėjamuose kelio ruožuose, po nesudėtingų matematinių pertvarkymų gautume:

$$\sum_{k=1}^n \frac{m_k v_k^2}{2} - \sum_{k=1}^n \frac{m_k v_{k0}^2}{2} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i \cdot d\vec{r}_k + \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^v \cdot d\vec{r}_k,$$

arba

$$T - T_0 = A^i + A^v; \quad (103)$$

čia T – mechaninės sistemos kinetinė energija, kai sistemos taškai pereina į kitą padėtį; T_0 – mechaninės sistemos kinetinė energija pradinio laiko momentu; A^i – visų išorinių jėgų, veikiančių šią sistemą, atliktų darbų suma; A^v – visų vidinių jėgų, veikiančių šią sistemą, atliktų darbų suma.

Taigi turime mechaninės sistemos kinetinės energijos pokyčio teoremą išplėstine forma, t. y. materialijų taškų mechaninės sistemos kinetinės energijos pokytis lygus visų išorinių bei vidinių jėgų darbų sumai visuose sistemos taškų nueitų kelių ruožuose.

Iš teoremos išplaukia išvada, kad, taikant mechaninei sistemai kinetinės energijos pokyčio teoremą, reikia įvertinti ne tik tai išorinių, bet ir sistemos vidinių jėgų atliktą darbą visuose sistemos materialijų taškų nueitų kelių ruožuose.

Nagrinėjant standžiojo kūno dinamiką, įvertinę tai, kad kūno vidinių jėgų darbų suma lygi nuliui, turėsime kinetinės energijos teoremą tokio pavidalo:

$$T - T_0 = A^i. \quad (104)$$

Kinetinės energijos teorema taikoma tais atvejais, kai nagrinėjami uždaviniai apie greičių pokyčius žinomame kelio ruože.

2.3.4. Mechaninės energijos tvermės dėsnis

Mechaninės energijos tvermės dėsnis materialiajam taškui

Remdamiesi (102) formule užrašysime kinetinės energijos pokyčio teoremos išraišką materialiajam taškui:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A,$$

t. y. materialiojo taško kinetinės energijos pokytis kelio ruože lygus veikiančiosios jėgos atliktam darbui.

Tuo atveju, kai materialusis taškas juda kelio ruože, esančiame potenciniame jėgų lauke, pagal (62) formulę turime, kad pilnutinis jėgos darbas yra lygus jėgų funkcijos skirtumui atskiruose taškuose ir nepriklauso nuo taško judėjimo trajektorijos. Taigi galime užrašyti:

$$A = U - U_0.$$

Įvertinę tai, kad pagal (62) bet kuriame jėgų lauko taške potencinė energija lygi jėgų lauko reikšmei tame pat taške su priešingu ženklu, arba potencinės jėgos darbui su priešingu ženklu, t. y. $V = -U$, gauname tokią jėgos darbo išraišką:

$$A = V_0 - V.$$

Tuomet kinetinės energijos teoremą galime užrašyti taip:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = V_0 - V,$$

atlikę nedidelius pertvarkymus, turėsime:

$$\frac{mv^2}{2} + V = \frac{mv_0^2}{2} + V_0. \quad (105)$$

Laikydami judančio materialiojo taško kinetinės energijos ir potencinės energijos sumą materialiojo taško pilnutine mechanine energija, galime padaryti išvadą, kad, taškui judant potenciniame jėgų lauke, materialiojo taško pilnutinė mechaninė energija yra pastovus dydis.

Mechaninės energijos tvermės dėsnis materialiujų taškų mechaninei sistemai

Kinetinės energijos pokyčio teorema materialiujų taškų mechaninei sistemai pagal (103) formulę turi išraišką:

$$T - T_0 = A_k^i + A_k^v = \sum A_k,$$

t. y. materialiujų taškų mechaninės sistemos kinetinės energijos pokytis kelio ruože lygus veikiančių išorinių bei vidinių jėgų atliktam darbui.

Tuo atveju, kai mechaninė sistema juda potenciniame jėgų lauke, galime užrašyti, kad pilnutinis veikiančių išorinių bei vidinių jėgų atliktas darbas yra lygus sistemos potencinės energijos pokyčiui, t. y.

$$\sum A_k = V_0 - V.$$

Tuomet kinetinės energijos teoremos išraišką galime perrašyti taip:

$$T - T_0 = V_0 - V,$$

po nedidelių pertvarkymų, turėsime:

$$T + V = T_0 + V_0. \quad (106)$$

Galime padaryti išvadą, kad materialiujų taškų mechaninei sistemai judant potenciniame išorinių bei vidinių jėgų lauke, sistemos pilnutinė mechaninė energija yra pastovus dydis.

2.4. Masės centro judėjimo teorema

Tarkime, turime materialiujų taškų mechaninę sistemą. Tegul šią taškų sistemą veikia žinoma išorinių jėgų sistema. Dėl šių jėgų poveikio mechaninės sistemos taškai turės judesio kiekius, kurių geometrinė suma pagal (23) formulę yra mechaninės sistemos judesio kiekis, t. y. $\sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_k = \vec{K}$. Taip pat žinome, kad mechaninės sistemos masės ir masės centro greičio sandauga (24) yra lygi sistemos judesio kiekiui, t. y. $M \cdot \vec{v}_C = \vec{K}$. Diferencijuodami šią lygtį laiko t atžvilgiu, turėsime:

$$M \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \frac{d\vec{K}}{dt}.$$

Įvertinę tai, kad pagal sistemos judesio kiekio teoremą (90) *sistemos judesio kiekio laiko t atžvilgiu išvestinė lygi visų išorinių jėgų, kurios veikia šią mechaninę sistemą, suminiam vektoriui*, t. y. $\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^i$, o masės centro greičio išvestinė lygi jo pagreičiui, gauname:

$$M\vec{a}_C = \sum \vec{F}_i^i. \quad (107)$$

Turime materialiojo taško (sistemos masės centro) pagrindinį dinamikos dėsnį. Galime padaryti išvadą, kad *mechaninės sistemos masės centras juda kaip materialusis taškas, turintis šios sistemos masę, prie kurio pridėtos visos mechaninę sistemą veikiančios išorinės jėgos*. Taigi turime materialiujų taškų *masės centro judėjimo teoremą*.

Projektuodami (107) išraišką į Dekarto koordinatinių ašis, turėsime:

$$\begin{cases} M \frac{d^2 x_C}{dt^2} = \sum_{i=1}^n F_{ix}^i, \\ M \frac{d^2 y_C}{dt^2} = \sum_{i=1}^n F_{iy}^i, \\ M \frac{d^2 z_C}{dt^2} = \sum_{i=1}^n F_{iz}^i. \end{cases} \quad (108)$$

Teoremos išvados:

1. Jeigu išorinių jėgų suminis vektorius lygus nuliui, t. y. $\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^i = 0$, tai iš (107)

formulės darome išvadą, kad sistemos masės centro pagreitis $\vec{a}_C = \frac{d\vec{v}_C}{dt} = 0$. Taigi šiuo atveju masės centro greitis \vec{v}_C yra pastovus pagal dydį ir kryptį, o tai reiškia, kad sistemos masės centras judės tiesiaiegiai ir tolygiai arba iš viso nejudės. Jeigu pradiniu laiko momentu masės centras nejudėjo, tai jis liks rimties būsenos iki tol, kol išorinių jėgų suminis vektorius bus lygus nuliui.

2. Jeigu išorinių jėgų projekcijų suma į bet kurią ašį, pavyzdžiui, į ašį Ox , bus lygi nuliui $\sum_{i=1}^n F_{ix}^i = 0$, tai iš (108) formulės galime padaryti išvadą, kad sistemos masės centro

pagreičio projekcija į šią ašį bus lygi nuliui, t. y. $a_{Cx} = \frac{dv_{Cx}}{dt} = 0$. Šiuo atveju gauname,

kad masės centro greičio projekcija į šią ašį yra pastovus dydis, arba $v_{Cx} = \frac{dx_C}{dt} = \text{const.}$

Jeigu pradiniu laiko momentu ir masės centro greičio projekcija lygi nuliui ($v_{Cx} = 0$), tai

gausime, kad $x_C = \text{const}$, t. y. sistemai judant jos masės centro koordinatė nekinta. Ši išvada vadinama *masės centro judėjimo pastovumo dėsnio*.

3. Mechaninės sistemos vidinės jėgos neturi įtakos sistemos masės centro judėjimui, nes jų nėra masės centro judėjimo teoremos išraiškoje. Todėl vidinių jėgų veikimu negalime pakeisti sistemos masės centro judėjimo pobūdžio arba išjudinti jį iš rimties būsenos. Tačiau vidinės jėgos gali sukelti nelaisvosios mechaninės sistemos dalių judėjimą kitos sistemos atžvilgiu. Šiuo atveju atsiras naujos išorinės ryšių reakcijos, dėl kurių įtakos pasikeis nagrinėjamos mechaninės sistemos masės centro judėjimas.

2.5. Standžiojo kūno dinamika

Teorinės mechanikos kinematikos dalyje buvo pažymėta, kad standžiojo kūno kinematikos uždavinius patogiau nagrinėti priklausomai nuo kūno judėjimo pobūdžio. Taip pat buvo pateikta standžiojo kūno judėjimų klasifikacija, pagal kurią prie paprastų kūno judėjimų buvo priskirti slenkamasis judėjimas, sukimasis apie nejudamąją ašį ir plokštuminis kūno judėjimai. Be šių kūno judėjimų, yra ir sudėtingų judėjimų, tai *sferinis* ir *kūno judėjimas bendruoju atveju*.

Standžiojo kūno dinamikos uždaviniai taip pat sprendžiami atsižvelgiant į kūno judėjimo pobūdį.

2.5.1. Standžiojo kūno slenkamojo judėjimo dinamika

Vykstant kūno slenkamajam judėjimui visi kūno taškai tuo pačiu laiko momentu juda vienodu greičiu ir pagreičiu, o jų trajektorijos yra vienodos ir lygiagrečios. Todėl, sprendžiant kūno slenkamojo judėjimo kinematikos uždavinius, pakanka nagrinėti bet kurį vieną kūno tašką. Patogiausias ir nagrinėjimui dažniausiai parenkamas taškas yra kūno masės centras. Šio taško dinamikos uždaviniams nagrinėti yra taikoma masės centro judėjimo teorema, pagal kurią masės centras juda kaip taškas, kuriame sukonzentruota visa kūno masė ir prie kurio pridėtos visos veikiančiosios išorinės jėgos.

Pagal (108) standžiojo kūno masės centro judėjimo teorema turi tokį pavidalą:

$$\begin{cases} M \frac{d^2 x_C}{dt^2} = \sum_{i=1}^n F_{ix}^i, \\ M \frac{d^2 y_C}{dt^2} = \sum_{i=1}^n F_{iy}^i, \\ M \frac{d^2 z_C}{dt^2} = \sum_{i=1}^n F_{iz}^i. \end{cases}$$

Matyti, kad taikydami šią teoremą galime pagal žinomą masės centro judėjimą rasti veikiančiąją išorinę jėgą, kuri priverčia masės M kūną judėti pagal minėtuosius dėsnis, t. y. spręsti pirmąjį dinamikos uždavinį. Be to, jeigu žinosime, kokios yra veikiančiosios išorinės jėgos, tai po nurodytų lygčių dviejų integravimų galime gauti šio kūno masės centro judėjimo

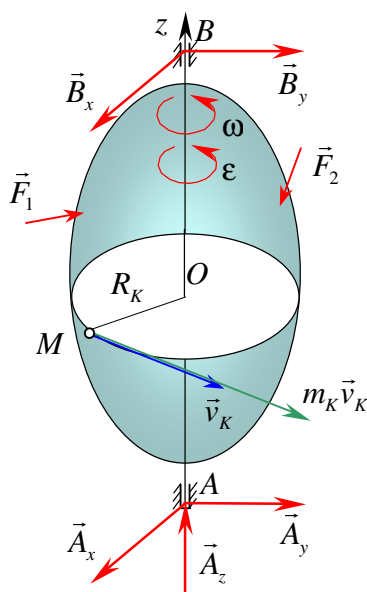
lygtis, pagal kurias judės kūno masės centras ir kartu visas kūnas, t. y. spręsimė antrąjį dinamikos uždavinį.

Darome išvadą, kad masės centro judėjimo teorema aprašo standžiojo kūno dinamikos uždavinių sprendimą esant slenkamajam judėjimui.

2.5.2. Standžiojo kūno sukamojo judėjimo apie nejudamąją ašį dinamika

Išvesime standžiojo kūno sukamojo judėjimo apie nejudamąją ašį diferencialines judėjimo lygtis, kurias taikant galima spręsti pirmąjį ir antrąjį dinamikos uždavinius.

Tarkime, M masės kūnas dėl išorinių jėgų poveikio juda apie nejudamąją ašį Oz kampiniu greičiu ω ir kampiniu pagreičiu ε (39 pav.).



39 pav. Standžiojo kūno sukimasis apie nejudamąją ašį

Žinome, kad vykstant sukamajam standžiojo kūno judėjimui kinetinis momentas sukimosi ašies atžvilgiu pagal (28) formulę yra lygus kūno inercijos momento ašies atžvilgiu ir kūno kampinio greičio sandaugai, t. y. $L_z = I_z \cdot \omega$. Taikome šiam kūnui mechaninės sistemos kinetinio momento teoremą ašies atžvilgiu, pagal kurią $\frac{dL_z}{dt} = M_z^i$, arba $\frac{d}{dt}(I_z \cdot \omega) = M_z^i$. Atlikę nesudėtingus matematinius pertvarkymus, turėsime:

$$I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_z^i. \quad (109)$$

Gavome standžiojo kūno sukamojo judėjimo apie nejudamąją ašį diferencialinę lygtį. Taikydami šią lygtį galime spręsti tiek pirmąjį, tiek antrąjį dinamikos uždavinius, t. y., remdamiesi kūno sukamojo judėjimo dėsniumi, galime rasti veikiančiųjų išorinių jėgų sukamąjį momentą arba, įvertinę judėjimo pradines sąlygas, pagal žinomą išorinių jėgų momentą galime rasti nagrinėjamojo kūno judėjimo dėsnį.

Diferencialinę judėjimo lygtį (109) galime pateikti ir tokiu pavidalu:

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z^{(ii)}, \text{ arba } I_z \varepsilon = M_z^i.$$

Iš čia išplaukia išvados:

1. Jeigu $M_z^i = 0$, tai $\omega = \text{const}$, t. y. jeigu veikiančiųjų išorinių jėgų momentas sukimosi ašies atžvilgiu lygus nuliui, tai kūno sukimasis bus tolydinis.
2. Jeigu $M_z^i = \text{const}$, tai ir $\varepsilon = \text{const}$, t. y. jeigu veikiančiųjų išorinių jėgų momentas sukimosi ašies atžvilgiu yra pastovus, tai kūno sukimasis yra tolygiai kintantis.
3. Esant tam tikram veikiančiųjų išorinių jėgų momentui, kuo didesnis kūno inercijos momentas, tuo mažesnis kūno kampinis pagreitis ir atvirkščiai. Darome išvadą, kad kūno inercijos momentas vykstant sukamajam judėjimui turi tokią pat įtaką, kaip ir kūno masė vykstant kūno slenkamajam judėjimui, kitaip tariant, kūno inercijos momentas yra kūno inertiškumo matas esant sukamajam judėjimui.

2.5.3. Standžiojo kūno plokštuminio judėjimo dinamika

Iš kinematikos žinome, kad standžiojo kūno plokštuminį judėjimą galime išskaidyti į du paprastus judėjimus, t. y. į slenkamąjį kartu su laisvai pasirinktu poliumi ir sukamąjį apie šį polių.

Nagrinėdami plokštuminio kūno judėjimo dinamikos uždavinius, galime šiuos uždavinius spręsti kaip ir paprastų kūno judėjimų uždavinius.

Esant slenkamajam judėjimui plokštumoje taikome masės centro judėjimo teoremos išraišką (108):

$$\begin{cases} M \frac{d^2 x_C}{dt^2} = \sum_{i=1}^n F_{ix}^i, \\ M \frac{d^2 y_C}{dt^2} = \sum_{i=1}^n F_{iy}^i, \end{cases}$$

pagal kurią poliumi yra laikomas kūno masės centras C . Esant sukamajam kūno judėjimui taikome kūno sukamojo judėjimo diferencialinę lygtį (109):

$$I_z \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = M_z^i,$$

pagal kurią kūno inercijos momentas skaičiuojamas apie ašį, kuri eina per pasirinktąjį polių, t. y. per kūno masės centrą C .

Taigi galutiniu pavidalu plokštuminio kūno judėjimo dinamikos uždaviniai gali būti sprendžiami taikant anksčiau minėtas diferencialines lygtis:

$$\begin{cases} M \frac{d^2 x_C}{dt^2} = \sum_{i=1}^n F_{ix}^i, \\ M \frac{d^2 y_C}{dt^2} = \sum_{i=1}^n F_{iy}^i, \\ I_{z_C} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \sum_{i=1}^n M_z(F_i^i). \end{cases} \quad (110)$$

Žinodami, kaip juda kūnas arba plokščia figūra, t. y. žinodami judėjimo funkcijas:

$$\begin{cases} x_C = f_1(t), \\ y_C = f_2(t), \\ \varphi = f_3(t), \end{cases}$$

galime rasti šį kūną veikiančias jėgas, kitaip tariant, išspręsti pirmąjį dinamikos uždavinį.

Įvertinę kūno arba figūros plokštuminio judėjimo pradines sąlygas, t. y. padėtį ir greičius pradiniu laiko momentu, pagal žinomas veikiančiąsias jėgas, integravę judėjimo diferencialines lygis (110), galime rasti šio kūno judėjimo greičius ir judėjimo dėsnius, kitaip sakant, išspręsti antrąjį dinamikos uždavinį.

3. SUVARŽYTOS MECHANINĖS SISTEMOS DINAMIKA

3.1. Bendrosios sąvokos

3.1.1. Suvaržyta mechaninė sistema

Nagrinėjant materialijų taškų sistemą kiekvienam sistemos taškui buvo sudarytos trys skaliarinės diferencialinės judėjimo lygtys. Sistemai, sudarytai iš N materialijų taškų, tokių lygčių galima užrašyti $3N$. Atskirus sistemos taškus veikiančios jėgos gali priklausyti nuo kitų taškų judėjimo ir padėties. Todėl į atskiriems taškams užrašytų diferencialinių lygčių dešiniąsias puses bus įtrauktas laikas, visų kitų taškų koordinatės bei greičiai. Taigi turėsime iš $3N$ sudarytą tarpusavyje susijusių diferencialinių lygčių sistemą. Toks uždavinys neturi tikslaus bendrojo sprendinio net vienam materialiajam taškui. Uždavinys yra ypač sudėtingas dviejų taškų, kuriuos veikia tik visuotinės traukos jėgos, atveju, o esant trijų taškų sistemai (*trijų kūnų uždavinys*) jis iš viso neišsprendžiamas.

Šie skaičiavimo sunkumai yra susiję su tuo, kad neįvertinami sistemos suvaržymai. Realios sistemos turi baigtinį laisvės laipsnį. Kaip pamatysime vėliau, sistemos judesį aprašančių nepriklausomųjų diferencialinių lygčių skaičius gali būti toks, koks yra sistemos laisvės laipsnis. Dauguma mechanizmų ir mašinų turi tik vieną laisvės laipsnį.

Suvaržytos mechaninės sistemos dinamikos pagrindus prancūzų matematikas Lagranžas 1788 m. išdėstė savo traktate *Analizinė mechanika*.

Toliau bus nagrinėjami bendrieji mechanikos principai, kurie įvertina sistemos suvaržymus. Nagrinėjimą pradėsime nuo sistemą varžančių ryšių analizės.

3.1.2. Ryšiai

Ryšių sąvoka aptariama statikoje, nagrinėjant suvaržytų kūnų pusiausvyrą, ir kinematikoje, aptariant kūnų sistemos struktūrą. Apibendrinant galima pasakyti, kad ryšiais vadinamos bet kokios iš anksto pateiktos sąlygos, kurias turi atitikti sistemos taškų koordinatės, greičiai ir pagreičiai. Lygtys, išreiškiančios išvardytus apribojimus, vadinamos ryšių lygtimis.

Ryšių pobūdis lemia ne tik sistemos judėjimą, bet ir metodą, pasirenkamą judėjimui tirti. Todėl ryšius svarbu tinkamai suklasifikuoti. Pirmiausia juos suskirstysime į dvi klases: *holonominius* ir *neholonominius*.

Holonominiais vadinami ryšiai, kuriuos galima matematiškai išreikšti paprastosiomis sistemos taškų koordinatėmis siejančiomis algebrinėmis lygtimis, arba koordinačių atžvilgiu integruojamomis diferencialinėmis lygtimis. Šiais ryšiais nustatoma taškų tarpusavio padėtis ir kartu visos sistemos geometrija, todėl dažnai holonominiai ryšiai vadinami *geometriniais*.

Neholonominiai ryšiai išreiškiami neintegruojamomis diferencialinėmis lygtimis, į kurias įeina ne tik taškų koordinatės, bet ir taškų koordinačių išvestinės laiko atžvilgiu. Neholonominiais ryšiais suvaržomos ne tik taškų koordinatės, bet ir jų greičiai bei pagreičiai, t. y. sistema erdvėje ne tik turi užimti nustatytą padėtį, bet ir jos taškai turi judėti iš anksto nustatytais greičiais ir pagreičiais. Todėl neholonominiai ryšiai dažnai vadinami *kinematiniais*.

Ryšių veikiamą sistemą yra suvaržyta ir turi baigtinį laisvės laipsnį. Sistemą varžantys ryšiai yra kryptingo pobūdžio – ryšiais valdomas sistemos judėjimas, nustatomas reikiamas judėjimo režimas. Praktikoje ryšiai realizuojami atitinkamomis techninėmis priemonėmis.

Holonominiai ryšiai išreiškiami tokio pavidalo lygtimis ar atviromis nelygybėmis:

$$f(x_i, y_i, z_i, t) = 0, \quad (111)$$

$$f(x_i, y_i, z_i, t) \geq 0 \quad (112)$$

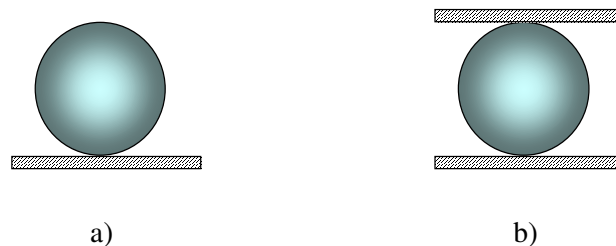
arba

$$f(x_i, y_i, z_i) = 0, \quad (113)$$

$$f(x_i, y_i, z_i) \geq 0. \quad (114)$$

Ryšiai, išreikšti lygtimis, į kurias įeina laikas t , vadinami *kintamais*, arba *nestacionariais*, pavyzdžiui, (111) ir (112) formulės. (113) ir (114) lygtimis išreikšti ryšiai yra *pastovūs*, arba *stacionarūs*.

Atviromis nelygybėmis (112) ir (114) išreikšti ryšiai vadinami *vienpusiais*. Simboliškai tokį ryšį galima pavaizduoti kaip viena plokštuma varžomą judėjimą (40 pav., a):



40 pav. Ryšiai: a – vienpusiai; b – dvipusiai

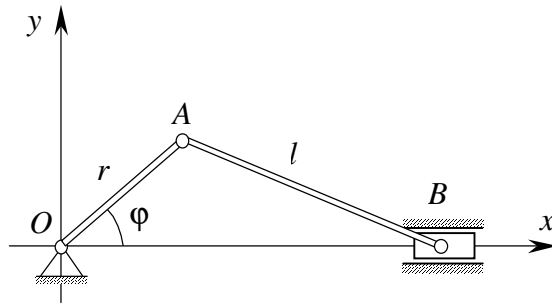
Lygtimis (111) ir (113) išreikšti ryšiai vadinami *dvipusiais*. Simboliškai tokį ryšį galima pavaizduoti kaip dviejų plokštumų varžomą judėjimą (40 pav., b).

Pirmosios eilės neholonominiai ryšiai išreiškiami tokio pavidalo lygtimis:

$$\varphi(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t) = 0. \quad (115)$$

Kaip buvo pabrėžta anksčiau, neholonominio ryšio lygties negalime suintegruoti ir gauti holonominio ryšio lygtį $f(x_i, y_i, z_i, t) = \text{const}$.

Toliau nagrinėsime sistemas su stacionariais holonominiais ryšiais. Kaip pavyzdį panagrinėsime skriejiko-švaistiklio mechanizmą (41 pav.).



41 pav. Skriejiko-švaistiklio mechanizmas

Šiam mechanizmui galima užrašyti tris ryšių lygtis:

$$\begin{aligned} x_A^2 + y_A^2 &= r^2, \\ (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A) &= l^2, \\ y_B &= 0. \end{aligned} \quad (116)$$

Suvaržytos mechaninės sistemos dinamikos analizei taikoma statikos ryšių aksioma, pagal kurią ryšių įtaka sistemos padėčiai ir judėjimui pasireiškia ryšių reakcijų jėgomis.

3.1.3. Apibendrintosios koordinatės

Tarkime, kad sistemą sudaro N materialiujų taškų. Sistemą varžo s ryšių lygčių:

$$f(x_j, y_j, z_j, t) = 0; \quad (117)$$

čia $j = 1, 2, \dots, s$.

Tuomet tik $(3N - s)$ sistemos taškų koordinatės yra nepriklausomos viena nuo kitos; likusios s koordinatės gaunamos iš ryšių lygčių kaip nepriklausomų koordinačių funkcijos. Nepriklausomos koordinatės, kurių skaičius lygus $n = 3N - s$, vadinamos *apibendrintosiomis sistemos koordinatėmis* ir žymimos simboliu q_k ; čia $k = 1, 2, \dots, n$.

Apibendrintosiomis koordinatėmis gali būti tie sistemos parametrai, kuriais patogiau apibrėžti sistemos padėtį ir judėjimą, pavyzdžiui, Dekarto koordinatės, kampai, sektoriniai plotai ir pan.

Sistemos padėties apibrėžimas apibendrintosiomis koordinatėmis atliekamas dviem etapais:

- 1) n nepriklausomų Dekarto koordinačių išreiškiamos n apibendrintosiomis koordinatėmis taikant atitinkamas transformacijoms skirtas formules;
- 2) naudojant ryšių lygtis (117), apibendrintosiomis koordinatėmis išreiškiamos ir likusios s priklausomos Dekarto koordinatės.

Taigi gauname:

$$\begin{cases} x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \\ y_i = y_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \\ z_i = z_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t); \end{cases} \quad (118)$$

čia $i = 1, 2, \dots, N$.

Jei holonominiai sistemos ryšiai yra stacionarūs (nepriklausomi nuo laiko), tai lygtys (117) ir (118) laiko parametro t nebus.

Sistemos su holonominiais stacionariais ryšiais apibendrintųjų koordinačių skaičius yra lygus sistemos *laisvės laipsniui*.

Sistemos taškų padėtį išreiškus padėties vektoriais $\vec{r}_i = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k}$ ir atsižvelgus į funkcijas (118), galima teigti, kad padėties vektoriai taip pat yra apibendrintųjų koordinačių funkcijos:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t); \quad (119)$$

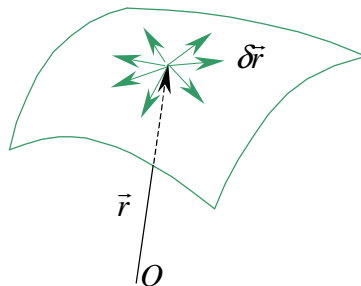
čia $i = 1, 2, \dots, N$.

Norint apskaičiuoti materialiujų taškų sistemos judėjimą, visų pirma reikia rasti apibendrintąsias koordinates, išreikštas laiko funkcijomis, tuomet, taikant formules (118), laiko funkcijomis galima išreikšti visas Dekarto koordinates, t. y. apibrėžti visos sistemos judėjimą.

Apibendrintosioms koordinatėms skaičiuoti sistemos diferencialinės judėjimo lygtys turi būti išreikštos apibendrintosiomis koordinatėmis. Sudarytų lygčių skaičius bus lygus apibendrintųjų koordinačių skaičiui, t. y. sistemos laisvės laipsniui. Tokių diferencialinių lygčių sudarymo taisyklės yra pateiktos toliau.

3.1.4. Virtualieji poslinkiai

Suvaržytų sistemų dinamikos analizėje yra vartojama sąvoka *virtualusis poslinkis*. Tarkime, kad materialusis taškas M turi būti tam tikroje plokštumoje, t. y. turi atitikti holonominį stacionarų ryšį, išreikštą plokštumos lygtimi $f(x, y, z) = 0$ (42 pav.).



42 pav. Virtualieji poslinkiai

Galima įsivaizduoti daugybę elementariųjų poslinkių $\delta\vec{r}$, kurie atitinka konkrečią ryšių lygtį. Šie poslinkiai reiškia padėties vektoriaus \vec{r} elementariusius pokyčius, kuriuos leidžia konkretus suvaržymas.

Taigi virtualiuoju taško poslinkiu vadinamas be galo mažas poslinkis, kurį tam tikru laiko momentu leidžia esantys suvaržymai.

Tikruoju elementariuoju poslinkiu $\delta\vec{r}$ vadinamas padėties vektoriaus pokytis per laikotarpį dt . Tikrasis poslinkis nuo virtualiojo skiriasi tuo, kad virtualusis poslinkis nustatomas esant fiksuotam laiko momentui $\delta t = 0$.

Jeigu tašką varžantis ryšys nepriklauso nuo laiko, tai tikrasis poslinkis $d\vec{r}$ sutampa su vienu iš virtualiųjų poslinkių $\delta\vec{r}$.

Materialiųjų taškų sistemos virtualųjį poslinkį sudaro tų taškų virtualiųjų poslinkių visuma ($\delta\vec{r}_1, \delta\vec{r}_2, \dots, \delta\vec{r}_N$).

Kadangi taškų padėties vektoriai yra sistemos apibendrintųjų koordinačių funkcijos, tai ir sistemos virtualieji poslinkiai gali būti išreikšti apibendrintųjų koordinačių pokyčiais ($\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$).

Žiūrint į taško padėties vektorių $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ kaip į kelių kintamųjų funkciją, virtualiesiems poslinkiams skaičiuoti galima taikyti funkcijos pilnojo diferencialo taisyklę:

$$\delta\vec{r}_i = \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_1} \cdot \delta q_1 + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_2} \cdot \delta q_2 + \dots + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_n} \cdot \delta q_n,$$

arba

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_i} \cdot \delta q_i. \quad (120)$$

Kadangi virtualusis poslinkis nepriklauso nuo laiko, tai į formulę (120) laiko išvestinė neįeina.

3.1.5. Jėgos virtualusis darbas

Sistemos taškui, kurį veikia jėga \vec{F} , suteikus virtualųjį poslinkį $\delta\vec{r}$, galima apskaičiuoti jėgos \vec{F} virtualųjį darbą:

$$\delta A = \vec{F} \cdot \delta\vec{r} = |\vec{F}| |\delta\vec{r}| \cos \alpha, \quad (121)$$

arba pasirinkus koordinatinę formą:

$$\delta A = F_x \cdot \delta x + F_y \cdot \delta y + F_z \cdot \delta z. \quad (122)$$

3.1.6. Idealieji ryšiai

Susipažinus su jėgos virtualiuoju darbu, galima praplėsti ryšių sąvoką. Sistemos tašką veikiančias jėgas galima suskirstyti į aktyviasias \vec{F}_i ir ryšių reakcijas \vec{R}_i . Tuomet tašką veikiančių jėgų atstojamoji jėga \vec{F}_i^* bus:

$$\vec{F}_i^* = \vec{F}_i + \vec{R}_i. \quad (123)$$

Suteikę sistemai virtualųjį poslinkį, apskaičiuosime visos sistemos jėgų virtualųjį darbą:

$$\sum_{i=1}^N \delta A_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^* \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i. \quad (124)$$

Gali būti, kad sistemos ryšiai atitinka tapatybę:

$$\sum_{i=1}^N \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i \equiv 0. \quad (125)$$

Sistemos ryšiai, kai ryšių reakcijų virtualiųjų darbų suma lygi nuliui, vadinami idealiaisiais.

Analizinė mechanika remiasi tik matematinėmis išraiškėmis. Todėl galime teigti, kad formulė (125) atitinka logines sąvokas *trinties jėgų nepaisome*, *ryšių reakcijų jėgų nepaisome* ir pan.

3.1.7. Apibendrintosios jėgos

Sąvoka *apibendrintoji jėga* yra labai svarbi analizinėje mechanikoje. Panagrinėsime iš N materialųjų taškų sudarytą mechaninę sistemą, kurią veikia idealieji holonominiai ryšiai. Tokios sistemos aktyviųjų jėgų virtualusis darbas bus:

$$\sum_{i=1}^N \delta A_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i. \quad (126)$$

Virtualųjį poslinkį $\delta \vec{r}$ išreikškime formule (120):

$$\delta \vec{r} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \delta q_k.$$

Tuomet

$$\sum_{i=1}^N \delta A_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \delta q_k \right).$$

Pakeitę sumavimo eiliškumą, turėsime:

$$\sum_{i=1}^N \delta A_i = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k. \quad (127)$$

Skliaustuose esančią sumą pažymėsime simboliu Q_k , t. y.

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}. \quad (128)$$

Dabar lygybę (127) galime perrašyti taip:

$$\sum_{i=1}^N \delta A_i = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_n \delta q_n. \quad (129)$$

Išraišką (128) galime užrašyti koordinatine forma:

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right). \quad (130)$$

Dydis q_k vadinamas apibendrintąja koordinate, atitinkančia apibendrintąją jėgą Q_k .

Apibendrintosios jėgos Q_k skaičiavimas supaprastėja, jeigu imamas ne bet koks sistemos virtualusis poslinkis, o tik koordinatės q_k poslinkis δq_k , o visos likusios apibendrintosios koordinatės nesikeičia: $\delta q_k \neq 0$, $\delta q_1 = \delta q_2 = \dots = 0$. Jėgų sistemos virtualusis darbas dabar išreiškiamas tik vienu (129) sumos nariu:

$$\left(\sum_{i=1}^N \delta A_i \right)_k = Q_k \delta q_k,$$

iš čia

$$Q_k = \frac{\left(\sum_{i=1}^N \delta A_i \right)_k}{\delta q_k}. \quad (131)$$

Apibendrintoji jėga priklauso nuo apibendrintosios koordinatės pobūdžio. Kai apibendrintoji koordinatė matuojama ilgio vienetais, apibendrintoji jėga atitinka fizinę jėgą ir matuojama niutonais. Kai apibendrintoji koordinatė yra kampas, apibendrintoji jėga yra momentas.

3.2. Bendrieji mechanikos metodai

3.2.1. Virtualiųjų poslinkių principas

Virtualiųjų poslinkių principas bendriausia forma išreiškia bet kurios mechaninės sistemos statinės pusiausvyros sąlygą. Virtualiųjų poslinkių principas formuluojamas taip: mechaninės sistemos su idealiaisiais holonominiais ryšiais pusiausvyrai būtina ir pakankama, kad visų sistemą veikiančių aktyviųjų jėgų virtualiųjų darbų, atliekamų esant bet kuriam tos sistemos virtualiajam poslinkiui, suma būtų lygi nuliui.

Šią sąlygą analiziškai galime išreikšti lygtimi:

$$\sum \delta A_{iF} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r} = 0, \quad (132)$$

arba projekcijomis į koordinatinių ašis:

$$\sum \delta A_{iF} = \sum_{i=1}^n (F_{ix} \delta x_i + F_{iy} \delta y_i + F_{iz} \delta z_i) = 0. \quad (133)$$

Šiems teiginiams įrodyti nagrinėsime iš N materialiųjų taškų sudarytą pusiausvirąją sistemą. Vieną sistemos tašką veikiančių aktyviųjų jėgų atstojamąją pažymėsime \vec{F}_i , o ryšių reakcijų atstojamąją \vec{R}_i . Kadangi sistema yra pusiausviroji, tai $\vec{F}_i + \vec{R}_i = 0$. Padauginę iš taško virtualiojo poslinkio $\delta \vec{r}_i$, gausime:

$$\vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (134)$$

Analogiškas lygtis galime užrašyti visiems sistemos taškams. Susumavę panariui visas lygtis, turėsime:

$$\sum \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \sum \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (135)$$

Sistemai su idealiaisiais ryšiais jau turėjome $\sum_{i=1}^n \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$. Todėl gausime:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (136)$$

Taigi būtinumo sąlyga įrodyta.

Pakankamumui įrodyti pasinaudosime atvirkštiniu samprotavimu. Tarkime, kad (132) sąlyga įvykdyta, bet sistemą veikiančios jėgos neatsvarinės. Šiuo atveju pradžioje nejudėjusi sistema neatsvarinių jėgų veikiama pradės judėti ir per mažą laiko tarpą dt pajudės tikroju

judesiu $d\vec{r}$. Kai sistemos ryšiai stacionarūs, tikrasis poslinkis $d\vec{r}$ sutaps su virtualiuoju $\delta\vec{r}$. Sistemą veikiančių jėgų atliktas darbas bus:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i + \sum_{i=1}^n \vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i > 0. \quad (137)$$

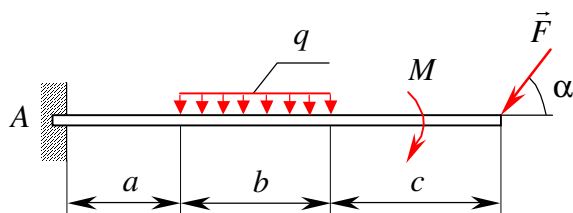
Kadangi sistemos ryšiai yra idealieji, antroji suma lygi nuliui:

$$\sum_{i=1}^n \vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0.$$

Iš to išplaukia, kad $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i > 0$, o tai prieštarauja (132) sąlygai. Taigi įrodyta pakankamumo sąlyga.

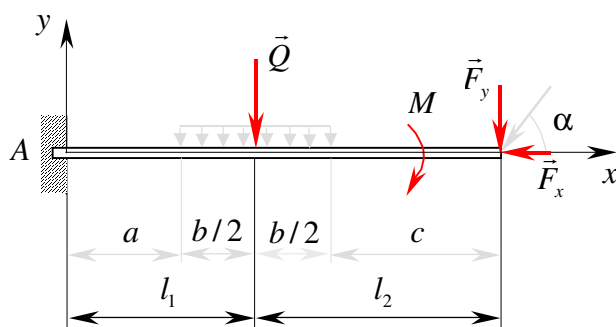
Pavyzdžiai:

1. Reikia apskaičiuoti gembinės sijos atramines reakcijas. Sija apkrauta išskirstytąja apkrova q , jėgų poros momentu M ir koncentruotąja jėga \vec{F} (43 pav.).



43 pav. Nagrinėjamoji gembinė sija

Visų pirma sutvarkome apkrovas: išskirstytąją apkrovą pakeičiame koncentruotąja jėga \vec{Q} , jėgą \vec{F} išskaidome į dedamąsias koordinačių ašių atžvilgiu (44 pav.).

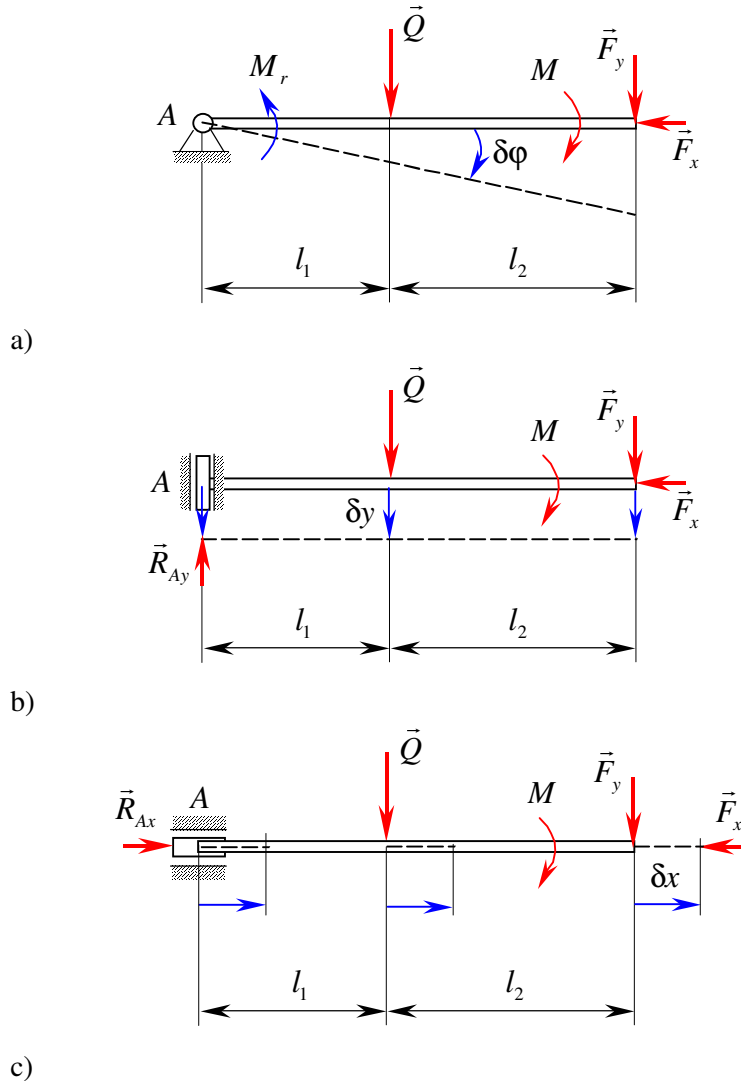


44 pav. Gembinės sijos skaičiuojamoji schema

$$Q = q \cdot b, \quad l_1 = a + 0,5b, \quad l_2 = 0,5b + c.$$

$$F_x = F \cdot \cos \alpha, \quad F_y = F \cdot \sin \alpha.$$

Atrama A (44 pav.) yra trijų ryšių, nes varžo tris elementariusius judesius – $dx, dy, d\varphi$. Taikome ryšių aksiomą ir nuosekliai pašaliname po vieną ryšį, suteikdami sistemai vieną laisvės laipsnį. Gauname tris skaičiuojamąsias schemas (45 pav.).



45 pav. Geminės sijos virtualieji poslinkiai

Iš (45 pav., a) galime apskaičiuoti reakcijos momentą M_r . Suteikiame sijai virtualųjį poslinkį $\delta\varphi$ ir virtualiųjų poslinkių principu sudarome lygtį:

$$\sum \delta A_i = 0,$$

pagal kurią užrašome visų veikiančių siją jėgų elementariųjų darbų sumą esant sistemos virtualiesiems poslinkiams, t. y.

$$-M_r \cdot \delta\varphi + Q \cdot l_1 \cdot \delta\varphi + M \cdot \delta\varphi + F_y(l_1 + l_2) \cdot \delta\varphi = 0. \quad (138)$$

Teigiamą darbą atlieka tos jėgos, kurių momento apie tašką A kryptis sutampa su $\delta\varphi$ kryptimi. Padaliję visus narius iš $\delta\varphi$, gausime:

$$M_r = Q \cdot l_1 + M + F_y(l_1 + l_2). \quad (139)$$

Iš (45 b pav.) turėsime:

$$-R_{Ay} \cdot \delta y + Q \cdot \delta y + F_y \cdot \delta y = 0. \quad (140)$$

Iš čia:

$$R_{Ay} = Q + F_y. \quad (141)$$

Iš (45 pav., c):

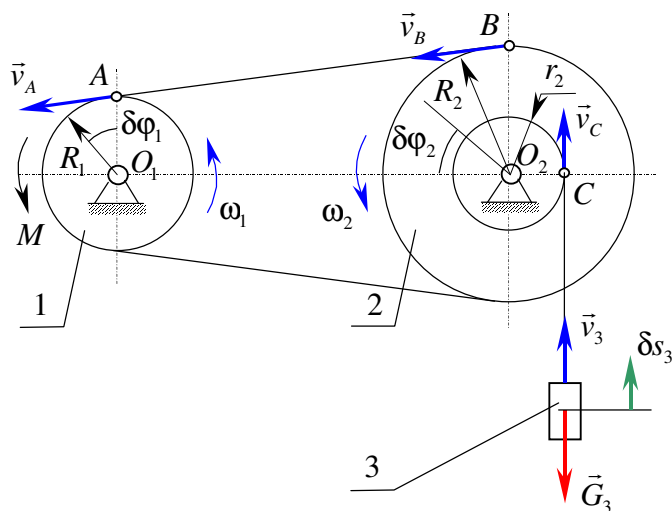
$$R_{Ax} \cdot \delta x - F_x \cdot \delta x = 0 \quad (142)$$

ir

$$R_{Ax} = F_x. \quad (143)$$

Taigi pritaikę virtualiųjų poslinkių principą, radome įtvirtinimo A reakcijų reikšmes.

2. Nagrinėjame (46 pav.) pavaizduotą diržinę pavara. Reikia apskaičiuoti, kokio dydžio turi būti jėgų poros momentas M , kad būtų atsvertas krovinio 3 poveikis.



46 pav. Diržinė pavara

Suteikime sistemai virtualųjį poslinkį $\delta\varphi_1$. Krovinys pasislinks δs_3 . Kad sistema būtų pusiausviroji, pagal virtualiųjų poslinkių principą turi būti tenkinama lygtis:

$$\sum \delta A_i = 0, \text{ arba } M \cdot \delta\varphi_1 - G_3 \cdot \delta s_3 = 0. \quad (144)$$

Norėdami virtualųjį poslinkį δs_3 išreikšti sistemai suteiktu poslinkiu $\delta\varphi_1$, pritaikome taisyklę: sistemos, turinčios vieną laisvės laipsnį, linijiniai ir kampiniai poslinkiai yra susiję ta pačia priklausomybe kaip ir atitinkami greičiai. Šiai priklausomybei nustatyti sudarome greičių sąryšio seką:

$$v_3 = v_c = \omega_2 \cdot r_2 = \frac{v_B}{R_2} \cdot r_2 = \frac{v_A}{R_2} \cdot r_2 = \frac{\omega_1 R_1}{R_2} \cdot r_2.$$

Iš čia turėsime $v_3 = \frac{r_2 \cdot R_1}{R_2} \omega_1$. Įvertinę tai, kad $v_3 = \frac{\delta s_3}{dt}$ ir $\omega_1 = \frac{\delta\varphi}{dt}$, gausime:

$$\delta s_3 = \frac{r_2 \cdot R_1}{R_2} \delta\varphi_1.$$

Gautąją δs_3 reikšmę įrašome į (144) lygtį:

$$M \cdot \delta\varphi_1 - G_3 \cdot \frac{r_2 \cdot R_1}{R_2} \delta\varphi_1 = 0. \quad (145)$$

Ir iš (145) lygties gausime poros momento reikšmę:

$$M = \frac{r_2 \cdot R_1}{R_2} G_3. \quad (146)$$

Virtualiųjų poslinkių principas buvo sukurtas sudėtingoms sistemoms skaičiuoti. Šis metodas taikomas paprastiems uždaviniams, tokiems kaip 1 pavyzdys, spręsti, privalumų, palyginti su tradiciniu statikos sprendimu, neturi. Tačiau 2 pavyzdį išspręsti tradiciniu būdu būtų gerokai sudėtingiau. Be to, reikia pažymėti, kad virtualiųjų poslinkių principas yra taikomas deformuojamųjų kūnų mechanikoje ir sistemų dinamikoje.

3.2.2. d'Alamberto principas

d'Alamberto principo taikymas materialiajam taškui

Kol nebuvo suformuluota ryšių aksioma, dinamikos dėsniai buvo taikomi laisvojo kietojo kūno ar materialiojo taško judėjimui nagrinėti. Suvaržytų sistemų judesiui tirti d'Alambertas pasiūlė specialų metodą, vėliau pavadintą *d'Alamberto principu*.

Pasinaudoję ryšių aksioma, suvaržytam materialiajam taškui galime užrašyti tokias pat judėjimo lygtis, kaip ir laisvajam taškui, tik prie aktyviųjų jėgų turi būti pridėtos ir ryšių reakcijos.

Paėmę vieną sistemos tašką, užrašykime pagrindinį dinamikos dėsnį. Turėsime:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i; \quad (147)$$

čia \vec{F}_i – aktyviųjų jėgų atstojamoji; \vec{R}_i – ryšių reakcijų atstojamoji.

Perkėlę visus (147) lygties narius į vieną pusę, gausime:

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i - m_i \vec{a}_i = 0. \quad (148)$$

Sandaugą $(-m_i \vec{a}_i)$ pažymėsime vektoriumi $\vec{\Phi}_i$. Dydis $\vec{\Phi}_i = -m_i \vec{a}_i$ vadinamas materialiojo taško *inercijos jėga*. Minuso ženklas rodo, kad inercijos jėgos vektorius yra nukreiptas į priešingą pusę nei pagreičio vektorius. Tuomet iš (148) formulės turėsime tokią išraišką:

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i + \vec{\Phi}_i = 0. \quad (149)$$

Lygtis (149) išreiškia d’Alamberto principą suvaržytam materialiajam taškui: *materialiajam taškui judant, aktyviosios jėgos, ryšių reakcijos ir inercijos jėga kiekvienu laiko momentu sudaro atsvarinių jėgų sistemą.*

Suprojektavę (149) lygtį į Dekarto koordinačių ašis, gausime skaliarinę d’Alamberto principo išraišką:

$$\begin{aligned} F_{ix} + R_{ix} + \Phi_{ix} &= 0, \\ F_{iy} + R_{iy} + \Phi_{iy} &= 0, \\ F_{iz} + R_{iz} + \Phi_{iz} &= 0. \end{aligned} \quad (150)$$

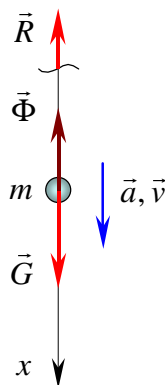
Lygtį (149) galime projektuoti ir į natūraliąsias koordinačių ašis. Šiuo atveju taip pat turėsime tris skaliarines d’Alamberto principo išraiškas.

d’Alamberto principo esmė yra ta, kad taikydami šį metodą dinamikos uždavinių sprendimui galime suteikti statikos pusiausvyros lygčių pavidalą.

Pavyzdys:

Reikia apskaičiuoti lifto lyno įtempimą liftui leidžiantis ir kylant pastoviuoju pagreičiu. Lifto masė m (kg).

a) Kai liftas leidžiasi, jis juda tiesiaeišgiškai, jį galima pavaizduoti kaip materialųjį tašką (47 pav.).



47 pav. Lifto judėjimas žemyn

Nutraukę ryšį, pažymime liftą veikiančias jėgas \vec{G} , \vec{R} , $\vec{\Phi}$. Kadangi judančio lifto pagreitis nukreiptas vertikaliai žemyn, inercijos jėgą nukreipiame priešinga kryptimi, t. y. į viršų.

Taikydami d'Alambero principą, sudarome jėgų pusiausvyros lygtį:

$$\sum F_{ix} = 0. \quad (151)$$

Irašę jėgas, turėsime:

$$G - \Phi - R = 0. \quad (152)$$

Iš čia

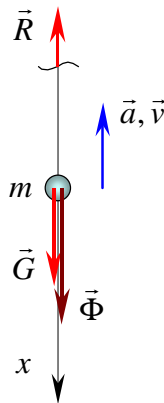
$$R = G - \Phi. \quad (153)$$

Įvertinę tai, kad sunkis $G = mg$ ir inercijos jėga $\Phi = ma$, gausime galutinę ryšių reakcijos jėgą:

$$R = m(g - a). \quad (154)$$

Matyti, kad, liftui leidžiantis žemyn, dinaminė ryšio reakcija (lyno įtempimo jėga) R yra mažesnė už statinę, kuri lygi sunkiui, t. y. $R = G$.

b) Liftui kylant pagreitis yra nukreiptas vertikaliai į viršų, o inercijos jėga – priešinga kryptimi, t. y. žemyn (48 pav.)



48 pav. Lifto judėjimas vertikaliai į viršų

Atlikę visus anksčiau minėtus matematinius veiksmus, turėsime:

$$\sum F_{ix} = 0,$$

$$G + \Phi - R = 0,$$

$$R = G + \Phi = m(g + a).$$

Matome, kad liftui kylant inercijos jėga padidina lyno apkrovimą.

D'Alamberto principo taikymas materialiai sistemai

Taikysime d'Alamberto principą sistemai, sudarytai iš N materialiujų taškų. Kiekvienam sistemos taškui galime užrašyti tokią lygtį:

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i + \vec{\Phi}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (155)$$

Susumavę šias lygtis, gausime:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i + \sum_{i=1}^N \vec{R}_i + \sum_{i=1}^N \vec{\Phi}_i = 0. \quad (156)$$

Padauginę (156) lygties narius vektoriškai iš taškų padėties vektorių, gausime:

$$\sum_{i=1}^N (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) + \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i \times \vec{R}_i) + \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i \times \vec{\Phi}_i) = 0,$$

arba

$$\sum_{i=1}^N \vec{M}_o(\vec{F}_i) + \sum_{i=1}^N \vec{M}_o(\vec{R}_i) + \sum_{i=1}^N \vec{M}_o(\vec{\Phi}_i) = 0. \quad (157)$$

Vektorinės lygtys (155) ir (157) išreiškia d'Alamberto principą mechaninei sistemai: *mechaninei sistemai judant, aktyviosios jėgos, ryšių reakcijos ir inercijos jėgos kiekvienu laiko momentu sudaro atsvarinių jėgų sistemą kiekvienam sistemos taškui.*

Išreiškę vektorines lygtis (156) ir (157) projekcijomis į koordinačių ašis, gausime šešias skaliarines pusiausvyros lygtis, analogiškas statikos erdvinės sistemos pusiausvyros lygtims:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N F_{ix} + \sum_{i=1}^N R_{ix} + \sum_{i=1}^N \Phi_{ix} &= 0, \\ \sum_{i=1}^N F_{iy} + \sum_{i=1}^N R_{iy} + \sum_{i=1}^N \Phi_{iy} &= 0, \\ \sum_{i=1}^N F_{iz} + \sum_{i=1}^N R_{iz} + \sum_{i=1}^N \Phi_{iz} &= 0, \\ \sum_{i=1}^N M_x(\vec{F}_i) + \sum_{i=1}^N M_x(\vec{R}_i) + \sum_{i=1}^N M_x(\vec{\Phi}_i) &= 0, \\ \sum_{i=1}^N M_y(\vec{F}_i) + \sum_{i=1}^N M_y(\vec{R}_i) + \sum_{i=1}^N M_y(\vec{\Phi}_i) &= 0, \\ \sum_{i=1}^N M_z(\vec{F}_i) + \sum_{i=1}^N M_z(\vec{R}_i) + \sum_{i=1}^N M_z(\vec{\Phi}_i) &= 0. \end{aligned} \quad (158)$$

Sugrupavus sistemos taškus veikiančias jėgas į išorines \vec{F}_i^i ir vidines \vec{F}_i^v , lygtys (156) ir (157) turės tokį pavidalą:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^i + \sum_{i=1}^N \vec{\Phi}_i = 0. \quad (159)$$

$$\sum_{i=1}^N \vec{M}_o(\vec{F}_i^i) + \sum_{i=1}^N \vec{M}_o(\vec{\Phi}_i) = 0, \quad (160)$$

nes vidinės jėgos atitinka žinomas sąlygas $\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^v = 0$ ir $\sum_{i=1}^N \vec{M}_o(\vec{F}_i^v) = 0$.

Suprojektavę (159) ir (160) lygtis į koordinatinių ašis vėl gausime šešias jėgų pusiausvyros lygtis. Lygtyse (159) ir (160) nėra vidinių jėgų, todėl daugeliu atvejų jos yra patogesnės dinamikos uždaviniams spręsti.

Lygtyse (156) ir (157) inercijos jėgų sumas galima pažymėti:

$$\vec{\Phi} = \sum_{i=1}^N \vec{\Phi}_i. \quad (161)$$

$$\vec{M}_o^\Phi = \sum_{i=1}^N \vec{M}_o(\vec{\Phi}_i); \quad (162)$$

čia $\vec{\Phi}$ – inercijos jėgų suminis vektorius; \vec{M}_o^Φ – inercijos jėgų suminis vektorinis momentas.

Kad būtų galima naudoti sudarytas lygtis (158), reikia žinoti mechaninės sistemos inercijos jėgų suminio vektoriaus ir suminio vektorinio momento reikšmes. Tačiau praktiniams uždaviniams spręsti pakanka žinoti kiekvieno mechaninės sistemos kūno inercijos jėgas ir jų pridėties vietas.

Pavyzdžiui, turime bet kaip judančią mechaninę sistemą. Rasime šios sistemos inercijos jėgų suminį vektorių. Pagal (161) formulę suminis vektorius:

$$\vec{\Phi} = \sum_{i=1}^N \vec{\Phi}_i = - \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i.$$

Žinome, kad mechaninės sistemos judesio kiekis lygus sistemos masei, padaugintai iš sistemos masės centro greičio:

$$\vec{K} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = M \cdot \vec{v}_C.$$

Ieškome šios išraiškos išvestinės laiko atžvilgiu:

$$\sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = M \frac{d\vec{v}_C}{dt},$$

arba, įvertinę tai, kad greičio išvestinė lygi pagreičiui, galime užrašyti:

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i = M \cdot \vec{a}_C.$$

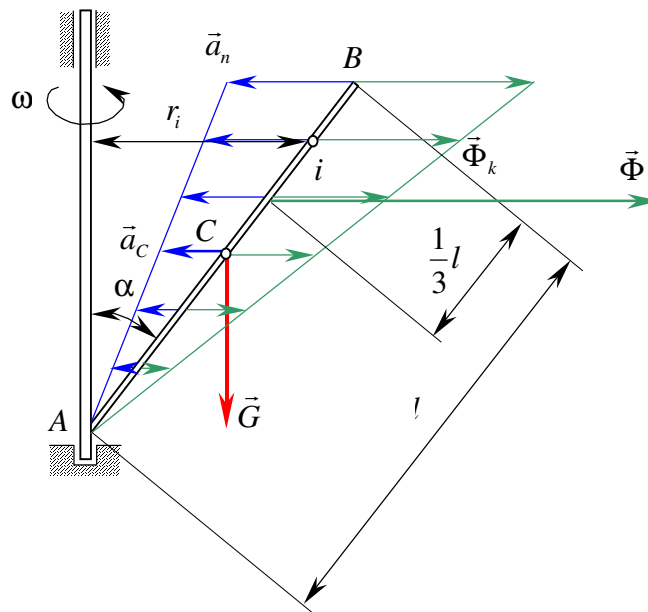
Įvertinę gautąją išraišką, mechaninės sistemos inercijos jėgų suminių vektorių galime užrašyti taip:

$$\vec{\Phi} = -M \cdot \vec{a}_C. \quad (163)$$

Matome, kad mechaninės sistemos inercijos jėgų suminis vektorius esant bet kokiam mechaninės sistemos judėjimui lygus sistemos masės M ir sistemos masės centro pagreičio \vec{a}_C sandaugai ir yra nukreiptas į priešingą pusę negu masės centro pagreitis. Iš vektorinės lygties (163) išplaukia, kad mechaninės sistemos inercijos jėgų suminis vektorius yra pridėtas sistemos masės centre arba gali būti lygiagretus su masės centro pagreičiu.

Nagrinėjant atskirus mechaninės sistemos judėjimo atvejus, pavyzdžiui, skaičiuojant standžiojo kūno suminį inercijos jėgų vektorių, reikia įvertinti kūno masės pasiskirstymą erdvėje ir judėjimo pobūdį.

Tarkime, vienalytis strypas AB , kurio ilgis l , standžiai pritvirtintas prie vertikalaus veleno kampu α ir kartu su velenu sukasi pastoviuoju kampiniu greičiu ω (49 pav.).



49 pav. Strypo inercijos jėgų suminis vektorius

Strypo masė M išdėstyta per visą strypo ilgį tolygiai. Veleno įtvirtinimo reakcijoms skaičiuoti reikia žinoti visas veikiančiąsias jėgas ir jų pridėties vietas. Strypo sunkis $G = Mg$ pridėdamas strypo viduryje C ir nukreipiamas vertikaliai žemyn. Pagal d'Aalambero principą reikia sąlygiškai pridėti prie strypo inercijos jėgų suminių vektorių, kurio dydis gali būti apskaičiuotas pagal (163) formulę:

$$\Phi = M \cdot a_C = M\omega^2 r_C = M\omega^2 \frac{l}{2} \sin \alpha.$$

Strypo masę išskaidžius į be galo daug vienodo didumo elementariųjų masių, galima pastebėti, kad šias elementariąsias mases atitinkančių strypo atkarpų centrų pagreičiai strypo ilgio atžvilgiu bus išdėstyti pagal tiesinį dėsnį, nes kiekvieno strypo taško pagreitis skaičiuojamas pagal formulę:

$$a_i = \omega^2 \cdot r_i;$$

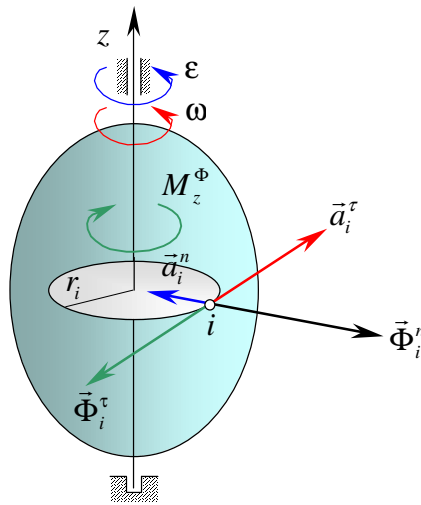
čia r_i – atstumas nuo i -tojo strypo taško iki sukimosi ašies.

Iš čia išplaukia išvada, kad strypo inercijos jėgos strypo atžvilgiu taip pat yra išdėstytos pagal tiesinį dėsnį, t. y. pagal trikampį. Iš statikos žinome, kad paskirstytų jėgų atstojamoji pridedama epiūros ploto centre. Trikampio atveju – $\frac{1}{3}$ atstumu nuo pagrindo l (49 pav.).

Strypo inercijos jėgų atstojamoji visada bus lygi strypo inercijos jėgų suminiam vektoriui ir nukreipta pagreičiams priešinga kryptimi.

Skaičiuojant standžiojo kūno inercijos jėgų suminį vektorinį momentą, svarbu įvertinti kūno masės išsidėstymą erdvėje ir judėjimo pobūdį.

Tarkime, standusis masės M kūnas sukasi kampiniu greičiu ω ir kampiniu pagreičiu ε apie nejudamąją ašį (50 pav.). Rasime šio kūno inercijos jėgų momentą apie sukimosi ašį.



50 pav. Standžiojo kūno inercijos jėgų momentas

Kiekvienas besisukančio kūno jo taškas turės normalinį pagreitį $a_i^n = \omega^2 r_i$, nukreiptą statmenai sukimosi ašiai, ir tangentinį pagreitį $a_i^\tau = \varepsilon \cdot r_i$, nukreiptą statmenai normaliniam pagreičiui kampinio pagreičio kryptimi (50 pav.).

Taikydami d’Alambero principą, prie kiekvieno taško pridėsime inercijos jėgas. Normalinė inercijos jėga $\Phi_i^n = m_i a_i^n$ nukreipta priešinga normaliniam pagreičiui kryptimi, t. y. nuo sukimosi ašies. Tangentinė inercijos jėga $\Phi_i^\tau = m_i a_i^\tau$ nukreipta priešinga tangentiniam pagreičiui kryptimi statmenai normalinei inercijos jėgai. Pagal sukamojo judėjimo apibrėžimą kiekvieno taško pagreičiai yra plokštumoje, statmenoje sukimosi ašiai.

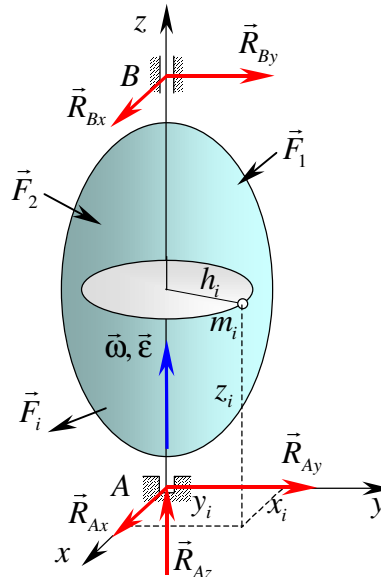
Galime padaryti išvadą, kad besisukančio apie nejudamąją ašį standžiojo kūno taškų inercijos jėgos yra plokštumose, kurios yra statmenos sukimosi ašiai. Be to, visos kūno taškų normalinės inercijos jėgos bus nukreiptos nuo sukimosi ašies, o taškų tangentinės inercijos jėgos, veikdamos kūno taškus, suteikia kūnui sukamąjį efektą, priešingos krypties nei kūno tangentiniai pagreičiai, t. y. priešingas kampiniam pagreičiui. Kūno inercijos jėgų momentų apie sukimosi ašį suma:

$$\begin{aligned}
 M_z^\Phi &= \sum_{i=1}^N M_z(\vec{\Phi}_i) = \sum_{i=1}^N M_z(\vec{\Phi}_i^n) + \sum_{i=1}^N M_z(\vec{\Phi}_i^\tau) = \\
 &= \sum_{i=1}^N M_z(\vec{\Phi}_i^\tau) = -\sum_{i=1}^N \Phi_i^\tau \cdot r_i = -\sum_{i=1}^N m_i a_i^\tau \cdot r_i = \\
 &= -\sum_{i=1}^N m_i \cdot \varepsilon \cdot r_i \cdot r_i = -\varepsilon \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 = -\varepsilon \cdot I_z.
 \end{aligned}$$

Taigi gavome, kad besisukančio apie nejudamąją ašį kūno tangentinės inercijos jėgos sukuria inercijos jėgų momentą sukimosi ašies atžvilgiu, kuris yra lygus kūno kampinio pagreičio ir kūno masės inercijos momento sukimosi ašies atžvilgiu sandaugai ir yra nukreiptas į priešingą sukimosi kampiniam pagreičiui pusę, t. y.

$$M_z^\Phi = -\varepsilon \cdot I_z. \quad (164)$$

3.2.3. Besisukančio kūno dinaminės guolių reakcijos



51 pav. Besisukančio kūno atraminės reakcijos

Pritaikysime d'Alamberto principą besisukančio kūno atraminėms guolių reakcijoms skaičiuoti (51 pav.). Taškuose A ir B įtvirtintą standųjį kūną veikia jėgų sistema

$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$. Laikome, kad kūnas sukasi apie ašį, einančią per taškus A ir B . Atstumas AB lygus a . Koordinatinių ašies pradžia yra taške A (51 pav.).

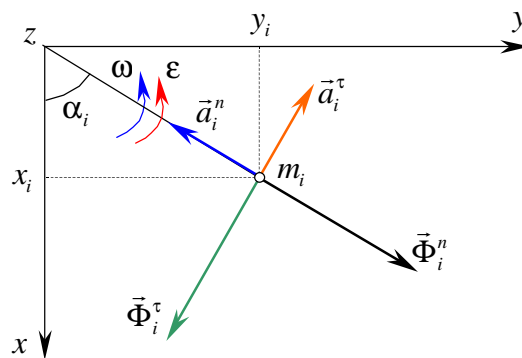
Tarkime, kad kūnas sukasi teigiamąja kryptimi greitėdamas. Šiuo atveju kampinio greičio ir pagreičio kryptys sutampa. Žymėsime juos vektoriais $\vec{\omega}$ ir $\vec{\epsilon}$. Taškų A ir B reakcijas išskaidome į dedamąsias koordinatinių ašių atžvilgiu. Taške B kūnas ašies z atžvilgiu nesuvaržytas, todėl $R_{Bz} = 0$.

Taikydami d'Alamberto principą, apskaičiuosime taškų A ir B ryšių reakcijas:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n F_{ix} + R_{Ax} + R_{Bx} + \sum_{i=1}^n \Phi_{ix} &= 0, \\
 \sum_{i=1}^n F_{iy} + R_{Ay} + R_{By} + \sum_{i=1}^n \Phi_{iy} &= 0, \\
 \sum_{i=1}^n F_{iz} + R_{Az} + R_{Bz} + \sum_{i=1}^n \Phi_{iz} &= 0, \\
 \sum_{i=1}^n M_x(\vec{F}_i) - R_{By}a + \sum_{i=1}^n M_x(\vec{\Phi}_i) &= 0, \\
 \sum_{i=1}^n M_y(\vec{F}_i) - R_{By}a + \sum_{i=1}^n M_y(\vec{\Phi}_i) &= 0, \\
 \sum_{i=1}^n M_z(\vec{F}_i) + \sum_{i=1}^n M_z(\vec{\Phi}_i) &= 0.
 \end{aligned} \tag{165}$$

Šiose lygtyse yra penki nežinomi dydžiai – ryšių reakcijos. Jas rasime apskaičiuodami inercijos jėgų projekcijas į koordinatinių ašis ir inercijos jėgų momentus šių ašių atžvilgiu.

Inercijos jėgoms skaičiuoti laisvai pasirenkame kūno materialųjį masės m_i tašką, kuris yra nutolęs atstumu h_i nuo sukimosi ašies. Taško koordinatės x_i, y_i, z_i (52 pav.).



52 pav. Kūno taško inercijos jėgos

Apskaičiuosime inercijos jėgų vektorių projekcijas į koordinatinių ašis:

$$\begin{aligned}
\Phi_{ix}^\tau &= \Phi_i^\tau \sin \alpha_i = m_i a_i^\tau \sin \alpha_i = m_i \varepsilon h_i \sin \alpha_i = m_i \varepsilon y_i, \\
\Phi_{iy}^\tau &= -\Phi_i^\tau \cos \alpha_i = -m_i a_i^\tau \cos \alpha_i = -m_i \varepsilon h_i \cos \alpha_i = -m_i \varepsilon x_i, \\
\Phi_{iz}^\tau &= 0, \\
\Phi_{ix}^n &= \Phi_i^n \cos \alpha_i = m_i a_i^n \cos \alpha_i = m_i \omega^2 h_i \cos \alpha_i = m_i \omega^2 x_i, \\
\Phi_{iy}^n &= \Phi_i^n \sin \alpha_i = m_i a_i^n \sin \alpha_i = m_i \omega^2 h_i \sin \alpha_i = m_i \omega^2 y_i, \\
\Phi_{iz}^n &= 0.
\end{aligned}$$

Apskaičiuojame kūno inercijos jėgų suminio vektoriaus projekcijas į koordinatinių ašis:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \Phi_{ix} &= \sum_{i=1}^n \Phi_{ix}^\tau + \sum_{i=1}^n \Phi_{ix}^n = \sum_{i=1}^n m_i \varepsilon y_i + \sum_{i=1}^n m_i \omega^2 x_i = \\
&= \varepsilon \sum_{i=1}^n m_i y_i + \omega^2 \sum_{i=1}^n m_i x_i = \varepsilon \cdot My_C + \omega^2 \cdot Mx_C, \\
\sum_{i=1}^n \Phi_{iy} &= -\varepsilon \cdot Mx_C + \omega^2 \cdot My_C, \\
\sum_{i=1}^n \Phi_{iz} &= 0;
\end{aligned}$$

čia M – visa kūno masė; x_c, y_c – kūno masės centro koordinatės.

Rasime inercijos jėgų $\vec{\Phi}_i^\tau$ ir $\vec{\Phi}_i^n$ momentus koordinatinių ašių atžvilgiu:

$$\begin{aligned}
M_x(\vec{\Phi}_i^\tau) &= y_i \Phi_{iz}^\tau - z_i \Phi_{iy}^\tau = m_i x_i z_i \varepsilon, \\
M_x(\vec{\Phi}_i^n) &= y_i \Phi_{iz}^n - z_i \Phi_{iy}^n = -m_i y_i z_i \omega^2, \\
M_y(\vec{\Phi}_i^\tau) &= z_i \Phi_{ix}^\tau - x_i \Phi_{iz}^\tau = m_i y_i z_i \varepsilon, \\
M_y(\vec{\Phi}_i^n) &= z_i \Phi_{ix}^n - x_i \Phi_{iz}^n = m_i x_i z_i \omega^2, \\
M_z(\vec{\Phi}_i^\tau) &= -\Phi_i^\tau h_i = -m_i h_i^2 \varepsilon, \\
M_z(\vec{\Phi}_i^n) &= 0.
\end{aligned}$$

Inercijos jėgų suminiai momentai koordinatinių ašių atžvilgiu:

$$M_x^\Phi = \sum_{i=1}^n M_x(\vec{\Phi}_i^\tau) + \sum_{i=1}^n M_x(\vec{\Phi}_i^n) = \varepsilon \sum_{i=1}^n m_i x_i z_i + \omega^2 \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i = \varepsilon \cdot I_{xz} - \omega^2 \cdot I_{yz};$$

čia I_{xz} ir I_{yz} – išcentriniai inercijos momentai.

Atlikę nesudėtingus skaičiavimus, gausime:

$$M_y^\Phi = \varepsilon \cdot I_{yz} + \omega^2 \cdot I_{xz},$$

$$M_z^\Phi = -I_z \varepsilon.$$

Gautas inercijos jėgų ir momentų išraiškas įrašę į lygčių sistemą (132), turėsime:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n F_{ix} + R_{Ax} + R_{Bx} + \varepsilon \cdot My_C + \omega^2 Mx_C &= 0, \\
 \sum_{i=1}^n F_{iy} + R_{Ay} + R_{By} - \varepsilon \cdot Mx_C + \omega^2 My_C &= 0, \\
 \sum_{i=1}^n F_{iz} + R_{Az} &= 0, \\
 \sum_{i=1}^n M_x(\vec{F}_i) - R_{By}a + \varepsilon \cdot I_{xz} - \omega^2 I_{yz} &= 0, \\
 \sum_{i=1}^n M_y(\vec{F}_i) + R_{Bx}a + \varepsilon \cdot I_{yz} + \omega^2 I_{xz} &= 0, \\
 \sum_{i=1}^n M_z(\vec{F}_i) - I_z \varepsilon &= 0.
 \end{aligned} \tag{166}$$

Iš lygčių sistemos (166) pirmųjų penkių lygčių galime apskaičiuoti penkias besisukančio kūno atramines reakcijas. Šeštoji lygtis yra besisukančio kūno diferencialinė judėjimo lygtis. Jeigu ω ir ε nežinomi, tai juos galime apskaičiuoti iš šios lygties.

Koordinatinių ašys yra standžiai sujungtos su besisukančiu kūnu, todėl kūno masės inercijos momentai I_z, I_{xz}, I_{yz} ir centro C koordinatės x_C, y_C yra pastovieji dydžiai.

Kai $\omega = 0$ ir $\varepsilon = 0$, kūnas yra rimties būsenos ir papildomų dinaminėlių apkrovų į atramas nėra. Rastos atraminės reakcijos šiuo atveju vadinamos *statinėmis dedamosiomis*.

Naudodami lygčių sistemą (166) rasime atramines reakcijas, atmetę veikiančiąsias išorines jėgas, įvertindami tik kūno judėjimą. Tokios atraminių reakcijų dedamosios vadinamos *dinaminėmis*.

Apskaičiuosime atramos B reakcijas dinamines dedamąsias. Iš lygčių sistemos (166) gausime:

$$\begin{cases} R_{By}^d = \frac{1}{a}(\varepsilon \cdot I_{xz} - \omega^2 I_{yz}), \\ R_{Bx}^d = -\frac{1}{a}(\varepsilon \cdot I_{yz} + \omega^2 I_{xz}). \end{cases}$$

Dinaminė reakcija taške B randama pagal dedamąsias taip:

$$R_B^d = \sqrt{(R_{Bx}^d)^2 + (R_{By}^d)^2} = \frac{1}{a} \sqrt{(\varepsilon \cdot I_{xz} - \omega^2 I_{yz})^2 + (\varepsilon \cdot I_{yz} + \omega^2 I_{xz})^2}.$$

Po nesudėtingų matematinių pertvarkymų turėsime:

$$R_B^d = \frac{1}{a} \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \cdot \sqrt{I_{yz}^2 + I_{xz}^2}. \tag{167}$$

Panašią išraišką turės ir atramos A reakcijos dinaminė dedamoji. Remdamiesi atramos B dinaminės dedamosios bendrąja išraiška (167), galime padaryti išvadą, kad dinaminė dedamoji bus minimali, kai kūno judėjimas bus tolygusis ($\varepsilon=0$), ir proporcinga kūno kampinio greičio kvadratui. Šiuolaikinėse greitaeigėse mašinose kūnų greičiai yra dideli. Todėl ir atramų reakcijų dinaminės dedamosios gali būti didelės ir gerokai viršyti statines reakcijas. Veikdamos atramas, tokios jėgos gali jas suardyti. Todėl aktualu yra nustatyti, kokiomis sąlygomis judantis kūnas gali turėti minimalias dinamines reakcijas. Iš lygčių sistemos (166) galime gauti šias sąlygas:

$$\begin{aligned} My_C + \omega^2 Mx_C &= 0, \\ -\varepsilon \cdot Mx_C + \omega^2 My_C &= 0, \\ \varepsilon \cdot I_{xz} - \omega^2 I_{yz} &= 0, \\ \varepsilon \cdot I_{yz} + \omega^2 I_{xz} &= 0. \end{aligned} \tag{168}$$

Sprendami lygčių sistemą nežinomųjų x_C, y_C, I_{xz}, I_{yz} atžvilgiu, laikydami, kad kūno masė M žinoma ir jis juda kampiniu greičiu ω ir kampiniu pagreičiu ε , gauname:

$$\begin{aligned} x_C &= 0, \\ y_C &= 0, \\ I_{xz} &= 0, \\ I_{yz} &= 0. \end{aligned} \tag{169}$$

Galime padaryti išvadą, kad sukimosi ašis z turi eiti per kūno masės centrą ir sutapti su svarbiausiąja centrine inercijos ašimi.

Taigi jeigu kūno sukimosi ašis yra kūno svarbiausioji centrinė inercijos ašis, tai kūno įtvirtinimo vietoje judėjimo metu atramų reakcijos nesiskirs nuo statinių, kurios atsiranda dėl veikiančių išorinių jėgų. Šiuo atveju sakoma, kad besisukantis kūnas yra dinamiškai subalansuotas.

Dinaminių reakcijų skaičiavimams kartais patogiau naudoti ne galutines formules (166), bet taikyti d'Alamberto principo bendrąsias išraiškas (165).

3.2.4. Bendroji dinamikos lygtis

Nagrinėjame iš N materialiujų taškų sudarytą sistemą, atitinkančią bet kokius dvipusius ryšius. Pagal d'Alamberto principą jėgų sistema, sudaryta iš aktyviųjų jėgų \vec{F}_i , ryšių reakcijų \vec{R}_i ir inercijos jėgų $\vec{\Phi}_i$, bet kuriuo laiko momentu yra atsisvėrusi.

Pusiausvirajai jėgų sistemai galime pritaikyti virtualiųjų poslinkių principą. Todėl, d'Alamberto principą sujungę su Lagranžo virtualiųjų poslinkių principu, gauname d'Alamberto ir Lagranžo principą dinamiškai materialiujų taškų sistemai: *sistemos taškus veikiančių aktyviųjų jėgų, ryšių reakcijų ir inercijos jėgų virtualiųjų darbų, atliekamų esant bet kuriam tos sistemos virtualiajam poslinkiui, suma lygi nuliui.*

Tai galime išreikšti lygtimis:

$$\sum_{i=1}^N \delta A_{F_i} + \sum_{i=1}^N \delta A_{R_i} + \sum_{i=1}^N \delta A_{\Phi_i} = 0,$$

arba

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i + \vec{R}_i + \vec{\Phi}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (170)$$

Ši lygtis vadinamos *bendraja dinamikos lygtimi* arba d'Alamberto ir Lagranžo principu.

Inercijos jėgas pakeitus jų išraiškomis $\vec{\Phi}_i = -m_i \vec{a}_i$, bendrajai dinamikos lygčiai galima taikyti kitokią formulę:

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i + \vec{R}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0, \quad (171)$$

arba, pakeitę $\vec{a}_i = \ddot{\vec{r}}_i$, turėsime:

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i + \vec{R}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (172)$$

Suprojektavę (172) lygtį į koordinačių ašis, gausime analizinę bendrosios dinamikos lygties išraišką:

$$\sum_{i=1}^N \{ (F_{ix} + R_{ix} - m_i \ddot{x}_i) \cdot \delta x_i + (F_{iy} + R_{iy} - m_i \ddot{y}_i) \cdot \delta y_i + (F_{iz} + R_{iz} - m_i \ddot{z}_i) \cdot \delta z_i \} = 0. \quad (173)$$

Tarkime, kad sistemą varžantys ryšiai yra idealieji. Tuomet ryšių reakcijų elementariųjų darbų suma $\sum_{i=1}^N \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$. Šiuo atveju (170)–(173) lygtys turės tokį pavidalą:

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i + \vec{\Phi}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0, \quad (174)$$

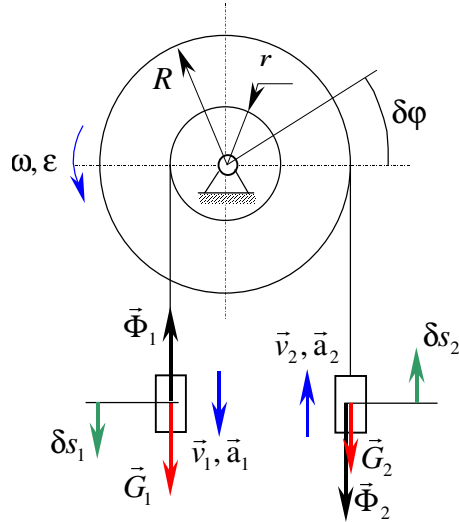
$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0, \quad (175)$$

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (176)$$

$$\sum_{i=1}^N \{ (F_{ix} - m_i \ddot{x}_i) \cdot \delta x_i + (F_{iy} - m_i \ddot{y}_i) \cdot \delta y_i + (F_{iz} - m_i \ddot{z}_i) \cdot \delta z_i \} = 0. \quad (177)$$

Pavyzdys

Skriemulių blokas sukasi apie horizontaliąją ašį (53 pav.). Ant skriemulių užvynioti lynai, prie jų galų pritvirtintos masės m_1 ir m_2 . Sistema juda veikiamą sunkio. Reikia rasti skriemulių bloko kampinį pagreitį. Bloko ir lyno masės galima nepaisyti, sistemos ryšiai idealūs.



53 pav. Skriemulių blokas

Prie judančių masių pridedame sunkį $G_i = m_i g$. Nustatome arba pasirenkame masių judėjimo kryptį ir judėjimo pobūdį, t. y. pagreičių kryptis. Priešingomis negu pagreičių kryptimis pridedame inercijos jėgas $\Phi_i = m_i a_i$. Pasukę bloką virtualiuoju kampu $\delta\varphi$ suteikiame sistemai virtualųjį poslinkį. Skaičiuodami taikome bendrąją dinamikos lygtį:

$$\sum_{i=1}^N \delta A_{F_i} + \sum_{i=1}^N \delta A_{\Phi_i} = 0.$$

Randame sunkio darbų sumą:

$$\sum \delta A_{F_i} = G_1 \cdot \delta s_1 - G_2 \cdot \delta s_2.$$

Randame inercijos jėgų darbų sumą:

$$\sum \delta A_{\Phi_i} = -\Phi_1 \cdot \delta s_1 - \Phi_2 \cdot \delta s_2.$$

Apskaičiuojame visus dydžius:

$$\delta s_1 = r \cdot \delta\varphi, \quad \delta s_2 = R \cdot \delta\varphi, \quad G_1 = m_1 g, \quad G_2 = m_2 g,$$

$$\Phi_1 = m_1 \cdot a_1 = m_1 \cdot \varepsilon r, \quad \Phi_2 = m_2 \cdot a_2 = m_2 \cdot \varepsilon R.$$

Gautas išraiškas įrašę į bendrąją dinamikos lygtį gauname:

$$m_1 g r \delta\varphi - m_2 g R \delta\varphi - m_1 r^2 \varepsilon \delta\varphi - m_2 R^2 \varepsilon \delta\varphi = 0.$$

Padaliję visus lygties narius iš $\delta\varphi$, sugrupavę ir išreiškę ε , turėsime skriemulio kampinį pagreitį:

$$\varepsilon = \frac{m_1 r - m_2 R}{m_1 r^2 + m_2 R^2} g.$$

3.2.5. Bendroji dinamikos lygtis, išreikšta apibendrintomis jėgomis

Kai sistemą varžantys ryšiai yra idealieji, bendroji dinamikos lygtis yra tokio pavidalo:

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i + \vec{\Phi}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0. \quad (178)$$

Taško padėties vektoriaus virtualųjį poslinkį išreiškiame apibendrintųjų koordinačių virtualiaisiais poslinkiais:

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \delta q_k. \quad (179)$$

Įrašę (179) reikšmę į (178), gausime:

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i + \vec{\Phi}_i) \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \delta q_k = 0.$$

Pakeitę sumavimo tvarką, galime užrašyti:

$$\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} + \sum_{i=1}^N \vec{\Phi}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \cdot \delta q_k = 0. \quad (180)$$

Skliaustuose pateiktos sumos yra apibendrinta aktyvioji jėga Q_k^F ir apibendrinta inercijos jėga Q_k^Φ , kurios atitinka apibendrintąją koordinatę q_k .

$$Q_k^F = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}, \quad Q_k^\Phi = \sum_{i=1}^N \vec{\Phi}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}. \quad (181)$$

Naudodami šias išraiškas, gausime tokio pavidalo bendrąją dinamikos lygtį:

$$\sum_{k=1}^n (\bar{Q}_k^F + \bar{Q}_k^\Phi) \cdot \delta \bar{q}_k = 0. \quad (182)$$

Apibendrintųjų koordinačių pokyčiai δq_k yra nepriklausomi vienas nuo kito ir nelygūs nuliui. Todėl lygčių sistema (182) bus tenkinama tuomet, kai visi koeficientai esant δq_k bus lygūs nuliui:

$$\sum_{k=1}^n (\bar{Q}_k^F + \bar{Q}_k^\Phi) = 0. \quad (183)$$

Šios lygtys sudaro sistemos bendrąsias judėjimo lygtis, taikomas dinamikos uždaviniams spręsti.

3.2.6. Lagranžo antrojo tipo lygtys

Apibendrintas inercijos jėgas išreiškus sistemos kinetine energija, galima gauti kito pavidalo mechaninės sistemos judėjimo diferencialines lygtis, kurios vadinamos Lagranžo antrojo tipo lygtimis.

Tarkime, kad nagrinėjama sistema sudaro N materialiujų taškų, sistemos laisvės laipsnis lygus n , sistemą varžo holonominiai idealūs stacionarūs ryšiai. Taškų padėties vektoriai šiuo atveju yra apibendrintųjų koordinačių funkcijos.

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n), \quad (184)$$

o bendroji dinamikos lygtis turės tokį pavidalą:

$$\sum_{i=1}^N (-m_i \ddot{\vec{r}}_i + \vec{F}_i) \delta \vec{r}_i = 0. \quad (185)$$

Taškų virtualieji poslinkiai $\delta \vec{r}_i$ bus (184) funkcijos pilnasis diferencialas:

$$\delta \vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n} \delta q_n,$$

arba

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k. \quad (186)$$

Irašę šią išraišką į bendrąją dinamikos lygtį (185) ir pakeitę sumavimo eilę, gausime:

$$\sum_{k=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^N \left(-m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right\} \delta q_k = 0. \quad (187)$$

Lygties (187) antroji suma skliaustuose reiškia apibendrintą jėgą:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = Q_k. \quad (188)$$

Pirmajai lygties (187) sumai apskaičiuoti naudojame tapatybę:

$$\ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) - \dot{\vec{r}}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}. \quad (189)$$

Gautos tapatybės (189) dešinėsios pusės nariams šifruoti rasime vektoriaus \vec{r}_i pilną išvestinę laiko atžvilgiu:

$$\dot{\vec{r}}_i = \vec{v}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n} \dot{q}_n. \quad (190)$$

Paėmę abiejų (190) lygybės pusių dalines išvestines apibendrinto greičio \dot{q}_k atžvilgiu, gausime:

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}. \quad (191)$$

Antrasis (189) tapatybės narys duoda:

$$\dot{\vec{r}}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_k}. \quad (192)$$

Įrašę (191) ir (192) išraiškas į (189) tapatybės dešiniąją pusę, turėsime:

$$\ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) - \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_k}. \quad (193)$$

Gautą išraišką įrašę į (187) lygties pirmąją sumą gausime:

$$\sum_{i=1}^N \left(-m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) = - \left(\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} \right). \quad (194)$$

Tolesniam priklausomybės (194) pertvarkymui panagrinėsime sistemos kinetinę energiją:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{v}_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2,$$

arba

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\dot{\vec{r}}_i \right)^2.$$

Kaip matyti iš (190), funkcija $\dot{\vec{r}}_i$ priklauso nuo visų kintamųjų q_k ir \dot{q}_k . Apskaičiuosime šių kintamųjų kinetinės energijos dalines išvestines:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_k}, \quad (195)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_k}. \quad (196)$$

Matome, kad (195) ir (196) išraiškos atitinka (194) lygybės dešinėsios pusės sumas. Lygybę (194) dabar galime užrašyti taip:

$$\sum_{i=1}^N \left(-m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) = - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right). \quad (197)$$

Išraiškas (188) ir (197) įrašę į (187), gausime:

$$\sum_{k=1}^n \left\{ - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right) + Q_k \right\} \delta q_k = 0. \quad (198)$$

Lygtis (198) vadinama *bendraja dinamikos lygtimi apibendrintųjų koordinačių sistemoje*.

Virtualieji apibendrintųjų koordinačių poslinkiai δq_k yra tarpusavyje nepriklausomi ir bendruoju atveju nelygūs nuliui. Todėl (198) lygtis visada bus tenkinama, kai koeficientai esant δq_k bus lygūs nuliui:

$$- \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right) + Q_k = 0, \\ k = 1, 2, \dots, n,$$

arba

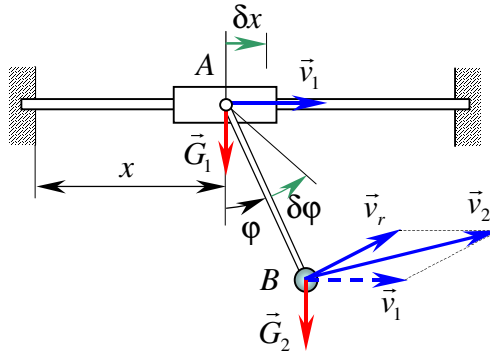
$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right) = Q_k, \\ k = 1, 2, \dots, n. \quad (199)$$

Lygčių sistema (199) vadinama *Lagranžo antrojo tipo lygtimis*.

Kai sistemą varžo holonominiai ryšiai, Lagranžo lygčių skaičius yra lygus sistemos laisvės laipsniui n . Kitas didelis šių lygčių privalumas – esant sistemai, kurios ryšiai idealieji, ši lygtis neįeina sistemos ryšių reakcijos.

Pavyzdys

Masės m_1 slankiklis A gali slysti horizontaliu strypu, o ilgio l ir masės m_2 švytuoklė AB sukasi apie lankstą A . Sudarykime sistemos judėjimo diferencialines lygtis (54 pav.).



54 pav. Slankiklio ir švytuoklės judėjimas

Tariame, kad sistemos ryšiai yra idealieji, o visa švytuoklės masė sukonzentruota taške B . Nagrinėjama sistema yra su dviem laisvės laipsniais $n=2$, todėl ją apibrėžia dvi apibendrintosios koordinatės. Apibendrintosiomis koordinatėmis pasirenkame slankiklio koordinatę x ir švytuoklės kampą φ , t. y. $q_1 = x$ ir $q_2 = \varphi$, atitinkamai turėsime apibendrintus greičius $\dot{q}_1 = \dot{x} = v_1$ ir $\dot{q}_2 = \dot{\varphi} = \omega$.

Nagrinėjamos sistemos Lagranžo lygtys bus tokios:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_1,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_2.$$

Sistemos kinetinė energija:

$$T = T_1 + T_2,$$

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2,$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2;$$

čia v_2 – švytuoklės taško B absoliutusias greitis:

$$v_2^2 = v_1^2 + v_r^2 + 2v_1 v_r \cos \varphi,$$

$$v_r = \omega \cdot l = \dot{\varphi} \cdot l, v_1 = \dot{x},$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}^2 + \dot{\varphi}^2 l^2 + 2\dot{x}\dot{\varphi} \cos \varphi).$$

Visa sistemos kinetinė energija:

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2l(\dot{\varphi}^2l + 2\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi).$$

Kiekvieną Lagranžo lygčių narį apskaičiuojame atskirai:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -m_2l\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2)\dot{x} + m_2l\dot{\varphi}\sin\varphi,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = (m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2l(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m_2l(\dot{\varphi}l + \dot{x}\cos\varphi),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m_2l(l\ddot{\varphi} + \ddot{x}\cos\varphi - \dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi).$$

Suteikę apibendrintosioms koordinatėms x ir φ virtualiuosius poslinkius, apskaičiuojame apibendrintas jėgas:

$$Q_1 = \frac{\delta A_1}{\delta x} = \frac{(m_1 + m_2)g \cdot \delta x \cdot \cos 90^\circ}{\delta x} = 0,$$

$$Q_2 = \frac{\delta A_2}{\delta \varphi} = \frac{-m_2gl \sin\varphi \delta\varphi}{\delta\varphi} = -m_2gl \sin\varphi.$$

Apskaičiuotas reikšmes įrašysime į Lagranžo lygtis:

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2l(\ddot{\varphi}\cos\varphi + \dot{\varphi}^2\sin\varphi) = 0,$$

$$l\ddot{\varphi} + \ddot{x}\cos\varphi + g\sin\varphi = 0.$$

Kaip matyti, kai poslinkiai x ir φ yra nemaži, gauname netiesines diferencialines lygtis. Kai poslinkiai maži, galima imti:

$$\cos\varphi = 1, \quad \sin\varphi = \varphi, \quad \dot{\varphi}^2\sin\varphi = 0.$$

Šiuo atveju gauname tiesines diferencialines lygtis:

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l \ddot{\varphi} = 0,$$

$$l \dot{\varphi} + \dot{x} + g \varphi = 0.$$

Atskyrę kintamuosius, galima apskaičiuoti pirmuosius ir antruosius šių diferencialinių lygčių integralus.

4. SMŪGIS

Jeigu susidūrimo metu dviejų kūnų greičiai sąlyčio vietoje nelygūs ir nėra bendroje lietimosi plokštumoje, matome reiškinių, kuris vadinamas *smūgiu*. Šis reiškinys ypatingas tuo, kad per be galo mažą laiko tarpą (nuo 0,0001 iki 0,00001 s) kūnų greičiai ir judesio kiekiai pasikeičia baigtiniu dydžiu.

Smūgio reiškinio pavyzdžiai: kamuolio arba rutulio smūgis žaidžiant; poliakalės judamosios dalies smūgis į poli; plaktuko smūgis į vini, kalamą į sieną; kūjo smūgis į detalę, kalamą ant priekalo, ir pan.

Smūgio metu svarbi yra kūnų fizinė charakteristika – kūnų tamprumas. Smūgio procesą galima išskaidyti į dvi pagrindines fazes:

- 1) pirmosios fazės metu kūnai deformuojasi ir susispaudžia iki tol, kol jų suartėjimo greitis tampa lygus nuliui, šios fazės metu kūnų tamprumo jėgos pasiekia maksimaliąsias reikšmes;
- 2) antrosios fazės metu veikiant tamprumo jėgoms kūnų geometrinė forma atkuriamą, kūnai įgyja tam tikrus greičius ir fazės pabaigoje jų kontaktai nutraukiami.

Kai kūnai yra visiškai netamprūs, jų smūgis pasibaigia pirmąja faze. Toks smūgis vadinamas *absoliučiai netampriu*.

Kadangi smūgio metu kinetinės energijos dalis virsta šilumine energija, tai kūno greitis \vec{u} įvykus smūgiui bus mažesnis nei kūno greitis \vec{v} iki smūgio.

4.1. Judesio kiekio teorema smūgiui

Užrašysime vieno kūno judesio kiekio pokyčio teoremą, pagal kurią judesio kiekio pokytis per nagrinėjamąjį laiko tarpą lygus visų veikiančiųjų jėgų impulsų sumai per tą patį laiko tarpą, t. y.

$$m\vec{u} - m\vec{v} = \sum_{t_0=0}^{\tau} \vec{S}_k; \quad (200)$$

čia \vec{u} – kūno greitis po smūgio; \vec{v} – kūno greitis iki smūgio, τ – smūgio laiko tarpas.

Tariant, kad kūną veikia žinomos išorinės jėgos (pavyzdžiui, sunkis) ir kontaktuojančių kūnų sąveikos jėgos, judėjimo kiekio pokyčio teoremos (200) dešiniąją pusę galime pateikti kaip išorinių \vec{F}_k^i ir smūgio metu atsiradusių jėgų \vec{F} impulsų sumą, t. y.

$$\sum_{t_0=0}^{\tau} \vec{S}_k = \sum_{t_0=0}^{\tau} \vec{F}_k^i dt + \sum_{t_0=0}^{\tau} \vec{F} dt. \quad (201)$$

Įvertinę tai, kad smūgio laikas τ yra labai mažas dydis ir veikiančių išorinių jėgų impulsas bus labai mažas, galime jo nepaisyti. Judesio kiekio teoremą (200) galime užrašyti taip:

$$m\vec{u} - m\vec{v} = \sum_{t_0=0}^{\tau} \vec{S}_k = \int_0^t \vec{F} \cdot dt,$$

arba, imant atsiradusią smūgio metu jėgą kaip pastovią jėgą, galutinę teoremos išraišką galime užrašyti taip:

$$m\vec{u} - m\vec{v} = \vec{F} \cdot \tau. \quad (202)$$

Kairioji lygties pusė yra baigtinis dydis, todėl ir dešinioji jos pusė turi būti baigtinis dydis. Tačiau jeigu smūgio laikas τ yra labai mažas, kūnų smūgio sąveikos jėga, arba *smūgio jėga*, \vec{F} turi būti labai didelė.

Smūgio metu atsiradusioms jėgoms matuoti negalime taikyti statinio matavimo būdo, t. y. naudoti dinamometrą, nes mechaniniai prietaisai yra inertiški. Todėl atsiradusią smūgio metu jėgą \vec{F} patogiau matuoti jos impulsu:

$$\vec{S} = \int_0^t \vec{F} dt, \quad (203)$$

kuris vadinamas *smūgio impulsu* arba tiesiog – *smūgiu*.

Pagrindinė lygtis smūgio teorijoje turės tokią išraišką:

$$m\vec{u} - m\vec{v} = \vec{S}, \quad (204)$$

t. y. *materialiojo taško judesio kiekis, įgytas smūgio metu, lygus smūgio impulsui*.

Projektuodami į Dekarto koordinačių ašis, turėsime:

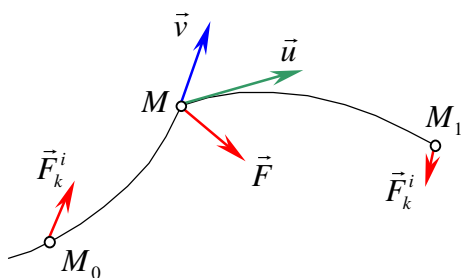
$$\begin{cases} mu_x - mv_x = S_x, \\ mu_y - mv_y = S_y, \\ mu_z - mv_z = S_z, \end{cases} \quad (205)$$

arba *materialiojo taško judesio kiekio projekcija į bet kurią ašį lygi smūgio impulso projekcijai į tą pačią ašį*.

Iš (204) formulės galime rasti materialiojo taško greitį po smūgio:

$$\vec{u} = \vec{v} + \frac{1}{m} \vec{S}. \quad (206)$$

Matome, kad judančio taško greitis \vec{v} po smūgio keičia savo reikšmę dydžiu, kuris priklauso nuo smūgio impulso reikšmės ir krypties (55 pav.).



55 pav. Smūgio reiškinys

Tarkime, judantį dėl išorinių jėgų \vec{F}_k^i poveikio greičiu \vec{v} materialųjį tašką, esantį padėtyje M , paveikė smūgio impulsas (55 pav.). Materialusis taškas per akimirsnį pakeitė kryptį ir judėjimo greitį, kuris įgijo reikšmę \vec{u} . Kadangi smūgio laikas yra be galo mažas, laikoma, kad taško poslinkis per šį laiko tarpą taip pat yra be galo mažas. Todėl tariame, kad taško koordinatės smūgio metu nesikeičia.

Tuo atveju kai mechaninės sistemos materialuosius taškus vienu metu veikia išorinės ir vidinės smūgio jėgos, išreikštos impulsais, judesio kiekio teoremą užrašome vienam sistemos taškui, tardami, kad bet kurio masės m_k taško greitis smūgio veikimo pradžioje yra \vec{v}_k , o veikimo pabaigoje \vec{u}_k . Taigi turėsime:

$$m_k \vec{u}_k - m_k \vec{v}_k = \vec{S}_k^i + \vec{S}_k^v. \quad (207)$$

Susumavę tokias lygtis pagal visus sistemos taškus, gausime:

$$\sum_{k=1}^n m_k \vec{u}_k - \sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_k = \sum_{k=1}^n \vec{S}_k^i + \sum_{k=1}^n \vec{S}_k^v.$$

Tariame, kad mechaninės sistemos taškų judesio kiekių geometrinė suma smūgio jėgų veikimo pabaigoje lygi sistemos judesio kiekiui, t. y. $\vec{K} = \sum_{k=1}^n m_k \vec{u}_k$, o pradžioje – $\vec{K}_0 = \sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_k$, be to, pagal vidinių jėgų savybes $\sum_{k=1}^n \vec{S}_k^v = 0$. Todėl mechaninės sistemos judesio kiekio teoremą smūgiui galime užrašyti taip:

$$\vec{K} - \vec{K}_0 = \sum_{k=1}^n \vec{S}_k^i, \quad (208)$$

t. y. *mechaninės sistemos judesio kiekio pokytis per smūgio laiko tarpą lygus visų sistemos taškų veikiančių išorinių smūgio impulsų geometrinei sumai.*

Projektuodami į Dekarto koordinatinių ašis, gauname:

$$\begin{cases} K_x - K_{0x} = \sum_{k=1}^n S_{kx}^i, \\ K_y - K_{0y} = \sum_{k=1}^n S_{ky}^i, \\ K_z - K_{0z} = \sum_{k=1}^n S_{kz}^i. \end{cases} \quad (209)$$

Iš lygčių matyti, kad *mechaninės sistemos judesio kiekio projekcijos į bet kokią ašį pokytis per smūgio laiko tarpą lygus visų sistemos taškus veikiančių išorinių smūgio impulsų projekcijų algebrinei sumai.*

Iš (208) priklausomybės gausime, kad jeigu visų sistemos taškus veikiančių išorinių smūgio impulsų geometrinė suma lygi nuliui, t. y. $\sum_{k=1}^n \vec{S}_k^i = 0$, tai $\vec{K} = \vec{K}_0$ ir $\vec{u}_C = \vec{v}_0$. Iš čia išplaukia išvada, kad kai mechaninę sistemą veikia vien vidiniai smūgio impulsai, sistemos judesio kiekis nekinta.

Pavyzdžiui, artilerijos sviedinys sprogska skridamas ore. Jo masės centras judės toliau taip pat, kaip ir iki sprogo.

Atsižvelgdami į (24) formulę, išreiškiame sistemos judesio kiekius iki ir po smūgio sistemos mase M ir sistemos masės centro greičiais, t. y. $\vec{K} = M\vec{u}_C$ ir $\vec{K}_0 = M\vec{v}_C$. Tuomet mechaninės sistemos judesio kiekio teoremą smūgiui galime užrašyti taip:

$$M\vec{u}_C - M\vec{v}_C = \sum_{k=1}^n \vec{S}_k^i. \quad (210)$$

Lygtis (210) parodo mechaninės sistemos masės centro greičio kitimą dėl smūgio.

4.2. Kinetinio momento teorema smūgiui

Kiekvienam mechaninės sistemos materialiajam taškui M_i pagal (207) formulę užrašysime judesio kiekio teoremą smūgiui:

$$m_k \vec{u}_k - m_k \vec{v}_k = \vec{S}_k^i + \vec{S}_k^v.$$

Lygties narius vektoriškai padauginę iš taško padėties vektoriaus laisvai pasirinkto centro O atžvilgiu \vec{r}_k , turėsime:

$$\vec{r}_k \times m_k \vec{u}_k - \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k = \vec{r}_k \times \vec{S}_k^i + \vec{r}_k \times \vec{S}_k^v. \quad (211)$$

Sistemos taškui M_i gautą lygtį (211) perrašome visiems mechaninės sistemos taškams ir jas sudedame:

$$\sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times m_k \vec{u}_k) - \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k) = \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times \vec{S}_k^i) + \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times \vec{S}_k^v). \quad (212)$$

čia $\sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times m_k \vec{u}_k) = \vec{L}$ – sistemos kinetinis momentas centro O atžvilgiu smūgio pabaigoje;

$\sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k) = \vec{L}_0$ – sistemos kinetinis momentas centro O atžvilgiu smūgio pradžioje;

$\sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times \vec{S}_k^i) = \sum_{k=1}^n \vec{M}_0(\vec{S}_k^i)$ – visų sistemos taškus veikiančių išorinių smūgio impulsų suminis

vektorinis momentas centro O atžvilgiu; $\sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times \vec{S}_k^v) = \sum_{k=1}^n \vec{M}_0(\vec{S}_k^v)$ – visų sistemos taškus

veikiančių vidinių jėgų smūgio impulsų suminis vektorinis momentas centro O atžvilgiu;

$\sum_{k=1}^n \vec{M}_0(\vec{S}_k^v) = 0$ – pagal vidinių jėgų savybes.

Todėl galime užrašyti:

$$\vec{L} - \vec{L}_0 = \sum_{k=1}^n \vec{M}_0(\vec{S}_k^i). \quad (213)$$

Taigi gavome mechaninės sistemos kinetinio momento teoremą smūgiui, pagal kurią *mechaninės sistemos kinetinio momento pokytis bet kurio nejudamo centro atžvilgiu smūgio atveju yra lygus visų išorinių smūgio impulsų vektorinių momentų geometrinei sumai to paties centro atžvilgiu.*

Projektuodami vektorinę lygtį (213) į Dekarto koordinačių ašis, turėsime skaliarines lygtis:

$$\begin{cases} L_x - L_{0x} = \sum_{k=1}^n M_x(\vec{S}_k^i), \\ L_y - L_{0y} = \sum_{k=1}^n M_y(\vec{S}_k^i), \\ L_z - L_{0z} = \sum_{k=1}^n M_z(\vec{S}_k^i). \end{cases} \quad (214)$$

Jeigu išoriniai smūgio impulsai lygūs nuliui, tai iš (213) išraiškos išplaukia, kad $\vec{L} = \vec{L}_0$, t. y. jeigu mechaninės sistemos taškus veikia vien vidiniai smūgio impulsai, tai sistemos kinetinis momentas bet kokio centro atžvilgiu nekinta.

4.3. Atsistatymo koeficientas

Nagrinėsime kūno, pavyzdžiui, kamuolio smūgį į nejudamą paviršių (56 pav.). Tarkime, kad kamuolio masės centro greitis smūgio pradžioje \vec{v} sutampa normale kontakto paviršiui. Toks smūgis yra *tiesioginis centrinis smūgis*. Po smūgio kamuolys įgyja greitį \vec{u} , kuris nukreiptas ta pačia normale, bet priešinga kryptimi. Greičio \vec{u} ir greičio \vec{v} santykis vadinamas *atsistatymo koeficientu*, t. y.:

$$k = \frac{u}{v}. \quad (215)$$

Užrašysime kūno judesio kiekio pokyčio teoremos projekcijų į normalę išraiškas pirmajai smūgio fazei:

$$m \cdot 0 - m \cdot v = -S_1,$$

antrajai smūgio fazei:

$$-m \cdot u - m \cdot 0 = S_2.$$

Iš čia gausime smūgio fazių impulsų projekcijas:

$$S_1 = mv,$$

$$S_2 = -mu,$$

arba absoliučiaisiais dydžiais:

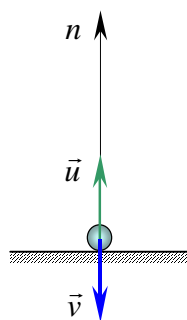
$$|S_1| = mv,$$

$$|S_2| = mu.$$

Tuomet atsistatymo koeficientas gali būti užrašytas taip:

$$k = \frac{u}{v} = \frac{m \cdot u}{m \cdot v} = \frac{S_2}{S_1}, \quad (216)$$

todėl galime pabrėžti, kad atsistatymo koeficientas lygus antrosios smūgio fazės impulso santykiui su pirmosios smūgio fazės impulsu.



56 pav. Tiesioginis centrinis smūgis

Atsistatymo koeficientas priklauso tik nuo kamuolio ir nejudamo paviršiaus medžiagos, tačiau specializuotoje techninėje literatūroje yra nurodoma, kad atsistatymo koeficientui tam tikrą nežymią įtaką turi pradinis smūgio greitis, kūnų kontakto ploto forma ir kūnų masių santykis.

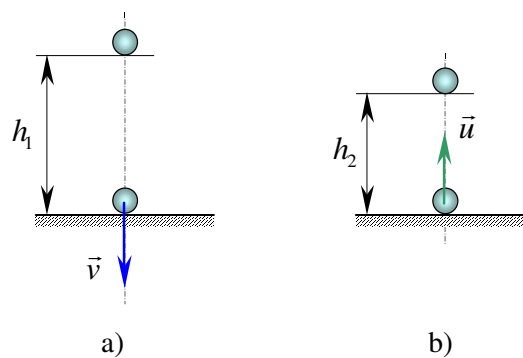
Praktikoje pasitaiko tokių atvejų:

- 1) $k = 0$, t. y. kai kamuolio greitis po smūgio $u = 0$; šiuo atveju turėsime absoliučiai

- netamprų smūgį;
- 2) $k = 1$; šiuo atveju turėsime tamprų smūgį, kurio metu teoriškai $u = v$;
 - 3) $0 < k < 1$; šiuo atveju turėsime ne visai tamprų smūgį ir $u < v$.

Atsistatymo koeficiento skaičiavimas

Tarkime, kad kamuolys (57 pav., a) iš aukščio h_1 laisvai krinta nejudamo paviršiaus link. Iki kontakto su paviršiumi kamuolio įgytas greitis skaičiuojamas pagal žinomą kinematikos formulę $v = \sqrt{2gh_1}$. Po kamuolio kontakto su paviršiumi prasideda pirmoji smūgio fazė. Pirmosios fazės metu kamuolys susispaus iki tol, kol jo suartėjimo greitis pasidarys lygus nuliui. Šios fazės metu kamuolyje atsiranda didėjančios tamprumo jėgos ir fazės pabaigoje jos pasiekia maksimaliąsias reikšmes.



57 pav. Atsistatymo koeficiento skaičiavimas

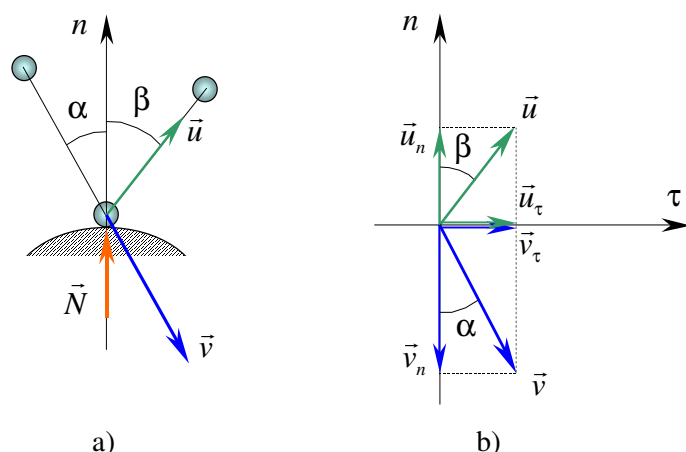
Antrosios fazės pradžioje, veikiant tamprumo jėgoms, atkuriama geometrinė kamuolio forma, kamuolio masės centras pradeda judėti į viršų ir įgyja greitį. Antrosios fazės pabaigoje kamuolio kontaktas su paviršiumi nutraukiamas ir kamuolys greičiu \vec{u} juda į viršų, kol pakyla į aukštį h_2 (57 pav., b). Tarp kamuolio pradinio judėjimo greičio \vec{u} ir judėjimo aukščio h_2 yra kinematikoje išvesta priklausomybė, pagal kurią $u = \sqrt{2gh_2}$. Tuomet atsistatymo koeficientui skaičiuoti skirta formulė (207) bus tokia:

$$k = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}. \quad (217)$$

Eksperimentiškai gautos kai kurios atsistatymo koeficiento reikšmės yra tokios: medis į medį $k = 0,50$; plienas į plieną $k = 0,56$; dramblio kaulas į dramblio kaulą $k = 0,89$; stiklas į stiklą $k = 0,94$; varis į varį $k = (0,3 - 0,4)$.

4.4. Ekscentrinis kūno smūgis į nejudantį glotnų paviršių

Tarkime, judantis kamuolys smūgio metu pasiekia glotnų paviršių greičiu \vec{v} , kuris sudaro su normale kritimo kampą α . Po smūgio judančio kamuolio greitis \vec{u} su normale sudaro atšokimo kampą β (58 pav., a).



58 pav. Ekscentrinis kūno smūgis

Skaičiavimo schemoje (58 pav., b) parodome visus greičius smūgio kontakto vietoje, paviršiui statmeną ir į liestinę nukreiptus normalinę ir tangentinę ašis, kritimo ir atšokimo greičių dedamąsias pagal šias ašis ir atsiradusią smūgio kontakto vietoje reakcijos jėgą.

Žinome, kad materialiojo taško judesio kiekis, įgytas smūgio metu, lygus smūgio impulsui. Užrašysime judančiam kamuoliui judesio kiekio pokyčio teoremos išraišką:

$$m\vec{u} - m\vec{v} = \vec{S} = \int_0^t \vec{N} dt,$$

kurią suprojektavę į normalinę ir tangentinę ašis, gausime:

$$\begin{cases} mu_n + mv_n = S, \\ mu_\tau - mv_\tau = 0. \end{cases} \quad (218)$$

Iš antrosios lygties išplaukia, kad $u_\tau = v_\tau$, t. y. greičių tangentinės dedamosios iki smūgio ir po jo yra lygios.

Kai turime tiesioginį centrinį smūgį, atsistatymo koeficientas randamas pagal (215) formulę. Esant ekscentriniam smūgiui galime užrašyti, kad atsistatymo koeficientas lygus normalės kryptimi išdėstytų greičių santykiui, t. y.

$$k = \frac{|u_n|}{|v_n|}. \quad (219)$$

Iš čia išplaukia, kad $u_n = k \cdot v_n$. Iš (58 pav., b) galime užrašyti, kad $v_\tau = v \cdot \sin \alpha$ ir $v_n = v \cdot \cos \alpha$. Be to, turėjome $u_\tau = v_\tau$, todėl galime rasti kamuolio masės centro greitį po smūgio:

$$u = \sqrt{u_\tau^2 + u_n^2} = \sqrt{v_\tau^2 + k^2 v_n^2} = \sqrt{(v \sin \alpha)^2 + (kv \cos \alpha)^2},$$

arba galiausiai turėsime:

$$u = v \cdot \sqrt{\sin^2 \alpha + k^2 \cos^2 \alpha}. \quad (220)$$

Taip pat galime užrašyti:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_\tau}{|v_n|}.$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{u_\tau}{|u_n|} = \frac{v_\tau}{k \cdot |v_n|} = \frac{1}{k} \operatorname{tg} \alpha.$$

Gausime, kad

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{k} \operatorname{tg} \alpha. \quad (221)$$

Jeigu atsistatymo koeficientas $k < 1$, turėsime $\operatorname{tg} \beta > \operatorname{tg} \alpha$. Todėl išplaukia išvada, kad

$$\beta > \alpha, \quad (222)$$

t. y. *smūgio metu atšokimo kampas didesnis negu kritimo kampas.*

Tuo atveju, kai turime absoliučiai tamprų smūgį, atsistatymo koeficientas $k = 1$. Gausime:

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha$$

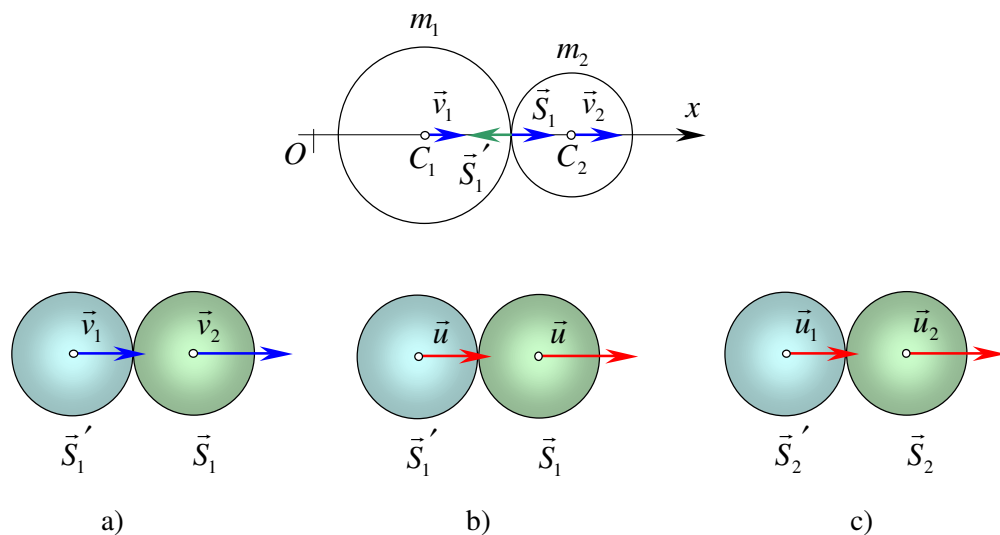
ir

$$\beta = \alpha, \quad (223)$$

t. y. *tik absoliučiai tampraus smūgio metu atšokimo kampas lygus kritimo kampui.*

4.5. Tiesioginis centrinis dviejų kūnų smūgis

Tarp dviejų kūnų A ir B , kurių masės m_1 ir m_2 , įvyksta tiesioginis centrinis smūgis. Tokį atvejį turime, kai kūnų masių centrai yra vienoje normalėje, pagal kurią yra nukreipti kūnų masių centrų greičiai (59 pav., a).



59 pav. Tiesioginis centrinis smūgis

Tegul pirmojo kūno greitis v_1 yra didesnis už antrojo kūno greitį v_2 , t. y. pirmasis kūnas paveja antrąjį ir jį smūgiuoja. Prasideda pirmoji smūgio fazė, kurios metu kūnai deformuojasi, atstumas tarp kūnų masės centrų mažėja, tamprumo jėgos didėja. Pirmosios fazės pabaigoje, kai kūnų deformavimasis pasibaigia, tamprumo jėgos bus maksimalios, o kūnų masių centrai judės vienodu greičiu u (59 pav., b). Toliau prasideda antroji smūgio fazė, kurios metu veikiant tamprumo jėgoms kūnų geometrinės formos atkuriamos, o kūnų masių centrai įgyja tam tikrus greičius. Antrosios fazės pabaigoje, kai kontaktas tarp kūnų nutraukiamas, pirmasis kūnas įgyja greitį u_1 , o antrasis u_2 (59 pav., c).

Užrašysime smūgio pagrindines lygtis (205) kiekvienam kūnui:

$$\begin{cases} m_1 u_1 - m_1 v_1 = -S, \\ m_2 u_2 - m_2 v_2 = S. \end{cases} \quad (224)$$

Šiose lygtyse S – smūgio impulso, kuris veikia kiekvieną kūną, projekcija į ašį Ox arba tiesiog smūgio impulsas.

Sudėsime abi lygtis ir gausime $m_1 u_1 - m_1 v_1 + m_2 u_2 - m_2 v_2 = 0$. Todėl:

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2. \quad (225)$$

Galime padaryti išvadą, kad kūnų sistemos vidinės jėgos smūgio metu nekeičia sistemos judesio kiekio, t. y. kūnų sistemos judesio kiekis po smūgio lygus sistemos judesio kiekiui iki smūgio.

Lygtyse (224) yra daug nežinomųjų dydžių, tai kūnų greičiai po smūgio ir smūgio impulso reikšmė.

Nagrinsime pirmąją smūgio fazę.

Įvertinę tai, kad smūgio metu kūnų sistemos judesio kiekis nekinta, užrašysime sistemos judesio kiekio išraiškas fazės pradžioje ir pabaigoje. Laikome, kad smūgio pabaigoje kūnai judės vienodais greičiais u , ir palyginsime sistemos judesio kiekius:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u; \quad (226)$$

iš čia gausime

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \quad (227)$$

Galime padaryti išvadą, kad tuo atveju, kai smūgis yra visiškai netamprus, po susidūrimo kūnai judės kartu vienodu greičiu u .

Užrašysime smūgio impulsų reikšmes kiekvienam kūnui pirmosios fazės laikotarpiui, įvertinę tai, kad smūgio impulsai, veikiantys kiekvieną kūną, yra lygūs ir nukreipti viena tiese priešingomis kryptimis.

$$\begin{cases} m_1 u - m_1 v_1 = -S'_1, \\ m_2 u - m_2 v_2 = S_1. \end{cases} \quad (228)$$

Rasime smūgio impulsą, veikiantį pirmosios fazės laikotarpiu, imdami greitį po smūgio pagal (227) formulę. Turėsime:

$$S_1 = m_2 u - m_2 v_2 = m_2 \left(\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \right) - m_2 v_2.$$

Atlikę nesudėtingus matematinius skaičiavimus gausime smūgio impulsą, veikiantį pirmosios fazės laikotarpiu:

$$S_1 = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}. \quad (229)$$

Antrosios smūgio fazės metu, kai veikiant tamprumo jėgoms kūnų geometrinės formos atsikuria, jų masių centrai, fazės pradžioje turėję vienodus greičius u , įgyja greičius u_1 ir u_2 . Užrašykime antrosios fazės laikotarpiui smūgio impulsų reikšmes kiekvienam kūnui atskirai:

$$\begin{cases} m_1 u_1 - m_1 u = -S'_2, \\ m_2 u_2 - m_2 u = S_2. \end{cases} \quad (230)$$

Laikydami, kad smūgio atsistatymo koeficientas pagal (216) formulę lygus ne tik greičių, bet ir antrosios fazės smūgio impulso santykiui su pirmosios fazės smūgio impulsu, t. y. $k = \frac{S_2}{S_1}$, galime užrašyti, kad $S_2 = k \cdot S_1$. Tuomet smūgio impulsų teoremos išraiška bus tokia:

$$\begin{cases} m_1 u_1 - m_1 u = -k \cdot S'_1, \\ m_2 u_2 - m_2 u = k \cdot S_1. \end{cases} \quad (231)$$

Padaliję (228) lygtis iš (231) lygčių, gausime:

$$\frac{m_1 u_1 - m_1 u}{m_1 u - m_1 v_1} = \frac{k S'_1}{S'_1} \quad \text{ir} \quad \frac{m_2 u_2 - m_2 u}{m_2 u - m_2 v_2} = \frac{k S_1}{S_1}.$$

Atlikę matematinius veiksmus, turėsime dvi atsistatymo koeficiento išraiškas:

$$k = \frac{u_1 - u}{u - v_1} \quad \text{ir} \quad k = \frac{u_2 - u}{u - v_2}, \quad (232)$$

iš kurių galime rasti kūnų greičius po smūgio, t. y.

$$\begin{cases} u_1 = u + k(u - v_1), \\ u_2 = u + k(u - v_2), \end{cases}$$

arba galiausiai turėsime:

$$\begin{cases} u_1 = u(1+k) - kv_1, \\ u_2 = u(1+k) - kv_2. \end{cases} \quad (233)$$

Įvertinę kūnų bendro greičio reikšmę u pirmosios fazės pabaigoje pagal (227) formulę ir atlikę nesudėtingus skaičiavimus, gausime, kad po smūgio kūnų greičiai bus:

$$\begin{cases} u_1 = v_1 - (1+k) \frac{m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2), \\ u_2 = v_2 + (1+k) \frac{m_1}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2). \end{cases} \quad (234)$$

Iš formulių (233) galime rasti greičių skirtumą $u_2 - u_1 = -kv_2 + kv_1 = k(v_1 - v_2)$, iš kurio gausime galutinę atsistatymo koeficiento reikšmę:

$$k = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2}. \quad (234 \text{ a})$$

Galime padaryti išvadą, kad dviejų kūnų smūgio atsistatymo koeficientas lygus jų reliatyviųjų greičių prieš ir po smūgio santykiui.

Iš smūgio pagrindinės lygties (205) galime užrašyti smūgio impulsą, kuris veikia kiekvieną kūną per visą smūgio laikotarpį, pavyzdžiui, antrajam kūnui:

$$m_2 u_2 - m_2 v_2 = S. \quad (235)$$

Žinodami iš (234) formulės antrojo kūno greitį po smūgio, iš (235) formulės galime rasti visą smūgio impulsą, veikiantį kiekvieną kūną smūgio metu:

$$S = m_2 (u_2 - v_2) = m_2 \left[v_2 + (1+k) \frac{m_1}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2) - v_2 \right] = (1+k) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2).$$

Taigi gavome smūgio impulso, kuris veikia kiekvieną kūną smūgio metu, reikšmę:

$$S = (1+k) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2). \quad (236)$$

Gavome skaičiavimo formules, kurias taikant galima rasti pagrindinių smūgio charakteristikų dydžius.

Pavyzdžiui, jeigu turime *absoliučiai netamprų smūgį*, kurio atsistatymo koeficientas $k = 0$, tai iš (234) formulių rasime kūnų greičių reikšmes po smūgio:

$$\begin{cases} u_1 = v_1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2) = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = u, \\ u_2 = v_2 + \frac{m_1}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2) = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = u. \end{cases} \quad (237)$$

Galime padaryti išvadą, kad jeigu smūgis yra absoliučiai netamprus, tai jo pabaigoje kūnų greičiai bus vienodi ir kūnai judės kartu. Šiuo atveju smūgio impulso reikšmė, išreikšta (236) formule, bus skaičiuojama pagal tokią formulę:

$$S = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2). \quad (238)$$

Absoliučiai tamprus smūgio atveju, kai atsistatymo koeficientas $k = 1$, kūnų greičių reikšmės po smūgio randamos iš (234) pagal tokias formules:

$$\begin{cases} u_1 = v_1 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2), \\ u_2 = v_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2), \end{cases} \quad (239)$$

o smūgio impulso reikšmė gali būti skaičiuojama pagal tokią formulę:

$$S = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2). \quad (240)$$

Matome, kad smūgio impulsas, kai smūgis absoliučiai tamprus, bus du kartus didesnis, negu tuo atveju, kai smūgis absoliučiai netamprus. Tai paaiškinama tuo, kad prie smūgio impulso deformacijos fazės prisideda smūgio impulsas deformacijai atkurti.

Kai smūgis absoliučiai tamprus ($k = 1$) ir kai kūnų masės yra vienodos ($m_1 = m_2 = m$), iš (239) gausime, kad $u_1 = v_2$ ir $u_2 = v_1$, t. y. kūnai „apsikeičia“ greičiais.

4.6. Karno teorema

Kai smūgis nėra absoliučiai tamprus, kūnų sistemos kinetinė energija po smūgio yra mažesnė negu prieš smūgį, nes dalis kūnų kinetinės energijos virsta šilumine energija ir yra sunaudojama kūnams virpinti. Todėl kūno greitis \vec{u} po smūgio bus mažesnis už jo greitį \vec{v} iki smūgio. Vadinasi, ir po tampriojo, ir po plastiškojo smūgio kūnų kinetinė energija mažėja.

Kai smūgis tiesus, centrinis ir plastiškasis, kūnų sistemos kinetinė energija prieš smūgį:

$$T_0 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}, \quad (241)$$

po smūgio:

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2; \quad (242)$$

čia m_1 ir m_2 – kūnų masės; v_1 ir v_2 – kūnų greičiai prieš smūgį; u – bendras kūnų greitis įvykus smūgiui.

Dėl smūgio prarastos kinetinės energijos dydis gali būti rastas kaip energijų skirtumas, t. y.

$$\Delta T = T_0 - T. \quad (243)$$

Atsižvelgę į bendrąją kūnų greičio išraišką (227) pirmosios fazės pabaigoje po nedidelių matematinių perskaičiavimų gausime, kad

$$\Delta T = \frac{1}{2}m_1(v_1 - u)^2 + \frac{1}{2}m_2(v_2 - u)^2. \quad (244)$$

Skirtumai $(v_1 - u)$ ir $(v_2 - u)$ vadinami *prarastais greičiais*, jie nustato, kiek sumažėjo kūnų greičiai smūgio metu. Išvesta formulė (244) yra Karno teoremos matematinė išraiška: *plastiškojo smūgio metu prarasta kūnų kinetinė energija lygi tai energijai, kurią kūnai turėtų, judėdami prarastais greičiais.*

Pavyzdžiui, jeigu masės m_1 kūnas, judėjęs greičiu v_1 , atsitrenka į m_2 masės nejudantį kūną, tai bendras kūnų greitis po plastiškojo smūgio bus:

$$u = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Abiejų kūnų sistemos kinetinė energija prieš smūgį:

$$T_0 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2,$$

po smūgio

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1^2.$$

Taigi gauname galutinę kinetinės energijos išraišką:

$$T = \frac{m_1}{m_1 + m_2} T_0. \quad (245)$$

Galime teigti, kad jeigu smūgiuojančio kūno masė m_1 yra daug didesnė už kūno, į kurį smūgiuoja, masę m_2 , t. y. $m_1 \gg m_2$, tai iš formulės (245) matyti, kad $T \approx T_0$. Iš čia išplaukia, kad po smūgio sistema juda, turėdama beveik tą pačią kinetinę energiją, kaip ir prieš smūgį. Taip smogti patariama kalant vinį arba polius. Pavyzdžiui, dyzelinio kūjo, kuriuo

kalamos sijos į gruntą, masė turi būti kuo didesnė tam, kad sija nesideformuotų. Arba, jei kūno, esančio rimties būsenos, masė m_2 daug didesnė už smūgiuojančią masę m_1 , t. y. $m_2 \gg m_1$, iš formulės (245) gausime, kad $T \approx 0$. Galime padaryti išvadą, kad beveik visa judančio kūno kinetinė energija sunaudojama kūnams deformuoti. Todėl priekalas ir kalamoji detalė turi būti gerokai sunkesni nei kūjis. Tada visa kūjo kinetinė energija bus sunaudota kalamai detalei deformuoti.

4.7. Smūgio jėgos poveikis besisukančiam apie nejudamąją ašį kūnui

Tarkime, kad standusis kūnas sukasi apie nejudamąją ašį Oz . Tuo momentu, kai kampinis greitis buvo ω_0 , kūną veikė išorinis smūgio impulsas.

Užrašysime kūno kinetinio momento teoremą:

$$L_z - L_{0z} = \sum_{k=1}^n M_z(\vec{S}_k^i),$$

pagal kurią kinetinio momento pokytis sukimosi ašies atžvilgiu smūgio atveju lygus visų išorinių smūgio impulsų momentų geometrinei sumai tos pačios ašies atžvilgiu.

Žinome, kad pagal (28) esant sukamajam judėjimui standžiojo kūno kinetinis momentas sukimosi ašies atžvilgiu lygus kūno inercijos momento sukimosi ašies atžvilgiu ir kūno kampinio greičio sandaugai. Tuomet kinetinio momento teoremą galime užrašyti taip:

$$I_z \omega - I_z \omega_0 = \sum_{k=1}^n M_z(\vec{S}_k^i),$$

iš čia gausime:

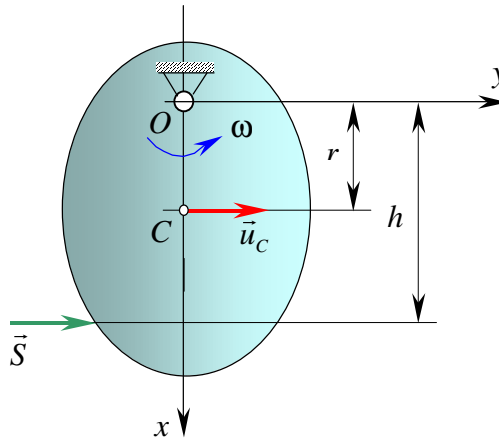
$$\omega - \omega_0 = \frac{\sum_{k=1}^n M_z(\vec{S}_k^i)}{I_z}. \quad (246)$$

Padarome išvadą, kad besisukančio apie nejudamąją ašį standžiojo kūno kampinio greičio pokytis, kai veikia išorinis smūgio impulsas, lygus smūgio impulsų momentų sumai sukimosi ašies atžvilgiu, padalytai iš kūno inercijos momento tos pačios ašies atžvilgiu.

4.8. Smūgio centras

Turime kietąjį kūną, galintį sukis apie ašį Oz , kuri yra statmena brėžinio plokštumai. Šią plokštumą laikome kūno simetrijos plokštuma. Kūno masės centras taške C (60 pav.).

Tarkime, kūno simetrijos plokštumoje kūną veikia smūgio impulsas \vec{S} , kurio poveikį patiria visi kūno taškai, taip pat kūno guolių įtvirtinimo taškai. Nustatysime sąlygas, kada kūną veikiantis smūgis nebus perduotas kūno guoliams. Parenkame tašką O kaip koordinatų pradžią ir nukreipiame ašis Ox ir Oy taip, kad ašis Ox eitų per kūno masės centrą C .



60 pav. Smūgio centras

Tariame, kad prieš smūgį kūnas nejudėjo, t. y. jo kampinis greitis $\omega_0 = 0$. Po smūgio impulso poveikio smūgio pabaigoje kūnas įgijo kampinį greitį ω , o kūno masės centras įgijo linijinį greitį $u_C = \omega \cdot r$, kuris esant sukamajam judėjimui yra statmenas judėjimo spinduliui arba lygiagretus su ašimi Oy . Taikydami formulę (210), užrašysime kūnui judesio kiekio teoremos išraišką smūgiui:

$$M\vec{u}_C = \vec{S} + \vec{S}_O; \quad (247)$$

čia \vec{S} – kūną veikiantis smūgio impulsas, kurio projekcijos į koordinatinių ašis yra S_x ir S_y ; \vec{S}_O – kūno guolių reakcijos smūgio impulsas, veikiantis kūno simetrijos plokštumoje, kurio projekcijos į koordinatinių ašis yra S_{Ox} ir S_{Oy} ; M – kūno masė.

Projektuodami į koordinatinių ašis teoremos išraišką (247), gausime:

$$\begin{cases} 0 = S_x + S_{Ox}, \\ Mu_C = S_y + S_{Oy}. \end{cases}$$

Pagal sąlygą guolių reakcijos smūgio impulsas yra lygus nuliui, t. y. $\vec{S}_O = 0$. Tuomet gausime, kad ir jo projekcijos $S_{Ox} = S_{Oy} = 0$.

Galime užrašyti:

$$\begin{cases} S_x = 0, \\ S_y = Mu_C. \end{cases}$$

Iš čia išplaukia, kad smūgis turi būti nukreiptas statmenai ašiai Ox , t. y. statmenai tiesei, kuri jungia kūno sukimosi ašį ir jo masės centrą. Tuomet smūgio impulso projekcija į Oy ašį bus lygi smūgio impulsui, t. y.

$$S_y = S = Mu_c.$$

Atsižvelgę į tai, kad masės centro greitis $u_c = \omega \cdot r$, gausime tokio pavidalo smūgio impulso reikšmę:

$$S = M\omega r. \quad (248)$$

Pagal (246) užrašysime besisukančio apie nejudamąją ašį kūno kampinį greitį sukimosi ašies atžvilgiu po smūgio impulso poveikio, tardami, kad smūgio pradžioje kūnas nejudėjo. Turėsime:

$$\omega = \frac{\sum_{k=1}^n M_z(\vec{S}_k)}{I_z} = \frac{S \cdot h}{I_z}; \quad (249)$$

čia I_z – kūno inercijos momentas apie sukimosi ašį; h – atstumas nuo kūno pakabinimo vietos iki smūgio impulso veikimo tiesės.

Iš (249) formulės gauname:

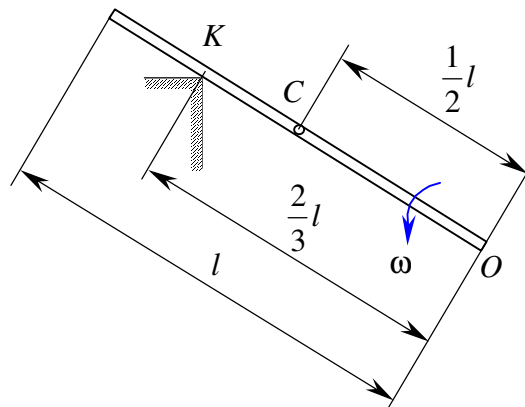
$$h = \frac{I_z \omega}{S} = \frac{I_z \omega}{M\omega r} = \frac{I_z}{Mr}.$$

Vadinasi, tiesė, kuria kūną veikia smūgio impulsas, turi būti nutolusi nuo kūno sukimosi ašies atstumu:

$$h = \frac{I_z}{Mr}. \quad (250)$$

Tašką K , esantį šios tiesės ir Ox ašies sankirtos taške, vadiname *smūgio centru*.

Dirbantys su kūjais, plaktukais ir kitais smogiamaisiais įrankiais žmonės renka tokio dydžio įrankio kotą, kad nebūtų smūgio impulso reakcijos į ranką. Teniso raketė yra sukonstruota taip, kad taisyklingai mušant kamuoliuką, pataikius į tinkliuko centrą, sąnariuose nebūtų jaučiama smūgio reakcija.



61 pav. Strypo smūgio centras

Apskaičiuosime homogeninio tiesaus strypo OA , kurio ilgis l , smūgio centrą (61 pav.). Jeigu strypo inercijos momentas $I_z = \frac{Ml^2}{3}$, o masės centras strypo vidurio taške C , tai atstumas iki smūgio centro randamas pagal (250) formulę:

$$OK = \frac{I_z}{Mr} = \frac{\frac{Ml^2}{3}}{M \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}l.$$

Strypo smūgio centras yra atstumu $\frac{2}{3}l$ nuo sukimosi ašies, t. y. jeigu smūgio metu strypo kontakto su paviršiumi vieta bus taškas K , tai strypą laikanti ranka nepajus smūgio poveikio.

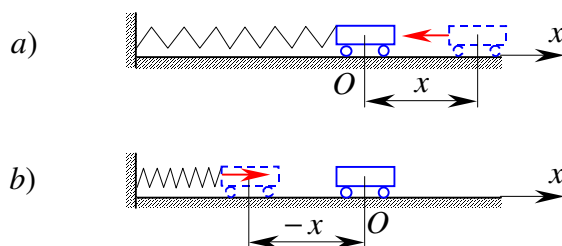
5. SVYRAVIMAI

Svyravimai – tai judėjimas, kurio vaidmuo inžinerijoje itin svarbus. Mašinų, transporto priemonių, mechaninių prietaisų ir mechanizmų judėjimas visada susijęs su svyravimais. Kai svyravimai viršija leidžiamąsias ribas, gali prasidėti mechanizmo arba konstrukcijos irimas. Tačiau tam tikrų mechanizmų funkcionavimas yra pagrįstas tik svyravimo reiškiniu (pavyzdžiui, betono plakimo vibratoriai). Todėl svarbu žinoti svyruojančių objektų charakteristikas ir priežastis, kurios sukelia svyravimus.

Svyravimo procesams yra būdinga, kad objekto judėjimas yra kartotinis, t. y. po tam tikro laiko, kuris vadinamas *periodu*, visos judėjimo charakteristikos pasikartoja.

Svyravimo teorija nagrinėjama specialiojoje literatūroje, todėl apsiribosime paprasčiausių svyravimo procesų analize.

Nagrinėsime materialiojo taško tiesiaeičius svyravimus dėl atstatomosios jėgos poveikio. Tarp jėgų, veikiančių materialųjį tašką, ypač svarbios yra *atstatomosios jėgos*, kurios, veikdamos tašką, priverčia jį grįžti į pusiausvyros padėtį. Šių jėgų reikšmės priklauso nuo taško nukrypimo nuo pusiausvyros padėties ir yra nukreiptos šiam nukrypimui priešinga kryptimi. Šių jėgų atsiradimo priežastys yra įvairios. Pavyzdžiui, atstatomoji jėga atsiranda dėl spyruoklės standumo ir deformavimosi krypties (62 pav.).



62 pav. Spyruoklės atstatomoji jėga

Atstatomoji jėga proporcinga poslinkiui arba spyruoklės deformacijai, t. y.

$$F = c \cdot |x|; \quad (251)$$

čia c – spyruoklės standumo koeficientas.

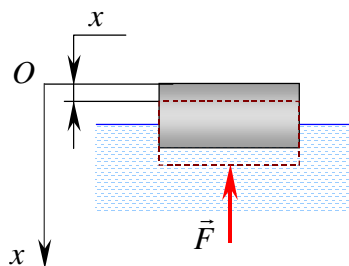
Atstatomosios jėgos projekcija į ašį Ox 62 pav., a, pavaizduotu atveju lygi:

$$F_x = -F = -c \cdot x, \quad (252)$$

o 62 pav., b, pavaizduotu atveju:

$$F_x = F = c \cdot (-x) = -c \cdot x. \quad (253)$$

Pavyzdžiui, pontoną vandenyje (63 pav.) veikia vandens Archimedo jėga, kuri šiuo atveju yra atstatomoji jėga, nes yra nukreipta poslinkiui priešinga kryptimi.



63 pav. Vandens atstatomoji jėga

Dėl atstatomosios jėgos poveikio materialusis taškas juda apie pusiausvyros padėtį viena kryptimi, sustoja ir tuomet juda priešinga kryptimi. Vėliau judėjimas kartojasi. Matome, kad vyksta materialiojo taško svyravimai apie pusiausvyros padėtį.

Jeigu judėjimas vyksta besipriešinančiojoje aplinkoje, tai tašką be atstatomosios jėgos veiks ir pasipriešinimo jėga, kuri priklauso nuo besipriešinančios aplinkos ir taško judėjimo greičio. Judantį tašką gali veikti ir žadinančios jėgos, suteikiančios šiam taškui papildomų judėjimo impulsų.

Visais atvejais taško judėjimas aprašomas diferencialinėmis lygtimis, kurių sprendimas ir yra taško judėjimo analizė.

Pagal veikiančių jėgų poveikį materialiojo taško svyravimai skirstomi į:

- 1) laisvuosius;
- 2) gęstančiuosius;
- 3) priverstinius nesant slopinimui;
- 4) priverstinius esant slopinimui.

5.1. Laisvieji svyravimai

Tarkime, materialusis masės m taškas, prikabinatas prie neištemptos c standumo spyruoklės galo (62 pav.), yra statinės pusiausvyros padėtyje.

Pastūmus šį tašką iš pusiausvyros padėties atstumu x , spyruoklėje atsiranda atstatomoji jėga \vec{F} , kurios projekcija į Ox ašį pagal (252) arba (253) turės tokią reikšmę:

$$F_x = -c \cdot x.$$

Užrašysime šiam taškui diferencialinę judėjimo lygtį:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x,$$

arba

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -c \cdot x.$$

Iš čia gausime tokią išraišką:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m}x = 0,$$

arba, pažymėję teigiamąjį dydį:

$$\frac{c}{m} = k^2, \quad (254)$$

galiausiai gausime:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0. \quad (255)$$

Turime tiesinę antrosios eilės diferencialinę lygtį su pastoviais koeficientais ir be laisvojo nario, kuri vadinama *laisvųjų svyravimų diferencialine lygtimi*. Iš tiesinių diferencialinių lygčių teorijos žinoma, kad šios lygties bendrasis sprendinys atitinka tokią išraišką:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (256)$$

Pirmoji (256) lygties išvestinė rodo taško greitį:

$$v = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \quad (257)$$

Irašę į judėjimo lygtį (256) greičio bendrąją išraišką (257) ir judėjimo pradines sąlygas, t. y. kai $t = 0$, taško padėtį x_0 ir greitį v_0 , gauname:

$$C_1 = x_0, \quad v_0 = C_2 k;$$

iš čia

$$C_2 = \frac{v_0}{k}.$$

Įvertinę rastų konstantų reikšmes, gausime diferencialinės lygties (255) sprendimo išraišką:

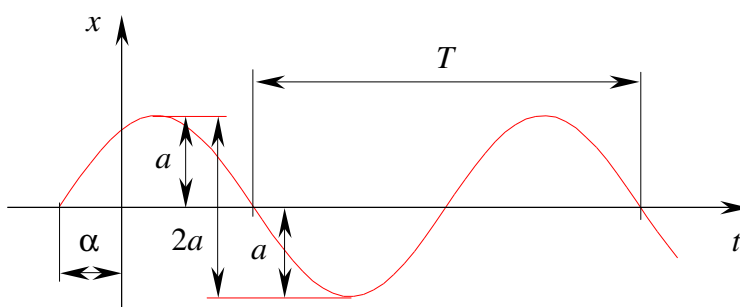
$$x = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt. \quad (258)$$

Jeigu laikysime, kad rastas konstantas C_1 ir C_2 galima išreikšti kitais pastoviais parametrais, pavyzdžiui, a ir α , t. y. $C_1 = a \sin \alpha$ ir $C_2 = a \cos \alpha$, tai diferencialinės lygties (255) sprendimo išraiška bus tokia:

$$x = a \sin(kt + \alpha); \quad (259)$$

čia a ir α yra pastovūs dydžiai. Gautoji išraiška (259) yra harmoninių svyravimų lygtis. Todėl, galime padaryti išvadą, kad, veikiant atstatomajai jėgai, kuri proporcinga atstumui nuo taško iki traukos centro, tiesiaiegiškai judančio materialiojo taško svyravimai bus harmoniniai.

Dydis a , t. y. taško didžiausias nuotolis nuo pusiausvyros padėties, vadinamas *svyravimų amplitude*. Argumentas $(kt + \alpha)$ vadinamas *svyravimų faze*, o dydis α vadinamas *pradine svyravimų faze* (fazės reikšmė pradinio laiko momentu, t. y. kai $t=0$). Matome, kad harmoninių svyravimų grafikas yra sinusoidė (64 pav.), kurios dviejų amplitudžių dydis $2a$ yra vadinamas *svyravimų juosta*.



64 pav. Laisvieji svyravimai

Materialiojo taško greitis, kai jo svyravimai yra harmoniniai, randamas kaip pirmoji judėjimo dėsnio išvestinė:

$$v = \frac{dx}{dt} = ak \cos(kt + \alpha). \quad (260)$$

Išvestinės ženklas rodo taško judėjimo kryptį konkrečiu laiko momentu. Svyravimo amplitudę a ir pradinę fazę α randame pagal judėjimo pradines sąlygas. Tegul pradinio laiko momentu $t=0$ taškas M yra padėtyje x_0 ir jo greitis šitame taške yra v_0 . Iš (259) ir (260) formulių, kai $t=0$, turėsime:

$$x_0 = a \sin \alpha \quad \text{ir} \quad v_0 = ak \cos \alpha.$$

Iš čia po nesudėtingų matematinių skaičiavimų gausime svyravimų amplitudės ir pradinės fazės reikšmes:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}} \quad \text{ir} \quad \text{tg} \alpha = \frac{kx_0}{v_0}. \quad (261)$$

Rasime svyravimų periodą T , t. y. mažiausią laiko tarpą, kuriam praėjus taškas sugrįžta į tą pačią padėtį ir tuo pačiu greičiu. Sinuso ir kosinuso periodas yra 2π . Todėl, praėjus

laikotarpiui T , svyravimų fazė didėja dydžiu 2π . Galime užrašyti dviejų artimų fazių skirtumą:

$$k(t + T) + \alpha - (kt + \alpha) = 2\pi,$$

iš čia rasime svyravimų periodą:

$$T = \frac{2\pi}{k}. \quad (262)$$

Galime užrašyti:

$$k = \frac{2\pi}{T}. \quad (263)$$

Iš paskutinės formulės daroma išvada, kad dydis k lemia svyravimų, kuriuos taškas atlieka per 2π sekundes, skaičių. Dydis k vadinamas *ciklinių svyravimų dažniu*. Ciklinių svyravimų dažnį padalysime iš 2π sekundžių, gausime svyravimų skaičių per vieną sekundę, arba *dažnį hercais* (Hz), t. y.

$$f = \frac{k}{2\pi}. \quad (264)$$

Palyginę (262) ir (264) formules, galime padaryti išvadą, kad svyravimų dažnis hercais yra atvirkštinis svyravimų periodui, t. y.

$$f = \frac{1}{T}. \quad (265)$$

Iš (264) galime užrašyti, kad ciklinis dažnis skaičiuojamas pagal formulę:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}. \quad (266)$$

Matome, kad ciklinis dažnis priklauso nuo spyruoklės standumo ir svyruojančio taško masės. Šis dydis taip pat vadinamas *svyravimų savuoju dažniu*.

Iš (262) formulės gausime:

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}.$$

Galime teigti, kad svyravimų periodas nepriklauso nuo pradinių judėjimo sąlygų.

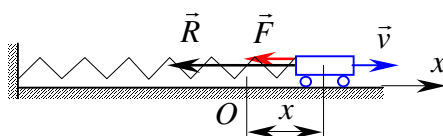
5.2. Gęstantieji svyravimai

Kai taško svyravimai vyksta besipriešinančioje aplinkoje, be atstatomosios jęgos \vec{F} , judantį tašką veikia dar ir aplinkos pasipriešinimo jęga, kuri esant mažiems judėjimo greičiams yra proporcinga šiam greičiui.

Tarkime, judantį tam tikroje aplinkoje greičiu \vec{v} materialųjį tašką (65 pav.) veikia atstatomoji jęga \vec{F} ir aplinkos pasipriešinimo jęga \vec{R} , nukreipta priešinga taško judėjimui kryptimi, kurios dydis proporcingas greičiui:

$$\vec{R} = -\mu \cdot \vec{v}; \quad (267)$$

čia μ – aplinkos klampumo koeficientas.



65 pav. Svyravimai esant pasipriešinimui

Užrašome taško diferencialinę judėjimo lygtį projekcijų į ašį Ox pavidalu:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -F_x - R_x.$$

Įvertinę jėgų reikšmes ir tai, kad greičio projekcija skaičiuojama kaip pirmoji judėjimo dėsnio išvestinė, turėsime:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx - \mu \frac{dx}{dt}.$$

Po nesudėtingų matematinių veiksmų gausime materialiojo taško *gęstančiųjų svyravimų diferencialinę lygtį*:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2 x = 0; \quad (268)$$

čia $2n = \frac{\mu}{m}$.

Diferencialinės lygties išraiška ir sprendinys priklauso nuo slopinimo atvejo. Galimas:

- mažo slopinimo atvejis, kai $n < k$;
- didelio slopinimo atvejis, kai $n > k$;
- kritinio slopinimo atvejis, kai $n = k$.

Nagrinėsime sprendimą kiekvienam slopinimo atvejui:

a) mažo slopinimo atvejis, kai $n < k$.

Pagal diferencialinių lygčių sprendimo teoriją šiuo atveju diferencialinės lygties (268) bendrasis sprendinys turės tokią išraišką:

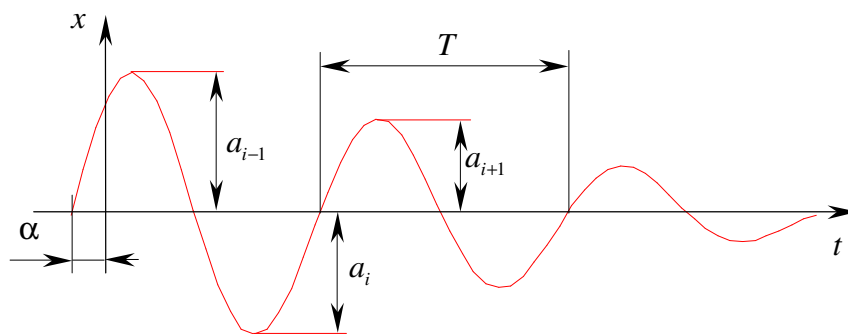
$$x = ae^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha); \quad (269)$$

čia ciklinis svyravimų dažnis turės tokią išraišką:

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}. \quad (270)$$

Matome, kad $k_1 < k$, t. y. galime padaryti išvadą, kad esant *gęstantiesiems svyravimams pasipriešinimo jėga mažina svyravimų ciklinį dažnį*.

Pagal gęstančiųjų svyravimų judėjimo bendrąją lygtį (269) galime padaryti išvadą, kad ši lygtis skiriasi nuo laisvųjų harmoninių svyravimų judėjimo lygties daugikliu e^{-nt} . Tai reiškia, kad nagrinėjamas judėjimo atvejis yra svyravimas apie centrą O . Tačiau šių svyravimų mojai, t. y. maksimalūs nuokrypiai viena arba kita kryptimi nuo taško O , nėra pastovieji dydžiai; laikui bėgant jie mažėja. Todėl šie svyravimai ir vadinami *gęstančiaisiais*. Šių svyravimų grafikas parodytas (66 pav.).



66 pav. Gęstančiųjų svyravimų grafikas

Pagrindinės gęstančiųjų svyravimų charakteristikos:

– *amplitudė*, kurios dydis randamas pagal formulę:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + nx_0)^2}{k_1^2}}, \quad (271)$$

– *pradinė fazė*, kuri nustatoma taip:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_0 k_1}{v_0 + nx_0}, \quad (272)$$

– svyravimų periodas:

$$T_R = \frac{2\pi}{k_1}. \quad (273)$$

Pertvarkę paskutinę išraišką, turėsime:

$$T_R = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{2\pi}{k\sqrt{1 - \frac{n^2}{k^2}}}.$$

Įvertinę tai, kad laisvųjų harmoninių svyravimų periodas $T = \frac{2\pi}{k}$, gausime:

$$T_R = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{n^2}{k^2}}} T.$$

Iš čia išplaukia išvada, kad $T_R > T$, t. y. pasipriešinimo jėga didina svyravimų periodą.

Vieno gęstančiųjų svyravimų periodo dviejų vienos krypties gretimų amplitudžių (66 pav.) santykis vadinamas gęstančiųjų svyravimų *dekrementu*:

$$D = \frac{a_{i+1}}{a_{i-1}}. \quad (274)$$

Įvertinę diferencialinės lygties (268) bendrojo sprendinio išraišką, galime užrašyti:

$$D = \frac{a_{i+1}}{a_{i-1}} = \frac{ae^{-n(t+T_R)} \sin(k_1 t + \alpha + 2\pi)}{ae^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha)} = \frac{e^{-nt} e^{-nT_R}}{e^{-nt}} = e^{-nT_R},$$

t. y. gęstančiųjų svyravimų dekrementas turės tokią reikšmę:

$$D = e^{-nT_R}. \quad (275)$$

Iš čia išplaukia, kad gęstančiųjų svyravimų amplitudė mažėja pastoviuoju, vienu dydžiu, arba, kitaip sakant, kinta pagal geometrinės progresijos dėsnį.

Praktikoje dažnai taikoma ir kita charakteristika, apibūdinanti laisvųjų svyravimų silpimo spartumą, tai *logaritminis gęstančiųjų svyravimų dekrementas*:

$$\lambda = \ln|D| = nT_R. \quad (276)$$

b) didelio slopinimo atvejis, kai $n > k$.

Svyravimo diferencialinių lygčių sprendinys turės tokį pavidalą:

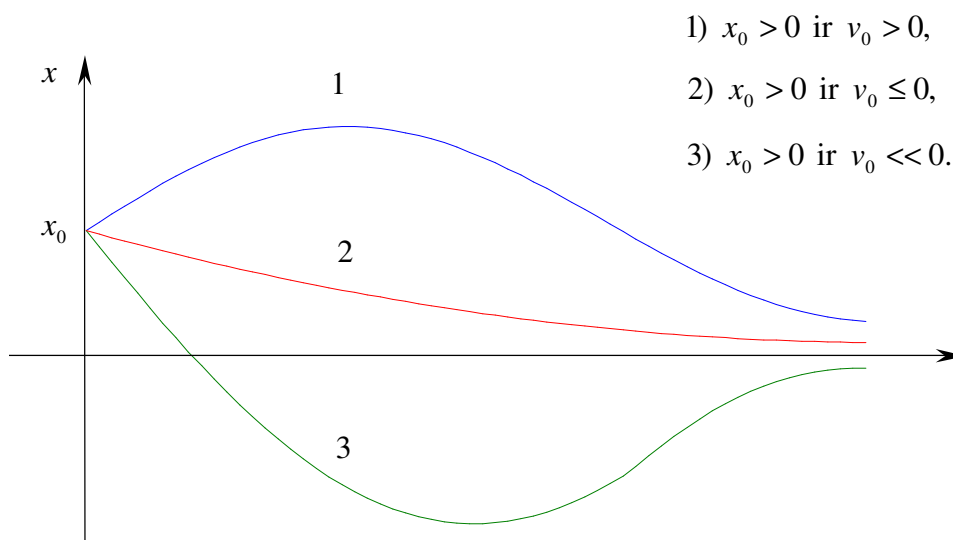
$$x = e^{-nt} \left(C_1 e^{\sqrt{n^2 - k^2}t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2 - k^2}t} \right). \quad (277)$$

c) kritinio slopinimo atvejis, kai $n = k$.

Svyravimo diferencialinių lygčių sprendinys turės tokį pavidalą:

$$x = e^{-nt} (C_1 + C_2 t). \quad (278)$$

Integravimo konstantos randamos pagal pradines judėjimo sąlygas, o svyravimo grafikai gali būti tokie (67 pav.):

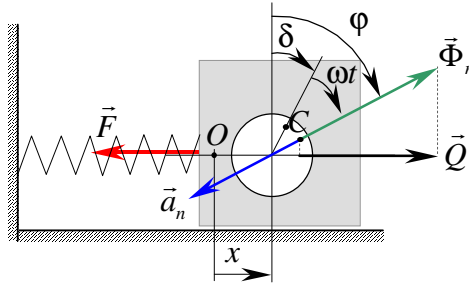


67 pav. Didelių slopinimų grafikai

Pradiniu momentu taškas yra iškeltas į padėtį $x_0 > 0$ ir jam suteiktas pradinis greitis v_0 . Taško judėjimas priklauso nuo greičio krypties ir dydžio. Jeigu taško greitis sutampa su judėjimo kryptimi, tai taškas pradžioje nutolsta nuo rimties padėties, o vėliau, veikiant atstatomajai jėgai, laipsniškai artėja prie šios padėties (67 pav. 1 kreivė). 2 ir 3 judėjimo kreivės atitinka atvejį, kai taško pradinis greitis nesutampa su judėjimo kryptimi. Matome, kad, esant dideliame pradiniam greičiui, taškas gali pereiti per rimties padėtį, o vėliau laipsniškai grįžti į pusiausvyros padėtį.

5.3. Priverstiniai svyravimai nesant slopinimui

Kai svyruojantį materialųjį tašką papildomai veikia periodiškai kintanti jėga, turėsime taško priverstinius svyravimus. Tokia jėga vadinama *žadinančiąja*, turinčia svyravimo amplitudę, dažnį ir pradinę fazę. Tokia situacija pasitaiko technikoje tais atvejais, kai, pavyzdžiui, besisukančio veleno masės centras nėra sukimosi ašyje (68 pav.).



68 pav. Žadinančioji jėga Q esant kūno priverstiniam svyravimams

Kai velenas sukasi pastoviuoju kampiniu greičiu ω , masės centro C normalinis pagreitis $a_n = \omega^2 r$ bus nukreiptas į trajektorijos vidų. Pagal d’Alambero principą normalinė inercijos jėga $\Phi_n = ma_n$ nukreipta į priešingą pagreičiui pusę. Šios jėgos projekcija į ašį Ox nustatoma taip:

$$\Phi_{nx} = \Phi_n \sin \varphi = \Phi_n \sin(\omega t + \delta) = m\omega^2 r \cdot \sin(\omega t + \delta),$$

arba, kitaip tariant, horizontaliaja kryptimi kūną veikia žadinančioji jėga, kurios bendroji išraiška bus tokia:

$$Q = H \sin(\omega t + \delta); \quad (279)$$

čia $H = m\omega^2 r$ – žadinančiosios jėgos amplitudė; δ – žadinančiosios jėgos veikimo pradinė fazė; ω – žadinančiosios jėgos ciklinis dažnis. Žadinančiosios jėgos periodas $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Žadinančioji jėga Q priverčia kūną pasislinkti horizontaliaja kryptimi, tai sukelia spyruoklės deformaciją, todėl spyruoklėje atsiranda atstatomoji jėga $F = -cx$.

Užrašysime kūno diferencialinę judėjimo lygtį:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x + Q,$$

į kurią įrašysime visų jėgų reikšmes. Gausime:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx + H \sin(\omega t + \delta).$$

Po nesudėtingų matematinių pertvarkymų gausime tokio pavidalo priverstinių svyravimų nesant slopinimui diferencialinę lygtį:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = h \sin(\omega t + \delta); \quad (280)$$

čia $h = \frac{H}{m}$.

Iš tiesinių diferencialinių lygčių teorijos yra žinoma, kad lygties (280) pilną sprendinį sudarys diferencialinės lygties be dešinėsios dalies $\left(\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0\right)$ bendrasis sprendinys ir lygties dalinis sprendinys, t. y.

$$x = x_1 + x_2. \quad (281)$$

Bendrasis sprendinys yra laisvųjų harmoninių svyravimų lygtis:

$$x_1 = a \sin(kt + \alpha). \quad (282)$$

Diferencialinės lygties (280) dalinis sprendinys turi tokį pavidalą:

$$x_2 = A \sin(\omega t + \delta). \quad (283)$$

Rasime (283) lygties antrąją išvestinę $\frac{d^2x_2}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \delta)$ ir įrašysime visus dydžius į (280) diferencialinę lygtį. Gausime:

$$-A\omega^2 \sin(\omega t + \delta) + Ak^2 \sin(\omega t + \delta) = h \sin(\omega t + \delta).$$

Išsprendę gautą lygtį, turėsime:

$$-A\omega^2 + Ak^2 = h;$$

iš čia rasime *priverstinių svyravimų amplitudę*:

$$A = \frac{h}{k^2 - \omega^2}. \quad (284)$$

Tuomet dalinio lygties (283) sprendinio išraiška bus tokia:

$$x_2 = \frac{h}{k^2 - \omega^2} \sin(\omega t + \delta). \quad (285)$$

Taigi priverstinių svyravimų nesant slopinimui diferencialinės lygties pilno sprendinio galutinė išraiška bus tokia:

$$x = a \sin(kt + \alpha) + A \sin(\omega t + \delta). \quad (286)$$

Galima pastebėti, kad šiuo atveju kūno svyravimai bus sudėtiniai, juos sudarys laisvieji

harmoniniai ir priverstiniai harmoniniai svyravimai.

Iš bendrojo sprendinio išplaukia išvada, kad priverstinių svyravimų dažnis ω ir priverstinių svyravimų periodas $T_\omega = \frac{2\pi}{\omega}$ sutampa su žadinančiosios jėgos keitimosi dažniu ir periodu.

Priverstiniai svyravimai, kai svyravimų dažnis mažesnis nei laisvųjų svyravimų dažnis ($\omega < k$), vadinami *mažo dažnio priverstiniais svyravimais*.

Priverstiniai svyravimai, kai svyravimų dažnis didesnis nei laisvųjų svyravimų dažnis ($\omega > k$), vadinami *didelių dažnių priverstiniais svyravimais*.

Nagrinėsime pagrindinius priverstinių svyravimų parametrus: *fazę, amplitudę, plakimą, rezonansą*.

5.3.1. Priverstinių svyravimų fazė

Esant mažo dažnio priverstiniais svyravimams, kai $\omega < k$, pagal (285) gausime tokią priverstinių svyravimų lygtį:

$$x_2 = \frac{h}{k^2 - \omega^2} \sin(\omega t + \delta),$$

svyravimų fazė sutampa su žadinančiosios jėgos faze. Priverstinių svyravimų amplitudę randame pagal (284) formulę:

$$A = \frac{h}{k^2 - \omega^2}.$$

Jeigu $\omega > k$, t. y. jeigu priverstiniai svyravimai yra didelio dažnio, priverstinių svyravimų lygtį $x_2 = \frac{h}{k^2 - \omega^2} \sin(\omega t + \delta)$ pertvarkysime, nes šiuo atveju svyravimų amplitudė yra neigiama.

$$x_2 = \frac{h}{k^2 - \omega^2} \sin(\omega t + \delta) = -\frac{h}{\omega^2 - k^2} \sin(\omega t + \delta) = \frac{h}{\omega^2 - k^2} \sin(\omega t + \delta + \pi).$$

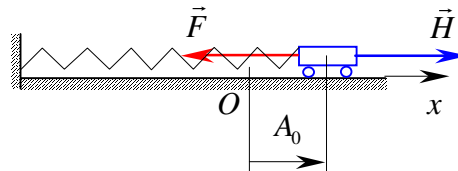
Dabar turime priverstinių svyravimų teigiamą amplitudę $A = \frac{h}{\omega^2 - k^2}$, tačiau svyravimų fazė ($\omega t + \delta + \pi$) skiriasi nuo žadinančiosios jėgos fazės ($\omega t + \delta$) dydžiu π . Tai reiškia, kad priverstinių svyravimų ir žadinančiosios jėgos fazės yra priešingos.

Taigi galime padaryti išvadą, kad, esant priverstiniais svyravimams mažu dažniu judantis taškas visada pradeda judėti koordinatinių ašyje ta kryptimi, kuria tuo momentu yra nukreipta žadinančioji jėga. Kai priverstiniai svyravimai yra didelio dažnio, judantis taškas koordinatinių ašyje pradeda judėti priešinga žadinančiajai jėgai kryptimi.

5.3.2. Priverstinių svyravimų amplitudė

Ištirsime, kaip priverstinių svyravimų amplitudė $A = \frac{h}{k^2 - \omega^2}$ priklauso nuo žadinančiosios jėgos dažnio ω . Taikome taško statinio poslinkio, kuris atsiranda dėl nekintančios jėgos poveikio, sąvoką.

Tarkim, taškas yra neištemptos spyruoklės gale (69 pav.) ir jį pradeda veikti nekintanti jėga H .



69 pav. Taško statinė pusiausvyra

Dėl jėgos H poveikio taškas pasislinks atstumu A_0 , kol sustos. Vadinasi, pastovi jėga H ir spyruoklėje atsiradusi atstatomoji jėga $F = cA_0$ susilygina, t. y. $F = H$. Iš čia gauname $cA_0 = H$. Galime rasti atstumo A_0 reikšmę:

$$A_0 = \frac{H}{c} = \frac{\frac{H}{m}}{\frac{c}{m}} = \frac{h}{k^2};$$

čia $h = \frac{H}{m}$ ir $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$.

Gavome *statinio poslinkio*, arba *statinės deformacijos*, išraišką:

$$A_0 = \frac{h}{k^2}. \quad (287)$$

Priverstinių svyravimų amplitudės A santykis su statinio poslinkio didžiu A_0 vadinamas svyravimų *dinamiškumo koeficientu*:

$$\eta = \frac{A}{A_0}. \quad (288)$$

Esant mažo dažnio priverstiniams svyravimams, kai $\omega < k$, atlikę nesudėtingus matematinius skaičiavimus, gausime tokią dinamiškumo koeficiento išraišką:

$$\eta = \frac{A}{A_0} = \frac{\frac{h}{k^2 - \omega^2}}{\frac{h}{k^2}} = \frac{k^2}{k^2 - \omega^2} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{k^2}},$$

arba

$$\eta = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{k^2}}. \quad (289)$$

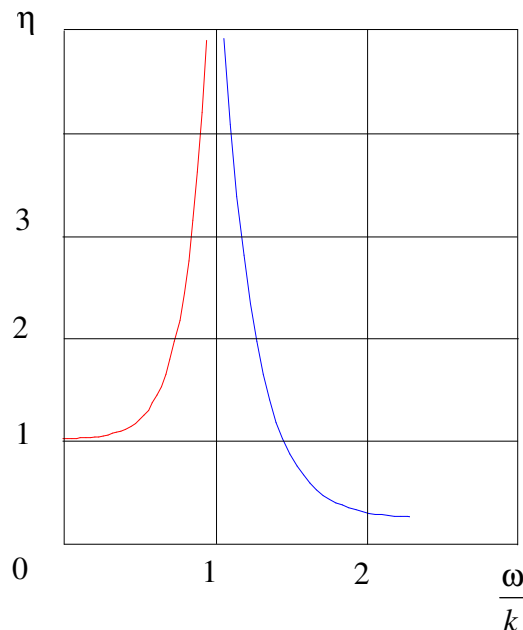
Esant didelio dažnio priverstiniam svyravimams, kai $\omega > k$, atlikę nesudėtingus matematinius skaičiavimus, gausime tokią dinamiškumo koeficiento išraišką:

$$\eta = \frac{A}{A_0} = \frac{\frac{h}{\omega^2 - k^2}}{\frac{h}{k^2}} = \frac{k^2}{\omega^2 - k^2} = \frac{1}{\frac{\omega^2}{k^2} - 1},$$

arba

$$\eta = \frac{1}{\frac{\omega^2}{k^2} - 1}. \quad (290)$$

Priverstinių svyravimų amplitudės priklausomybė nuo žadinančiosios jėgos dažnio, charakterizuojama dinamiškumo koeficientu, pateikta grafike (70 pav.).



70 pav. Dinamiškumo koeficiento keitimosi grafikas

Matome, kad kai žadinančiosios jėgos dažnis didėja nuo nulio, t. y. nuo $\omega = 0$ iki $\omega = k$,

dinamiškumo koeficientas didėja nuo vieneto iki begalybės. Tai reiškia, kad priverstinių svyravimų amplitudė šitam žadinančiosios jėgos dažnio keitimusi yra ne mažesnė kaip statinė deformacija. Kai žadinančiosios jėgos dažnis didėja nuo $\omega = k$, dinamiškumo koeficientas mažėja, o tai reiškia, kad priverstinių svyravimų amplitudė laipsniškai mažėja ir gali būti mažesnė net už statinę deformaciją.

Kai žadinančiosios jėgos dažnis lygus sistemos saviesiems dažniams, t. y. $\omega = k$, tai dinamiškumo koeficientas padidėja iki begalybės. Šiuo atveju priverstinių svyravimų amplitudė taip pat padidėja iki begalybės. Toks svyravimų atvejis vadinamas *rezonansu* (jis bus nagrinėjamas atskirai).

Iš (256) formulės matome, kad diferencialinės lygties (280) bendrąjį sprendinį galime rasti taip:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Tuomet priverstinių svyravimų judėjimo lygtis turės tokią išraišką:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - \omega^2} \sin(\omega t + \delta). \quad (291)$$

Diferencijuodami (291) lygtį, gausime greičio bendrąją išraišką:

$$v = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt + \frac{h\omega}{k^2 - \omega^2} \cos(\omega t + \delta). \quad (292)$$

Tarę, kad pradiniu laiko momentu, kai $t = 0$, taško padėtis yra x_0 , o greitis v_0 , gausime:

$$x_0 = C_1 + \frac{h}{k^2 - \omega^2} \sin \delta,$$

$$v_0 = kC_2 + \frac{h\omega}{k^2 - \omega^2} \cos \delta,$$

iš kurių rasime integravimo konstantas:

$$C_1 = x_0 - \frac{h}{k^2 - \omega^2} \sin \delta,$$

$$C_2 = \frac{v_0}{k} - \frac{h}{k^2 - \omega^2} \cdot \frac{\omega}{k} \cos \delta.$$

Priverstinių svyravimų judėjimo lygtys galiausiai gali būti užrašytos taip:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt - \frac{h}{k^2 - \omega^2} \left(\sin \delta \cdot \cos kt + \frac{\omega}{k} \cos \delta \cdot \sin kt \right) + \frac{h}{k^2 - \omega^2} \sin(\omega t + \delta). \quad (293)$$

Iš čia galime padaryti išvadą, kad taško judėjimą galime laikyti judėjimų suma:

- 1) *taško laisvųjų svyravimų*, kurie atsiranda dėl atstatomosios jėgos poveikio; šiuo atveju taškas yra išjudintas iš pusiausvyros padėties atstumu x_0 ir jam suteiktas greitis v_0 , t. y.

$$x_1 = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt; \quad (294)$$

- 2) *dažnio k priverstinių svyravimų*, kurie atsiranda dėl žadinančiosios jėgos poveikio, t. y.

$$x_2 = -\frac{h}{k^2 - \omega^2} \left(\sin \delta \cdot \cos kt + \frac{\omega}{k} \cos \delta \cdot \sin kt \right); \quad (295)$$

- 3) *dažnio ω priverstinių svyravimų*, kurie atsiranda dėl žadinančiosios jėgos dažnio ω poveikio, t. y.

$$x_3 = \frac{h}{k^2 - \omega^2} \sin(\omega t + \delta). \quad (296)$$

Iš priverstinių svyravimų judėjimo lygties (293) išplaukia, kad net esant nulinėms pradinėms sąlygoms, kai $x_0 = 0$ ir $v_0 = 0$, taškas svyruos savaisiais dažniais pagal (295) ir (296) judėjimo lygtis, ir šių svyravimų amplitudė nepriklausys nuo judėjimo pradinių sąlygų.

5.3.3. Plakimas

Kai žadinančiosios jėgos dažnis yra artimas taško laisvųjų svyravimų dažniui $\omega \approx k$, esant priverstiniams svyravimams atsiranda reiškinys, kuris vadinamas *plakimu*.

Tarkime, kad pradiniu momentu $x_0 = 0$ ir $v_0 = 0$. Nagrinėsime taško svyravimus, kurie atsiranda tik dėl žadinančiosios jėgos poveikio, t. y. tokius, kurie aprašyti (295) ir (296) formulėmis. Turėsime:

$$x = x_2 + x_3 = -\frac{h}{k^2 - \omega^2} \left(\sin \delta \cdot \cos kt + \frac{\omega}{k} \cos \delta \cdot \sin kt \right) + \frac{h}{k^2 - \omega^2} \sin(\omega t + \delta).$$

Atsižvelgę į tai, kad $\frac{\omega}{k} \approx 1$, po nedidelių matematinių pertvarkymų gausime:

$$x = \frac{h}{k^2 - \omega^2} [\sin(\omega t + \delta) - \sin(kt + \delta)]$$

Pritaikę trigonometrines sinusų skirtumo formules:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2},$$

gausime:

$$x = \frac{h}{k^2 - \omega^2} \left[2 \sin \frac{\omega t + \delta - kt - \delta}{2} \cos \frac{\omega t + \delta + kt + \delta}{2} \right] = \frac{h}{k^2 - \omega^2} \left[2 \sin \left(\frac{\omega - k}{2} t \right) \cdot \cos \left(\frac{\omega + k}{2} t + \delta \right) \right].$$

Įvertinę tai, kad $\frac{\omega + k}{2} \approx \omega$, galime užrašyti:

$$x = \frac{2h}{k^2 - \omega^2} \left[\sin \left(\frac{\omega - k}{2} t \right) \cdot \cos(\omega t + \delta) \right]. \quad (297)$$

Pažymėję

$$A(t) = \frac{2h}{k^2 - \omega^2} \sin \left(\frac{\omega - k}{2} t \right), \quad (298)$$

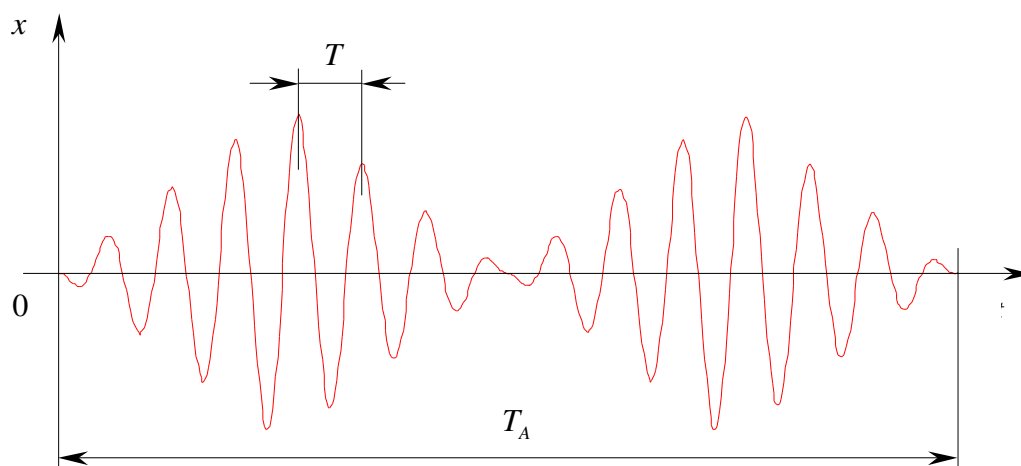
gausime tokio pavidalo taško svyravimų lygtį:

$$x = A(t) \cdot \cos(\omega t + \delta). \quad (299)$$

Šiuos judėjimus galime traktuoti kaip taško svyravimus dažniu ω ir periodu $T = \frac{2\pi}{\omega}$, kurių amplitudė $A(t)$ yra funkcija, kurios dažnis yra $\frac{\omega - k}{2}$, o keitimosi periodas:

$$T_A = \frac{2\pi}{\frac{\omega - k}{2}} = \frac{4\pi}{\omega - k}.$$

Įvertinę tai, kad $\omega \approx k$, galime padaryti išvadą, kad amplitudės svyravimo periodas T_A yra gerokai didesnis negu taško svyravimai dažniu T . Taško judėjimo grafikas, aprašytas (299) formule, pavaizduotas (71 pav.). Toks taško judėjimas vadinamas *plakimu*.



71 pav. Priverstinių svyravimų plakimas

Priverstinių svyravimų grafike parodytas taško svyravimas, kuris vyksta žadinančiosios jėgos dažniu ω ir periodu $T = \frac{2\pi}{\omega}$, šių svyravimų amplitudė periodiškai kinta savuoju dažniu $\frac{\omega - k}{2}$ ir jos keitimosi periodas $T_A = \frac{4\pi}{\omega - k}$.

5.3.4. Rezonansas

Kai taško laisvųjų svyravimų dažnis yra lygus priverstinių svyravimų dažniui, t. y. $k = \omega$, atsiranda reiškinys, kuris vadinamas *rezonansu*. Rezonanso metu svyravimų amplitudė, skaičiuojama pagal (284) formulę, padidėja iki begalybės ir jos skaičiavimas netenka prasmės.

Priverstinių svyravimų diferencialinę lygtį (280), kai $k = \omega$, galime perrašyti taip:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = h \sin(kt + \delta). \quad (300)$$

Iš diferencialinių lygčių sprendimo teorijos žinome, kad lygties (300) pilnas sprendinys bus sudarytas iš diferencialinės lygties be dešinėsios dalies $\left(\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0\right)$ bendrojo x_1 ir lygties dalinio sprendinio x_2 . Bendrąjį sprendinį x_1 galime užrašyti jau žinomu pavidalu (256) kaip taško judėjimo lygtį esant laisviesiems svyravimams, t. y.

$$x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Tačiau lygties (300) dalinis sprendinys x_2 turi būti tiesiniu požiūriu nepriklausomas nuo sprendinio x_1 . Todėl lygties sprendinys ieškomas taip:

$$x_2 = Bt \cos(kt + \delta). \quad (301)$$

Ieškome nežinomo dydžio B . Randame (301) išraiškos pirmąją ir antrąją išvestines:

$$\frac{dx_2}{dt} = B \cos(kt + \delta) - Btk \cdot \sin(kt + \delta), \quad (302)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_2}{dt^2} = & -Bk \sin(kt + \delta) - Bk \cdot \sin(kt + \delta) - Btk^2 \cos(kt + \delta) = \\ & -2Bk \cdot \sin(kt + \delta) - Btk^2 \cos(kt + \delta). \end{aligned} \quad (303)$$

Irašę rastus dydžius į diferencialinę lygtį (300) gausime:

$$-2Bk \cdot \sin(kt + \delta) - Btk^2 \cos(kt + \delta) + Btk^2 \cos(kt + \delta) = h \cdot \sin(kt + \delta),$$

arba, atlikę nesudėtingus matematinius skaičiavimus, gausime:

$$B = \frac{h}{2k}. \quad (304)$$

Pilnas lygties (300) sprendinys bus toks:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{2k} t \cdot \cos(kt + \delta),$$

arba galiausiai galime užrašyti:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{2k} t \cdot \sin\left(kt + \delta - \frac{\pi}{2}\right). \quad (305)$$

Iš čia išplaukia išvada, kad rezonanso metu, kai taško laisvųjų svyravimų dažnis yra lygus priverstinių svyravimų dažniui, t. y. $k = \omega$, taško judėjimas susideda iš dviejų judėjimų: laisvųjų harmoninių svyravimų ir priverstinių svyravimų. Laisvieji svyravimai vyksta dažniu k ir turi $T = \frac{2\pi}{k}$ svyravimų periodą. Laisvieji svyravimai aprašomi judėjimo lygtimi:

$$x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

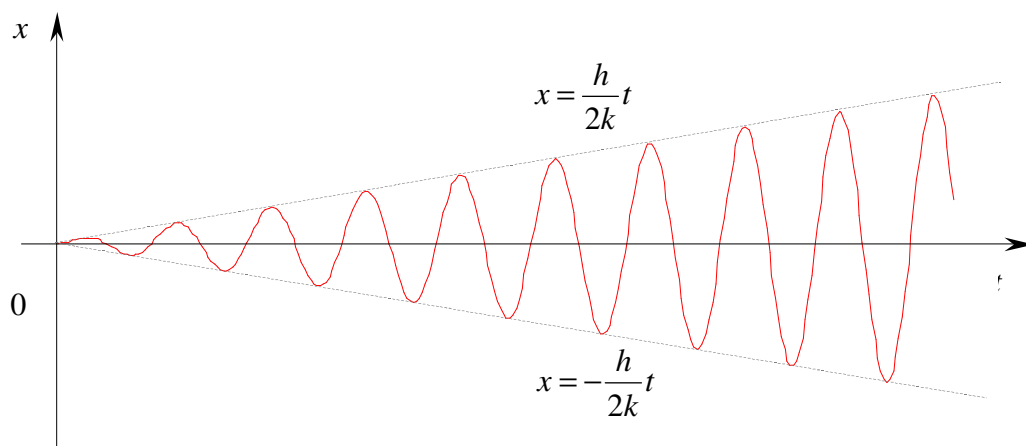
Priverstiniai svyravimai nusakomi (305) tokia lygties dalimi:

$$x_2 = \frac{h}{2k} t \cdot \sin\left(kt + \delta - \frac{\pi}{2}\right).$$

Priverstinių svyravimų dažnis k ir periodas T rezonanso metu sutampa su laisvųjų svyravimų dažniu ir periodu, tačiau priverstinių svyravimų fazė $\left(kt + \delta - \frac{\pi}{2}\right)$ atsilieka nuo

žadinančiosios jėgos fazės $(kt + \delta)$ dydžiu $\frac{\pi}{2}$.

Priverstinių svyravimų amplitudė rezonanso metu didėja proporcingai laikui, t. y. $A = \frac{h}{2k}t$, priverstinių svyravimų grafikas pateiktas (72 pav.).

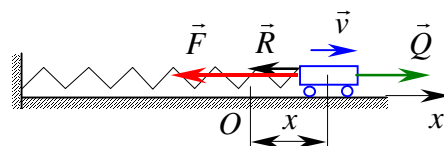


72 pav. Priverstinių svyravimų amplitudės keitimasis rezonanso metu

Iš matematinės priverstinių svyravimų amplitudės išraiškos $A = \frac{h}{2k}t$ gauname, kad rezonanso metu laikas t į svyravimų lygtį įeina kaip daugiklis. Vadinasi, šiuo atveju svyravimo amplitudė laikui bėgant neribotai didėja. Praktikoje šios išvados pasitvirtina iki tam tikros amplitudės padidėjimo ribos, nes svyruojantis kūnas visuomet susiduria su tam tikru aplinkos pasipriešinimu ir amplitudės keitimosi spartumas sumažėja. Tačiau rezonanso atveju svyravimų amplitudė gali tiek padidėti, kad kūno ryšiai gali neišlaikyti atsiradusių poslinkių ir suirti. Todėl svarbu nagrinėti priverstinius svyravimus įvertinant ir aplinkos pasipriešinimo įtaką.

5.4. Priverstiniai svyravimai esant slopinimui

Tarkime, materialusis taškas, esantis neištemptos c standumo spyruoklės gale (73 pav.), veikiant žadinančiajai jėgai $Q = H \sin(\omega t + \delta)$, juda besipriešinančioje aplinkoje, kurios klampumo koeficientas μ .



73 pav. Taško judėjimas esant pasipriešinimui

Įvertinę jėgų reikšmes, užrašysime taško diferencialinę judėjimo lygtį:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = Q - F - R. \quad (306)$$

Irašę jėgų reikšmes, turėsime:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = H \sin(\omega t + \delta) - cx - \mu \frac{dx}{dt},$$

arba, padaliję visus narius iš masės m , gausime materialiojo taško *priverstinių svyravimų esant slopinimui diferencialinę judėjimo lygtį* tokio pavidalo:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2 x = h \sin(\omega t + \delta); \quad (307)$$

čia $2n = \frac{\mu}{m}$; n – slopinimo koeficientas; $k^2 = \frac{c}{m}$ – laisvųjų svyravimų dažnio kvadratas;

$h = \frac{H}{m}$ – žadinančiosios jėgos amplitudės ir masės santykis.

Iš tiesinių diferencialinių lygčių teorijos žinome, kad lygties (307) pilnas sprendinys bus sudarytas iš diferencialinės lygties be dešinėsios dalies $\left(m \frac{d^2 x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2 x = 0 \right)$ bendrojo sprendinio ir lygties dalinio sprendinio, t. y.

$$x = x_1 + x_2. \quad (308)$$

Bendrasis sprendinys yra gėstančiųjų svyravimų lygtis ir, atsižvelgiant į n ir k santykį, aprašomas (269), (277) arba (278) formulėmis.

Ieškomas diferencialinės lygties (307) dalinis sprendinys:

$$x_2 = A \sin(\omega t + \delta - \varepsilon); \quad (309)$$

čia A ir ε – nežinomi pastovieji dydžiai; laikome, kad dalinis sprendinys yra pastovios amplitudės svyravimai, kurių dažnis lygus žadinančiosios jėgos dažniui.

Dydžiams A ir ε skaičiuoti randame (309) lygties išvestines:

$$\frac{dx_2}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \delta - \varepsilon),$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \delta - \varepsilon),$$

kurias ir įrašome į diferencialinę lygtį (307). Turėsime:

$$-A\omega^2 \sin(\omega t + \delta - \varepsilon) + 2n \cdot A\omega \cos(\omega t + \delta - \varepsilon) + k^2 A \sin(\omega t + \delta - \varepsilon) = h \cdot \sin(\omega t + \delta).$$

Po nesudėtingų matematinių skaičiavimų gausime:

$$A = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}}, \quad (310)$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{2n\omega}{k^2 - \omega^2}. \quad (311)$$

Tuomet diferencialinės lygties (307) dalinis sprendinys turės tokią išraišką:

$$x_2 = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}} \sin(\omega t + \delta - \varepsilon). \quad (312)$$

Priklausomai nuo n ir k santykio diferencialinės lygties (307) bendrasis sprendinys turės tokias išraiškas:

mažo slopinimo atveju, kai $n < k$:

$$x = ae^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha) + \frac{h}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}} \sin(\omega t + \delta - \varepsilon), \quad (313)$$

didelio slopinimo atveju, kai $n > k$:

$$x = e^{-nt} \left(C_1 e^{\sqrt{n^2 - k^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2 - k^2} t} \right) + \frac{h}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}} \sin(\omega t + \delta - \varepsilon), \quad (314)$$

kritinio slopinimo atveju, kai $n = k$:

$$x = e^{-nt} (C_1 + C_2 t) + \frac{h}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}} \sin(\omega t + \delta - \varepsilon). \quad (315)$$

Priverstinių svyravimų lygtyse (314) ir (315) integravimo konstantos randamos pagal svyravimų pradines sąlygas.

Analizuodami (313), (314) ir (315) judėjimo lygtis, galime pastebėti, kad taško judėjimas susideda iš gėstančiųjų ir priverstinių svyravimų. Kadangi laikui bėgant gėstantieji svyravimai išnyksta, lieka tik svyravimai dėl žadinančiosios jėgos poveikio, kurių amplitudės dydis randamas pagal (310) formulę. Svyravimai dėl žadinančiosios jėgos poveikio vyksta žadinančiosios jėgos dažniu ω ir yra aprašomi (312) formule:

$$x = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}} \sin(\omega t + \delta - \epsilon).$$

Taip pat pastebėta, kad, esant pasipriešinimui, judėjimo priverstiniai svyravimai žadinančiosios jėgos atžvilgiu pasislenka dydžiu ϵ .

LITERATŪRA

1. MICHNEVIČ, E.; SYRUS, L.; BELEVIČIUS, R. *Teorinė mechanika. Statika: mokomoji knyga*. Vilnius: Technika, 2004. 94 p.
2. PALIŪNAS, V. *Teorinė mechanika*. Vilnius: Žuvėdra, 1997. 482 p.
3. TARGAS, S. *Trumpas teorinės mechanikos kursas*. Vilnius: Mintis, 1970. 476 p.
4. ЯБЛОНСКИЙ, А. А.; НИКИФОРОВА, В. М. *Курс теоретической механики. Часть 1*. Москва: Высшая школа, 1966. 438 с.
5. VORONKOVAS, B.; REMIŠAUSKAS, M. *Teorinė mechanika*. Vilnius: VPMLL, 1961. 782 p.
6. MERIAM, J. L.; KRAIGE, L. G. *Engineering Mechanics, Statics*. 4th ed. John Wiley&Sons, Inc. Canada, 1998. 526 p.
7. HIBBLER, R. C. *Engineering Mechanics: Statics and Dynamics*. 6th ed. Macmillan Publishing Co. New York, 1992. 588 p.
8. BARADOKAS, P. *Teorinė mechanika. Dinamika: mokomoji knygelė*. Vilnius, 1980. 158 p.
9. MERIAM, J. L.; KRAIGE, L.G. *Engineering Mechanics, Dynamics*. 4th ed. John Wiley&Sons, Inc. Canada, 1998. 725 p.
10. ЯБЛОНСКИЙ, А. А.; НИКИФОРОВА, В. М. *Курс теоретической механики. Часть 2*. Москва: Высшая школа, 1966. 412 с.
11. НЕКРАСОВ, А. И. *Курс теоретической механики. Динамика. Том II*. Москва: Высшая школа, 1953. 420 с.
12. SYRUS, L.; BARADOKAS, P.; MICHNEVIČ, E.; ČIUČELIS, A. *Teorinė mechanika. Kinematika: mokomoji knyga*. Vilnius: Technika, 2006. 100 p.
13. BARADOKAS, P. *Teorinė mechanika. Kinematika: paskaitų konspektas*. Vilnius, 1980. 76 p.

PRIEDAI

1 priedas. Klausimai savarankiškam darbui

1. Kaip formuluojami pagrindiniai dinamikos dėsniai?
2. Kaip kūno svoris priklauso nuo kūno padėties Žemėje? Kuriuose Žemės paviršiaus taškuose kūno sunkio reikšmė didžiausia ir kuriuose mažiausia?
3. Kokios yra laisvojo materialiojo taško diferencialinių judėjimo lygčių išraiškos?
4. Kokios yra nelaisvojo materialiojo taško diferencialinių judėjimo lygčių išraiškos?
5. Kokie yra pagrindiniai materialiojo taško dinamikos uždaviniai?
6. Ką vadiname pradinėmis judėjimo sąlygomis?
7. Pagal kokius dėsnius juda materialusis taškas, mestas tuštumoje įvairiais kampais horizonto atžvilgiu? Kokiomis sąlygomis taškas pasieks maksimalų aukštį? Kada taško skridimo nuotolis bus maksimalus?
8. Ką vadiname materialijų taškų mechanine sistema?
9. Ką vadiname materialiojo taško judesio kiekiu? Kaip jis randamas?
10. Ką vadiname mechaninės sistemos judesio kiekiu? Kaip jis randamas?
11. Kaip dinamikoje klasifikuojamos jėgos, veikiančios mechaninę sistemą?
12. Mechaninės sistemos vidinių jėgų suminio vektoriaus ir suminio momento bet kurio centro skaičiavimas.
13. Ką vadiname jėgos impulsu? Kaip jis skaičiuojamas?
14. Kaip skamba materialiojo taško judesio kiekio pokyčio teorema?
15. Kaip skamba mechaninės sistemos judesio kiekio pokyčio teorema?
16. Kada mechaninės sistemos judesio kiekis yra pastovus?
17. Kuris mechaninės sistemos taškas yra vadinamas masės centru (inercijos centru)? Kaip randama šio taško padėtis?
18. Kaip išreiškiamas mechaninės sistemos judesio kiekis masės centro judesio kiekiu?
19. Kam lygus smagračio, besisukančio apie nejudamąją ašį, einančią per smagračio masės centrą, judesio kiekis?
20. Kodėl šūvio metu patranka atšoka atgal?
21. Kokia yra sistemos masės centro judėjimo teoremos išraiška?
22. Kokios mechaninę sistemą veikiančios jėgos neturi įtakos sistemos masės centro judėjimui? Kodėl?
23. Ką vadiname materialiojo taško kinetiniu momentu centro atžvilgiu?
24. Ką vadiname mechaninės sistemos kinetiniu momentu centro atžvilgiu, ašies atžvilgiu?
25. Kokios yra materialiojo taško kinetinio momento teoremos vektorinė ir koordinatinė išraiškos?
26. Kaip mechaninės sistemos kinetinio momento teorema išreiškiama vektorine ir koordinatine forma?
27. Kada mechaninės sistemos kinetinis momentas centro arba ašies atžvilgiu nesikeičia?
28. Kokia yra besisukančio standžiojo kūno kinetinio momento sukimosi ašies atžvilgiu išraiška?
29. Ką vadiname ir kaip skaičiuojame standžiojo kūno inercijos momentus ašies, plokštumos ir taško atžvilgiu?

30. Kokia yra standžiojo kūno inercijos momento ašies atžvilgiu fizikinė prasmė?
31. Ką vadiname standžiojo kūno inercijos spinduliu?
32. Kokia yra priklausomybė tarp įvairių inercijos momentų?
33. Kokia yra priklausomybė tarp standžiojo kūno inercijos momentų lygiagrečių ašių atžvilgiu?
34. Ką vadiname standžiojo kūno išcentrinu inercijos momentu?
35. Kokias ašis vadiname standžiojo kūno svarbiausiosiomis inercijos ašimis tam tikrame taške?
36. Kokioms sąlygoms esant koordinatinių ašis Oz yra standžiojo kūno svarbiausioji ašis koordinatinių pradžioje?
37. Kada standžiojo kūno inercijos momento reikšmė yra mažiausioji?
38. Kokia yra jėgos elementariojo darbo išraiška?
39. Kaip skaičiuojamas jėgos darbas kelio ruože?
40. Kaip skaičiuojamas jėgos elementarusis darbas esant kūno sukamajam judėjimui?
41. Kaip skaičiuojamas sunkio darbas? Kaip jis priklauso nuo judėjimo trajektorijos? Kada sunkio darbas yra teigiamas, neigiamas, kada lygus nuliui?
42. Kaip skaičiuojamas galingumas esant įvairiems judėjimams?
43. Ką vadiname materialiojo taško kinetine energija ir kaip ji skaičiuojama?
44. Kaip skaičiuojame sistemos kinetinę energiją?
45. Kaip skaičiuojame standžiojo kūno kinetinę energiją esant slenkamajam, sukamajam ir plokščiajam judėjimui?
46. Kokia yra materialiojo taško kinetinės energijos pokyčio teoremos išraiška?
47. Kokia yra mechaninės sistemos kinetinės energijos pokyčio teoremos išraiška?
48. Kada sistemos vidinės jėgos neįeina į mechaninės sistemos kinetinės energijos pokyčio išraišką? Kodėl?
49. Koks jėgų laukas vadinamas potencialiniu?
50. Kokia funkcija vadinama jėgos funkcija?
51. Kokia mechaninės energijos tvermės dėsnio išraiška?
52. Kokia yra standžiojo kūno slenkamojo judėjimo diferencialinių lygčių išraiška?
53. Kokia yra standžiojo kūno sukamojo judėjimo diferencialinių lygčių išraiška?
54. Kokioms sąlygoms esant standusis kūnas apie nejudamąją ašį sukasi tolygiai, greitėjančiai arba lėtėjančiai?
55. Kokia yra standžiojo kūno plokščiojo judėjimo diferencialinių lygčių išraiška?
56. Kuo ypatingas smūgio reiškinys? Kuo charakterizuojamos smūgio jėgos?
57. Kas vyksta su kūnais pirmosios ir antrosios smūgio fazės metu?
58. Kaip randami dviejų rutulių greičiai kiekvienos fazės pabaigoje esant netampriajam, tampriajam arba absoliučiai tampriam tiesioginiam centriniam smūgiui?
59. Kodėl smūgio teorijoje vietoj smūgio jėgų taikomi smūgio impulsai?
60. Kokia pagrindinė dinamikos formulė taikoma smūgio teorijoje?
61. Kas esant smūgiui vadinama atsistatymo koeficientu? Kaip jis randamas bandymo būdu? Šio koeficiento skaitinės reikšmės ribos.
62. Kokia yra priklausomybė tarp kritimo ir atšokimo kampų smūgio metu?

63. Kaip smūgio teorijoje taikoma sistemos kinetinio momento teorema?
64. Kaip kinta standžiojo kūno kampinis greitis, kai kūną veikia smūgio impulsas?
65. Kokioms sąlygoms esant smūgis neperduodamas įtvirtinimo atramai?
66. Kada susidūrę du rutuliai sustoja ir kada jie „apsikeičia“ greičiais?
67. Kas smūgio metu yra prarastasis greitis?
68. Ką smūgio metu vadiname prarastąja kinetine energija?
69. Kaip skamba Karno teorema?
70. Prie kokio kūno galima pridėti materialiojo taško inercijos jėgą? Kam lygus šios jėgos modulis ir kokia jos kryptis?
71. Koks turi būti materialiojo taško judėjimas, kad jo tangentinė inercijos jėga būtų lygi nuliui?
72. Koks turi būti materialiojo taško judėjimas, kad jo normalinė inercijos jėga būtų lygi nuliui?
73. Į ką redukuojamos standžiojo kūno inercijos jėgos esant slenkamajam kūno judėjimui, sukamajam apie nejudamąją ašį kūno judėjimui, plokščiajam kūno judėjimui?
74. Kokiai jėgai veikiant vyksta materialiojo taško laisvieji svyravimai?
75. Kokia yra materialiojo taško laisvųjų svyravimų diferencialinės judėjimo lygties išraiška?
76. Kaip užrašomas materialiojo taško harmoninių svyravimų dėsnis?
77. Ką vadiname harmoninių svyravimų periodu?
78. Kaip harmoninių svyravimų periodas priklauso nuo materialiojo taško judėjimo pradinių sąlygų?
79. Nuo ko priklauso materialiojo taško laisvųjų svyravimų dažnis, amplitudė ir svyravimų pradinė fazė?
80. Koks yra materialiojo taško laisvųjų svyravimų grafinis vaizdas?
81. Kokia yra materialiojo taško gęstančiųjų svyravimų diferencialinės judėjimo lygties išraiška?
82. Kaip užrašomas materialiojo taško gęstančiųjų svyravimų dėsnis?
83. Kas apibūdina svyravimų silpimo spartumą?
84. Koks yra materialiojo taško gęstančiųjų svyravimų grafinis vaizdas?
85. Kaip užrašoma materialiojo taško priverstinių svyravimų nesant slopinimui diferencialinė judėjimo lygtis? Koks jos bendrasis sprendinys?
86. Kurie priverstiniai svyravimai vadinami mažo dažnio svyravimais, o kurie didelio dažnio svyravimais?
87. Kokie veiksniai turi įtakos materialiojo taško priverstinių svyravimų amplitudei?
88. Ką vadiname dinamiškumo koeficientu ir kaip šis koeficientas priklauso nuo santykio $\frac{\omega}{k}$?
89. Kokiomis sąlygomis priverstinių svyravimų metu atsiranda plakimo reiškinys? Kaip atrodo plakimo grafikas?
90. Kokiomis sąlygomis priverstinių svyravimų metu atsiranda rezonanso reiškinys, kokios šiuo atveju yra materialiojo taško priverstinių svyravimų lygtys ir koks yra grafikas?

2 priedas. Pagrindinės dinamikos formulės

Pirmoji dinamikos aksioma

$$\vec{F} = 0; \quad \vec{v} = \text{const.}$$

Antroji dinamikos aksioma – pagrindinis dinamikos dėsnis

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Trečioji dinamikos aksioma

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{a_B}{a_A}.$$

Ketvirtoji dinamikos aksioma

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$

Pagrindinės dinamikos charakteristikos

Masės centro koordinatės:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{\sum_{k=1}^n m_k}; \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{\sum_{k=1}^n m_k}; \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k z_k}{\sum_{k=1}^n m_k}.$$

Standžiojo kūno inercijos momentas:

$$I = \sum_{k=1}^n m_k \cdot h_k^2.$$

Inercijos momentai Dekarto koordinatinių ašių atžvilgiu:

$$\begin{cases} I_x = \sum_{k=1}^n m_k \cdot (y_k^2 + z_k^2); \\ I_y = \sum_{k=1}^n m_k \cdot (z_k^2 + x_k^2); \\ I_z = \sum_{k=1}^n m_k \cdot (x_k^2 + y_k^2). \end{cases}$$

Polinis inercijos momentas:

$$I_o = \sum_{k=1}^n m_k \cdot (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2).$$

Inercijos momentai plokštumų atžvilgiu:

$$\begin{cases} I_{yOz} = \sum_{k=1}^n m_k \cdot x_k^2; \\ I_{xOz} = \sum_{k=1}^n m_k \cdot y_k^2; \\ I_{xOy} = \sum_{k=1}^n m_k \cdot z_k^2. \end{cases}$$

Kūno inercijos momentas, išreikštas inercijos spinduliu:

$$I_z = M \cdot i_z^2.$$

Išcentriniai inercijos momentai:

$$\begin{cases} I_{xy} = \sum_{k=1}^n m_k \cdot x_k y_k; \\ I_{yz} = \sum_{k=1}^n m_k \cdot y_k z_k; \\ I_{xz} = \sum_{k=1}^n m_k \cdot x_k z_k. \end{cases}$$

Inercijos momentas lygiagrečių ašių atžvilgiu:

$$I_{z_1} = I_{z_C} + M \cdot d^2.$$

Inercijos momentas bet kaip išdėstytos ašies atžvilgiu:

$$I_{OL} = \cos^2 \alpha \cdot I_x + \cos^2 \beta \cdot I_y + \cos^2 \gamma \cdot I_z - 2 \cos \beta \cos \gamma \cdot I_{yz} - 2 \cos \gamma \cos \alpha \cdot I_{xz} - 2 \cos \alpha \cos \beta \cdot I_{xy}.$$

Standžiojo kūno inercijos momentas:

$$I_{OL} = \int_M h^2 dm.$$

Inercijos momento skaičiavimo formulės

Plonas strypas:

$$I_A = \frac{1}{3} M l^2;$$

$$I_C = \frac{1}{12} M l^2.$$

Plonas žiedas ir vamzdis:

$$I_O = I_x = M R^2;$$

$$I_z = I_y = \frac{1}{2} M R^2.$$

Plonas skritulys:

$$I_x = I_O = \frac{1}{2} M R^2;$$

$$I_y = I_z = \frac{1}{4} M R^2.$$

Storasis vamzdis:

$$I_x = \frac{1}{2} \cdot M (R^2 + R_0^2).$$

Plonas keturkampis: $I_x = \frac{1}{3}Mb^2$; $I_y = \frac{1}{3}Ma^2$.

Plonas trikampis: $I_x = \frac{1}{6}Mb^2$; $I_y = \frac{1}{6}Mb^2$.

Judėjimo charakteristikos

Materialiojo taško judesio kiekis:

$$m\vec{v};$$

$$mv = \sqrt{(mv_x)^2 + (mv_y)^2 + (mv_z)^2};$$

$$mv_x = m \frac{dx}{dt}; \quad mv_y = m \frac{dy}{dt}; \quad mv_z = m \frac{dz}{dt};$$

$$\cos \alpha = \frac{mv_x}{mv}; \quad \cos \beta = \frac{mv_y}{mv}; \quad \cos \gamma = \frac{mv_z}{mv}.$$

Materialiųjų taškų mechaninės sistemos judesio kiekis:

$$\vec{K} = \sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_k; \quad \vec{K} = M \cdot \vec{v}_C.$$

Materialiojo taško kinetinis momentas centro atžvilgiu:

$$\vec{l}_O = \vec{M}_O(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v}.$$

Materialiojo taško kinetinis momentas koordinatinių ašių atžvilgiu:

$$l_x = M_x(m\vec{v}) = y \cdot mv_z - z \cdot mv_y;$$

$$l_y = M_y(m\vec{v}) = z \cdot mv_x - x \cdot mv_z;$$

$$l_z = M_z(m\vec{v}) = x \cdot mv_y - y \cdot mv_x.$$

Materialiųjų taškų mechaninės sistemos kinetinis momentas centro atžvilgiu:

$$\vec{L}_O = \sum_{k=1}^n \vec{l}_O = \sum_{k=1}^n \vec{M}_O(m_k \vec{v}_k) = \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k).$$

Materialiųjų taškų mechaninės sistemos kinetinis momentas koordinatinių ašių atžvilgiu:

$$L_x = \sum_{k=1}^n l_x = \sum_{k=1}^n M_x(m_k \vec{v}_k) = \sum_{k=1}^n (y_k \cdot m_k v_{kz} - z_k \cdot m_k v_{ky});$$

$$L_y = \sum_{k=1}^n l_y = \sum_{k=1}^n M_y(m_k \vec{v}_k) = \sum_{k=1}^n (z_k \cdot m_k v_{kx} - x_k \cdot m_k v_{kz});$$

$$L_z = \sum_{k=1}^n l_z = \sum_{k=1}^n M_z(m_k \vec{v}_k) = \sum_{k=1}^n (x_k \cdot m_k v_{ky} - y_k \cdot m_k v_{kx}).$$

Standžiojo kūno kinetinis momentas:

$$\vec{L}_O = \vec{r}_C \times M \cdot \vec{v}_C; \quad L_z = I_z \cdot \omega.$$

Materialiojo taško kinetinė energija:

$$\frac{mv^2}{2}.$$

Materialiųjų taškų mechaninės sistemos kinetinė energija:

$$T = \sum_{k=1}^n \frac{m_k v_k^2}{2}.$$

Standžiojo kūno kinetinė energija esant slenkamajam judėjimui:

$$T = M \frac{v_C^2}{2}.$$

Standžiojo kūno kinetinė energija esant sukamajam judėjimui:

$$T = \frac{\omega^2}{2} \cdot I_z.$$

Standžiojo kūno kinetinė energija esant plokščiajam judėjimui:

$$T = \frac{Mv_C^2}{2} + \frac{\omega^2 I_{z_C}}{2}.$$

Potencinė energija

Jėgos funkcija:

$$U(x, y, z).$$

Jėgos elementarusis darbas potencialiniame jėgų lauke:

$$dA = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz; \quad dA = dU(x, y, z).$$

Jėgos pilnutinis darbas:

$$A = U - U_0.$$

Potencinė energija:

$$V = A_{MM_0} = -A_{M_0M} = U_0 - U = C_0 - U; \quad V = -U.$$

Jėgos poveikio matai

Mechaninės sistemos vidinių jėgų savybės:

$$\vec{R}^v = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^v = 0; \quad \vec{M}_O^v = \sum_{k=1}^n \vec{M}_o(\vec{F}_k^v) = 0.$$

Jėgos impulsas: $d\vec{S} = \vec{F} \cdot dt;$ $\vec{S} = \int_{t_0=0}^t \vec{F} dt;$ $\vec{S} = \vec{F} \cdot t.$

Jėgos darbas:

$$dA = F_\tau \cdot ds; \quad A = \int_{M_1}^{M_2} F_\tau ds;$$
$$dA = F \cdot \cos \varphi \cdot ds; \quad A = \int_{M_1}^{M_2} F \cos \varphi ds;$$
$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}; \quad A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} d\vec{r};$$
$$dA = d\vec{S} \cdot d\vec{v}; \quad A = \int_{t_0}^t d\vec{S} d\vec{v};$$
$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz; \quad A = \int_{M_1}^{M_2} F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

Atstojamosios jėgos darbas:

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{R} d\vec{r} = \sum_{k=1}^n \int \vec{F}_k d\vec{r}; \quad A = \sum_{k=1}^n A_k.$$

Sunkio darbas:

$$A = \pm mg \cdot h.$$

Tamprumo jėgos darbas:

$$A = -\frac{c}{2}(r_2^2 - r_1^2); \quad A = -\frac{c}{2} \cdot r^2; \quad A = -\frac{c}{2} \cdot \lambda^2.$$

Jėgos darbas esant kūno slenkamajam judėjimui:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}_c; \quad A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} d\vec{r}_c.$$

Jėgos darbas esant kūno sukamajam judėjimui:

$$dA = M_z(\vec{F}_k) \cdot d\varphi;$$

$$dA = M_z \cdot d\varphi;$$

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi;$$

$$A = M_z \cdot (\varphi_2 - \varphi_1).$$

Galingumas:

$$N = \frac{dA}{dt}; \quad N = \vec{F} \cdot \vec{v}; \quad N = M_z \omega.$$

Jėgos projekcijos potencialiniame jėgų lauke:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Diferencialinės judėjimo lygtys

Materialiojo taško diferencialinės judėjimo lygtys:

$$\left\{ \begin{array}{l} m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum_{i=1}^n F_{ix}; \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = \sum_{i=1}^n F_{iy}; \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = \sum_{i=1}^n F_{iz}; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} m \frac{v^2}{\rho} = \sum_{i=1}^n F_{in}; \\ m \frac{d^2 s}{dt^2} = \sum_{i=1}^n F_{it}; \\ 0 = \sum_{i=1}^n F_{ib}. \end{array} \right.$$

Pirmojo dinamikos uždavinio matematinė formuluotė materialiajam taškui

$$\left\{ \begin{array}{l} F_x = m \frac{d^2 x}{dt^2}; \\ F_y = m \frac{d^2 y}{dt^2}; \\ F_z = m \frac{d^2 z}{dt^2}; \end{array} \right. \quad F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2};$$

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F}; \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F}; \quad \cos \lambda = \frac{F_z}{F}.$$

Antrojo dinamikos uždavinio matematinė formuluotė materialiajam taškui

$$\vec{F} = \vec{F}(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z);$$

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z); \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z); \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z); \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = \Phi_1(t, C_1, C_2, C_3); \\ v_y = \Phi_2(t, C_1, C_2, C_3); \\ v_z = \Phi_3(t, C_1, C_2, C_3); \end{cases} \quad \begin{cases} x = f_1(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6); \\ y = f_2(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6); \\ z = f_3(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = f_1(t, x_0, y_0, z_0, v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}); \\ y = f_2(t, x_0, y_0, z_0, v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}); \\ z = f_3(t, x_0, y_0, z_0, v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}). \end{cases}$$

Reliatyvusis materialiojo taško judėjimas

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{\Phi}_k + \vec{\Phi}_c;$$

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x_r}{dt^2} = F_x + \Phi_{kx} + \Phi_{cx}; \\ m \frac{d^2 y_r}{dt^2} = F_y + \Phi_{ky} + \Phi_{cy}; \\ m \frac{d^2 z_r}{dt^2} = F_z + \Phi_{kz} + \Phi_{cz}; \end{cases}$$

Keliamoji inercijos jėga: $\vec{\Phi}_k = -m\vec{a}_k;$

Koriolio inercijos jėga: $\vec{\Phi}_c = -m\vec{a}_c.$

Bendrosios dinamikos teoremos

Materialiojo taško judesio kiekio teorema

$$d(m\vec{v}) = \vec{F} dt; \quad \begin{cases} d(mv_x) = F_x dt; \\ d(mv_y) = F_y dt; \\ d(mv_z) = F_z dt; \end{cases}$$

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \vec{S}; \quad \begin{cases} mv_x - mv_{0x} = S_x; \\ mv_y - mv_{0y} = S_y; \\ mv_z - mv_{0z} = S_z. \end{cases}$$

Materialiųjų taškų mechaninės sistemos judesio kiekio teorema

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{R}^i; \quad \begin{cases} \frac{dK_x}{dt} = R_x^i; \\ \frac{dK_y}{dt} = R_y^i; \\ \frac{dK_z}{dt} = R_z^i; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n m_k v_{kx} = \sum_{k=1}^n F_{kx}^i; \\ \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n m_k v_{ky} = \sum_{k=1}^n F_{ky}^i; \\ \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n m_k v_{kz} = \sum_{k=1}^n F_{kz}^i. \end{cases}$$

Materialiųjų taškų mechaninės sistemos impulsų teorema

$$d\vec{K} = \vec{R}^i dt; \quad d\vec{K} = d\vec{S}^i; \quad \vec{K} - \vec{K}_0 = \vec{S}^i; \quad \begin{cases} K_x - K_{0x} = S_x^i; \\ K_y - K_{0y} = S_y^i; \\ K_z - K_{0z} = S_z^i. \end{cases}$$

Materialiojo taško kinetinio momento teorema

$$\frac{d}{dt} \vec{M}_0(m\vec{v}) = \vec{M}_0(\vec{F}); \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} M_x(m\vec{v}) = M_x \vec{F}; \\ \frac{d}{dt} M_y(m\vec{v}) = M_y \vec{F}; \\ \frac{d}{dt} M_z(m\vec{v}) = M_z \vec{F}; \end{cases}$$

$$M_z(\vec{F}) = 0; \quad l_z = M_z(m\vec{v}) = \text{const.}$$

$$\vec{M}_o(\vec{F}) = 0; \quad \vec{l}_o = \vec{M}_o(m\vec{v}) = \text{const.}$$

Materialiųjų taškų mechaninės sistemos kinetinio momento teorema

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{M}_o^i; \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n M_x(m_k \vec{v}_k) = \sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k^i); \\ \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n M_y(m_k \vec{v}_k) = \sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k^i); \\ \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n M_z(m_k \vec{v}_k) = \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k^i); \end{cases}$$

$$\vec{M}_o^i = 0; \quad \vec{L}_o = \sum_{k=1}^n \vec{M}_o(m_k \vec{v}_k) = \text{const.}$$

$$\sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k^i) = 0; \quad L_z = \sum_{k=1}^n M_z(m_k \vec{v}_k) = \text{const.}$$

$$d\vec{L}_O = \vec{M}_O^i dt; \quad \vec{L} - \vec{L}_0 = \int_{t_0=0}^t \vec{M}_O^i dt; \quad \begin{cases} L_x - L_{0x} = \int_{t_0=0}^t \sum_{k=1}^n M_x(F_k^i) dt; \\ L_y - L_{0y} = \int_{t_0=0}^t \sum_{k=1}^n M_y(F_k^i) dt; \\ L_z - L_{0z} = \int_{t_0=0}^t \sum_{k=1}^n M_z(F_k^i) dt. \end{cases}$$

Kinetinės energijos teorema

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dA; \quad \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A; \quad T - T_0 = A^i + A^v; \quad T - T_0 = A^i.$$

Mechaninės energijos tvermė

Materialiajam taškui: $\frac{mv^2}{2} + V = \frac{mv_0^2}{2} + V_0.$

Mechaninei sistemai: $T + V = T_0 + V_0.$

Masės centro judėjimo teorema:
$$\begin{cases} M \frac{d^2 x_C}{dt^2} = \sum_{i=1}^n F_{ix}^i; \\ M \frac{d^2 y_C}{dt^2} = \sum_{i=1}^n F_{iy}^i; \\ M \frac{d^2 z_C}{dt^2} = \sum_{i=1}^n F_{iz}^i; \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^n F_{ix}^i = 0; \quad v_{Cx} = 0; \quad x_C = \text{const.}$$

Standžiojo kūno dinamika

Slenkamasis judėjimas:
$$\begin{cases} M \frac{d^2 x_C}{dt^2} = \sum_{i=1}^n F_{ix}^i; \\ M \frac{d^2 y_C}{dt^2} = \sum_{i=1}^n F_{iy}^i; \\ M \frac{d^2 z_C}{dt^2} = \sum_{i=1}^n F_{iz}^i. \end{cases}$$

Sukamasis judėjimas: $I_z \frac{d^2 \phi}{dt^2} = M_z^i.$

Plokštuminis judėjimas:

$$\begin{cases} M \frac{d^2 x_C}{dt^2} = \sum_{i=1}^n F_{ix}^i; \\ M \frac{d^2 y_C}{dt^2} = \sum_{i=1}^n F_{iy}^i; \\ I_{z_C} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \sum_{i=1}^n M_z(F_i^i). \end{cases}$$

Suvaržytos mechaninės sistemos dinamika

Holonominiai ryšiai

kintamieji, arba nestacionarūs:

$$f(x_i, y_i, z_i, t) = 0 \text{ – dvipusiai,}$$

$$f(x_i, y_i, z_i, t) \geq 0 \text{ – vienpusiai;}$$

pastovūs, arba stacionarūs:

$$f(x_i, y_i, z_i) = 0 \text{ – dvipusiai,}$$

$$f(x_i, y_i, z_i) \geq 0 \text{ – vienpusiaisiais.}$$

Neholonominiai ryšiai

$$\varphi(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t) = 0.$$

Apibendrintosios koordinatės:

$$q_k; \text{ čia } k = 1, 2, \dots, n.$$

$$\begin{cases} x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t); \\ y_i = y_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t); \\ z_i = z_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t); \end{cases}$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t); \text{ čia } i = 1, 2, \dots, n.$$

Virtualieji poslinkiai

Elementarus poslinkis

$$\delta \vec{r}_i.$$

Tikrasis elementarus poslinkis

$$d\vec{r}_i.$$

$$\begin{cases} \delta \vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \cdot \delta q_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} \cdot \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n} \cdot \delta q_n; \\ \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_i} \cdot \delta q_i. \end{cases}$$

Virtualusis jėgos darbas:

$$\delta A = \vec{F} \cdot \delta \vec{r} = |\vec{F}| \cdot |\delta \vec{r}| \cos \alpha;$$

$$\delta A = F_x \cdot \delta x + F_y \cdot \delta y + F_z \cdot \delta z.$$

Idealieji ryšiai:

$$\sum_{i=1}^N \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i \equiv 0.$$

Apibendrintoji jėga:

$$Q_k = \frac{\left(\sum_{i=1}^N \delta A_i \right)_k}{\delta q_k}; \quad Q_k = \sum_{i=1}^N F_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k};$$

$$\sum_{i=1}^N \delta A_i = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_n \delta q_n;$$

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right).$$

Virtualiųjų poslinkių principas

$$\sum \delta A_{iF} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r} = 0;$$

$$\sum \delta A_{iF} = \sum_{i=1}^n (F_{ix} \delta x_i + F_{iy} \delta y_i + F_{iz} \delta z_i) = 0.$$

d'Alamberto principas

Materialiajam taškui:

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i - m_i \vec{a}_i = 0;$$

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i + \vec{\Phi}_i = 0;$$

$$F_{ix} + R_{ix} + \Phi_{ix} = 0;$$

$$F_{iy} + R_{iy} + \Phi_{iy} = 0;$$

$$F_{iz} + R_{iz} + \Phi_{iz} = 0.$$

Mechaninei sistemai:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \vec{R}_i + \sum_{i=1}^n \vec{\Phi}_i = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_o(\vec{F}_i) + \sum_{i=1}^n \vec{M}_o(\vec{R}_i) + \sum_{i=1}^n \vec{M}_o(\vec{\Phi}_i) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} + \sum_{i=1}^n R_{ix} + \sum_{i=1}^n \Phi_{ix} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} + \sum_{i=1}^n R_{iy} + \sum_{i=1}^n \Phi_{iy} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iz} + \sum_{i=1}^n R_{iz} + \sum_{i=1}^n \Phi_{iz} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_x(\vec{F}_i) + \sum_{i=1}^n M_x(\vec{R}_i) + \sum_{i=1}^n M_x(\vec{\Phi}_i) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_y(\vec{F}_i) + \sum_{i=1}^n M_y(\vec{R}_i) + \sum_{i=1}^n M_y(\vec{\Phi}_i) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_z(\vec{F}_i) + \sum_{i=1}^n M_z(\vec{R}_i) + \sum_{i=1}^n M_z(\vec{\Phi}_i) = 0.$$

Suminis inercijos jėgų vektorius: $\vec{\Phi} = \sum_{i=1}^n \vec{\Phi}_i; \quad \vec{\Phi} = -M \cdot \vec{a}_C.$

Suminis inercijos jėgų vektorinis momentas: $\vec{M}_O^\Phi = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\Phi_i).$

Esant kūno sukamajam judėjimui: $M_z^\Phi = -\varepsilon \cdot I_z.$

Atraminių reakcijų dinaminės dedamosios: $R_B^d = \frac{1}{a} \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \cdot \sqrt{I_{yz}^2 + I_{xz}^2}.$

Reakcijų dinaminių dedamųjų pusiausvyros sąlygos:

$$My_C + \omega^2 Mx_C = 0;$$

$$-\varepsilon \cdot Mx_C + \omega^2 My_C = 0;$$

$$\varepsilon \cdot I_{xz} - \omega^2 I_{yz} = 0;$$

$$\varepsilon \cdot I_{yz} + \omega^2 I_{xz} = 0;$$

čia $x_C = 0; y_C = 0; I_{xz} = 0; I_{yz} = 0.$

Bendroji dinamikos lygtis

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i + \vec{R}_i + \vec{\Phi}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i + \vec{R}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i + \vec{R}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n \{ (F_{ix} + R_{ix} - m_i \ddot{x}_i) \cdot \delta x_i + (F_{iy} + R_{iy} - m_i \ddot{y}_i) \cdot \delta y_i + (F_{iz} + R_{iz} - m_i \ddot{z}_i) \cdot \delta z_i \} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i + \vec{\Phi}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n \{ (F_{ix} - m_i \ddot{x}_i) \cdot \delta x_i + (F_{iy} - m_i \ddot{y}_i) \cdot \delta y_i + (F_{iz} - m_i \ddot{z}_i) \cdot \delta z_i \} = 0.$$

Lagranžo antrojo tipo lygtis

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right) = Q_k; \quad \text{čia } k = 1, 2, \dots, n.$$

Smūgis

Judėjimo kiekio teorema smūgiui: $m\vec{u} - m\vec{v} = \vec{F} \cdot \tau.$

Smūgio impulsas arba tiesiog smūgis: $\vec{S} = \int_0^t \vec{F} dt.$

Smūgio judesio kiekio teorema taškui: $m\vec{u} - m\vec{v} = \vec{S};$

$$\begin{cases} mu_x - mv_x = S_x; \\ mu_y - mv_y = S_y; \\ mu_z - mv_z = S_z. \end{cases}$$

Mechaninės sistemos judesio kiekio teorema smūgiui:

$$\sum_{k=1}^n m_k \vec{u}_k - \sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_k = \sum_{k=1}^n \vec{S}_k^i + \sum_{k=1}^n \vec{S}_k^v;$$

$$\vec{K} - \vec{K}_0 = \sum_{k=1}^n \vec{S}_k^i;$$

$$\begin{cases} K_x - K_{0x} = \sum_{k=1}^n S_{kx}^i; \\ K_y - K_{0y} = \sum_{k=1}^n S_{ky}^i; \\ K_z - K_{0z} = \sum_{k=1}^n S_{kz}^i. \end{cases}$$

Mechaninės sistemos masės centro greičio kitimas dėl smūgio:

$$M\vec{u}_C - M\vec{v}_C = \sum_{k=1}^n \vec{S}_k^i.$$

Mechaninės sistemos smūgio kinetinio momento teorema:

$$\vec{L} - \vec{L}_0 = \sum_{k=1}^n \vec{M}_O(\vec{S}_k^i); \quad \begin{cases} L_x - L_{0x} = \sum_{k=1}^n M_x(\vec{S}_k^i); \\ L_y - L_{0y} = \sum_{k=1}^n M_y(\vec{S}_k^i); \\ L_z - L_{0z} = \sum_{k=1}^n M_z(\vec{S}_k^i). \end{cases}$$

Taško greitis po smūgio:

$$\vec{u} = \vec{v} + \frac{1}{m} \vec{S}.$$

Atsistatymo koeficientas: $k = \frac{u}{v}; \quad k = \frac{u}{v} = \frac{m \cdot u}{m \cdot v} = \frac{S_2}{S_1}; \quad k = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}.$

Taško greitis po ekscentrinio smūgio:

$$u = v \cdot \sqrt{\sin^2 \alpha + k^2 \cos^2 \alpha}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{k} \operatorname{tg} \alpha, \quad \beta > \alpha.$$

Tiesioginis centrinis dviejų kūnų smūgis:

$$\begin{cases} m_1(u_1 - v_1) = -S; \\ m_2(u_2 - v_2) = S. \end{cases}$$

Taško greitis po ekscentrinio smūgio:

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Pagrindinė smūgio lygtis pirmajai fazei:

$$\begin{cases} m_1(u - v_1) = -S'_1; \\ m_2(u - v_2) = S_1. \end{cases}$$

Pirmosios fazės smūgio impulsas:

$$S_1 = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}.$$

Pagrindinė lygtis antrajai smūgio fazei:

$$\begin{cases} m_1 u_1 - m_1 u = -S'_2; \\ m_2 u_2 - m_2 u = S_2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 u_1 - m_1 u = -k \cdot S'_1; \\ m_2 u_2 - m_2 u = k \cdot S_1. \end{cases}$$

Kūnų greičiai po smūgio:

$$\begin{cases} u_1 = v_1 - (1+k) \frac{m_2}{m_1+m_2} (v_1 - v_2); \\ u_2 = v_2 + (1+k) \frac{m_1}{m_1+m_2} (v_1 - v_2). \end{cases}$$

Atsistatymo koeficiento reikšmė:

$$k = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2}.$$

Smūgio impulsas:

$$S = (1+k) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2).$$

Absoliučiai netamprus smūgis:

$$\text{greičių reikšmės po smūgio: } \begin{cases} u_1 = u; \\ u_2 = u; \end{cases}$$

$$\text{smūgio impulso reikšmė: } S = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2).$$

Absoliučiai tamprus smūgis:

$$\text{greičių reikšmės po smūgio: } \begin{cases} u_1 = v_1 - \frac{2m_2}{m_1+m_2} (v_1 - v_2); \\ u_2 = v_2 + \frac{2m_1}{m_1+m_2} (v_1 - v_2); \end{cases}$$

$$\text{smūgio impulso reikšmė: } S = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2).$$

Karno teorema

$$\Delta T = \frac{1}{2} m_1 (v_1 - u)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2 - u)^2.$$

$$\text{Kampinio greičio pokytis: } \omega - \omega_0 = \frac{\sum_{k=1}^n M_z (\vec{S}_k^i)}{I_z}.$$

Svyravimai

laisvųjų svyravimų diferencialinė lygtis:	$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0;$
laisvųjų svyravimų lygtis:	$x = a \sin(kt + \alpha);$
svyravimų amplitudė:	$a;$ $a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}};$
svyravimų juosta:	$2a;$
svyravimų fazė:	$(kt + \alpha);$
svyravimų pradinė fazė:	$\alpha;$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{kx_0}{v_0};$
svyravimų periodas:	$T = \frac{2\pi}{k};$
svyravimų savieji dažniai:	$k = \sqrt{\frac{c}{m}};$
svyravimų ciklinis dažnis:	$k = \frac{2\pi}{T};$
dažnis hercais (Hz):	$f = \frac{1}{T};$
gėstančiųjų svyravimų diferencialinė lygtis:	$m \frac{d^2x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2x = 0;$
gėstančiųjų svyravimų lygtis, kai $n < k$:	$x = ae^{-nt} \sin(k_1t + \alpha_1);$
ciklinis gėstančiųjų svyravimų dažnis:	$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2};$
gėstančiųjų svyravimų amplitudė:	$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + nx_0)^2}{k_1^2}};$
gėstančiųjų svyravimų pradinė fazė:	$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{x_0k_1}{v_0 + nx_0};$

svyravimų periodas: $T_R = \frac{2\pi}{k_1};$

gęstančiųjų svyravimų dekrementas: $D = \frac{a_{i+1}}{a_{i-1}} = e^{-nT_R};$

gęstančiųjų svyravimų logaritminis dekrementas: $\lambda = \ln|D| = nT_R;$

gęstančiųjų svyravimų lygtis, kai $n > k$: $x = e^{-nt} (C_1 e^{\sqrt{n^2 - k^2}t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2 - k^2}t});$

gęstančiųjų svyravimų lygtis, kai $n = k$: $x = e^{-nt} (C_1 + C_2 t);$

priverstinių svyravimų neįvertinant slopinimo diferencialinė lygtis:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = h \sin(\omega t + \delta);$$

priverstinių svyravimų nesant slopinimui bendrasis sprendinys:

$$x = x_1 + x_2; \quad x_1 = a \sin(kt + \alpha); \quad x_2 = A \sin(\omega t + \delta); \quad x_2 = \frac{h}{k^2 - \omega^2} \sin(\omega t + \delta).$$

statinė deformacija: $A_0 = \frac{h}{k^2};$

svyravimų dinamiškumo koeficientas: $\eta = \frac{A}{A_0};$

mažų dažnių svyravimų dinamiškumo koeficientas: $\eta = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{k^2}};$

didelių dažnių svyravimų dinamiškumo koeficientas: $\eta = \frac{1}{\frac{\omega^2}{k^2} - 1};$

priverstinių svyravimų judėjimo lygtis:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt - \frac{h}{k^2 - \omega^2} \left(\sin \delta \cdot \cos kt + \frac{\omega}{k} \cos \delta \cdot \sin kt \right) + \frac{h}{k^2 - \omega^2} \sin(\omega t + \delta);$$

$$x_1 = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt;$$

$$x_2 = -\frac{h}{k^2 - \omega^2} \left(\sin \delta \cdot \cos kt + \frac{\omega}{k} \cos \delta \cdot \sin kt \right);$$

$$x_3 = \frac{h}{k^2 - \omega^2} \sin(\omega t + \delta).$$