VILNIAUS GEDIMINO TECHNIKOS UNIVERSITETAS

TEORINĖS MECHANIKOS KATEDRA

E. Michnevič, L. Syrus, R. Belevičius

TEORINĖ MECHANIKA

STATIKA

Mokomoji knyga

Vilnius „Technika“ 2003

UDK 531/534 (075.8)
Mi 31

E. Michnevič, L. Syrus, R. Belevičius. Teorinė mechanika. Statika. Mokomoji knyga. Vilnius: Technika, 2003. 84 p.

Knygoje išdėstyta klasikinės mechanikos teorijos dalis – statika. Suformuluoti statikos svarbiausieji uždaviniai, apibrėžtos pagrindinės sąvokos, išnagrinėti visi statikos nagrinėjami objektai – jėgos, jėgų sistemos bei įvairių jėgų sistemų veikiami kūnai ir jų sistemos. Aprašyti jėgų sistemų klasifikavimo principai, išnagrinėtos ir suformuluotos šių sistemų pusiausvyros sąlygos. Vaizdžiai demonstruojamas statikos metodų taikymas įvairiems uždaviniams spręsti.

Knyga parengta remiantis Vilniaus Gedimino technikos universiteto studijų programa ir rekomenduojama pagrindinių studijų studentams, siekiantiems savarankiškai susipažinti su statikos metodų teoriniais pagrindais.

Leidinį rekomendavo Fundamentinių mokslų fakulteto studijų komitetas

Recenzavo: prof. habil. dr. M. Leonavičius,
prof. habil. dr. J. Atkočiūnas

VGTU leidyklos „Technika“ 628 mokomosios metodinės literatūros knyga.

ISBN 9986–05–661–6

TURINYS

PRATARMĖ

Mechanika – nuolat tobulėjantis fundamentinis mokslas, apimantis klasikinę ir naujausias, dažnai dar iki galo nesuformuluotas, teorijas, kuriame plačiai taikomi šiuolaikiniai skaičiavimo ir matematinio modeliavimo metodai, pritaikomos naujausios technikos galimybės eksperimentams, tyrimams bei virtualiajam – kompiuteriniam įvairių konstrukcijų ir procesų modeliavimui atlikti. Aukštosiose technikos mokyklose susipažinimas su šiuo mokslu prasideda nuo teorinės mechanikos kurso. Teorinė mechanika – dalykas, kurio studijavimas leidžia būsimiems inžinieriams įsisavinti klasikinės mechanikos teorijos pagrindus, padeda suformuoti inžinerinį mąstymą, įgyti uždavinių sprendimo įgūdžių, būtinų studijuojant tokius inžinerinius dalykus, kaip medžiagų atsparumas, medžiagų mechanika, mašinų ir mechanizmų teorija ir t. t.

Technikos universitetų šiuolaikinių studijų programose numatomos paskaitos ir savarankiškas papildomos literatūros nagrinėjimas. Todėl autoriai nutarė parengti teorinės mechanikos statikos dalies paskaitų konspektą ir visus kurse nagrinėjamus teorijos klausimus aptarti daug išsamiau negu tai įmanoma padaryti per paskaitoms skirtą laiką.

Autoriai bus dėkingi skaitytojams už pastabas ir dalykinius siūlymus.

Autoriai dėkingi recenzentams VGTU Medžiagų atsparumo katedros prof. habil. dr. M. Leonavičiui ir Statybinės mechanikos katedros prof. habil. dr. J. Atkočiūnui už pastabas ir rekomendacijas rengiant šią knygą.

ĮVADAS

Mechanika – fizinių mokslų šaka, nagrinėjanti materialiuosius objektus – kūnus, kūnų sistemas, tų sistemų pusiausvyrą, judėjimo dėsnius bei mechaninę tarpusavio sąveiką.

Statika – mokslas apie pavienius materialiuosius kūnus bei mechanines sistemas veikiančių jėgų pusiausvyrą.

Statikos uždaviniai

Statikoje vyrauja dviejų rūšių uždaviniai:

1. veikiančios jėgų sistemos pakeitimas kita, jai ekvivalentine, tačiau paprastesne sistema;
2. bendrųjų sąlygų nustatymas, kai jėgų sistema yra pusiausvira.

Pagrindinės sąvokos

Mechanikoje nagrinėjami šie objektai: *materialusis taškas*, *kietasis kūnas* ir *mechaninė sistema*.

Materialusis taškas. Be galo mažas fizinis kūnas mechanikoje vadinamas materialiuoju tašku.

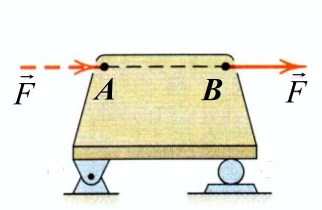
Kietasis kūnas. Statikoje tiriamas *absoliučiai kietas kūnas* – kūnas, kuriame, veikiant išorinėms jėgoms, atstumai tarp jo taškų nesikeičia, ir kūnas išlaiko savo pirminę geometrinę formą. Realius deformuojamus kūnus galima laikyti absoliučiai kietais, kai jų deformacijos, lyginant su kūno matmenimis, yra tokios mažos, kad jų galima nepaisyti.

Mechaninė sistema. Materialiųjų taškų, arba kietųjų kūnų, visuma, kurioje kiekvieno taško arba kūno judėjimas priklauso nuo kitų taškų arba kūnų judėjimo ir ryšių tarp jų, yra vadinama mechanine sistema.

Jėga. Dviejų materialiųjų kūnų mechaninės sąveikos matas mechanikoje vadinamas *jėga*. Fizinė jėgos prigimtis teorinėje mechanikoje neturi reikšmės, šiuo atveju mus domina tik veikiančios jėgos sukeltas efektas. Kadangi kūnų tarpusavio mechaninis poveikis yra galimas per tašką arba plokštumą, jėgos yra skirstomos į koncentruotąsias ir išskirstytąsias. Gamtoje nėra koncentruotųjų jėgų, tai tik prielaida, leidžianti supaprastinti sprendžiamus uždavinius.

Koncentruotoji jėga yra vektorinis dydis, apibrėžiamas trimis faktoriais: *pridėties tašku*, *kryptimi* ir *didumu*. Vektoriniams dydžiams žymėti naudosime rodyklę "$\rightarrow$", pavyzdžiui: $\vec{F}$.

- Jėgos *pridėties taškas* – tai kūno taškas, į kurį sutelktas jėgos veiksmas.
- Jėgos *kryptimi* vadinama kryptis, kuria pradėtų judėti jėgos veikiamas kūnas, iki tol buvęs pusiausviras. Tiesė, išvesta per jėgos pridėties tašką jėgos veikimo kryptimi, yra vadinama jėgos veikimo tiese. Jėgą galima perkelti išilgai jos veikimo tiesės (1 pav.).

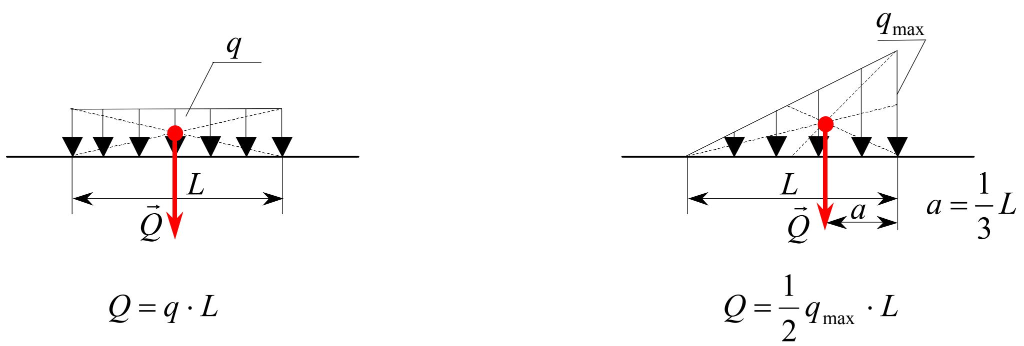


1 pav. Jėgos veikimo tiesė

- Jėgos *didumas* pagal tarptautinę matavimo sistemą SI matuojamas niutonais. Vienas niutonas (*N*) yra jėga, kuri vieno kilogramo (*kg*) masei suteikia vieno metro (*m*) per sekundę kvadratu (s^2) pagreitį:

$$1N = \frac{1kg \cdot 1m}{1s^2}. \tag{1}$$

Išskirstytosios apkrovos yra nusakomos pridėties linija arba pridėties plotu, veikimo intensyvumu bei kryptimi. Akademinio pobūdžio uždaviniuose tokios apkrovos yra pakeičiamos jas atstojančiomis koncentruotomis jėgomis (2 pav.).



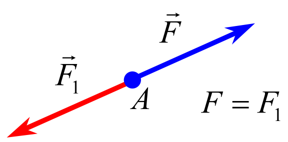
2 pav. Paprasčiausi išskirstytųjų apkrovų pakeitimo atvejai

Jėgų sistema. Kūną veikiančių jėgų visuma vadinama *jėgų sistema*. Jėgų sistemas patogu klasifikuoti pagal tai, kaip jos yra išsidėsčiusios erdvėje. Todėl mechanikoje nagrinėjamos: *plokščioji jėgų sistema* – kai visos jėgos yra išsidėsčiusios vienoje plokštumoje, ir *erdvinė jėgų sistema* – kai visų jėgų veikimo tiesės erdvėje yra išsidėsčiusios bet kaip.

Teorinės mechanikos pagrindą sudaro dėsniai, kuriuos suformulavo Galilėjus ir Niutonas. Tai dėsniai, kuriais apibendrinami ilgaamžiai stebėjimai, bandymai ir praktiniai žmonių darbai. Šie pagrindiniai dėsniai teorinėje mechanikoje yra aksiomos, t. y. teiginiai, kurie nereikalauja įrodymo.

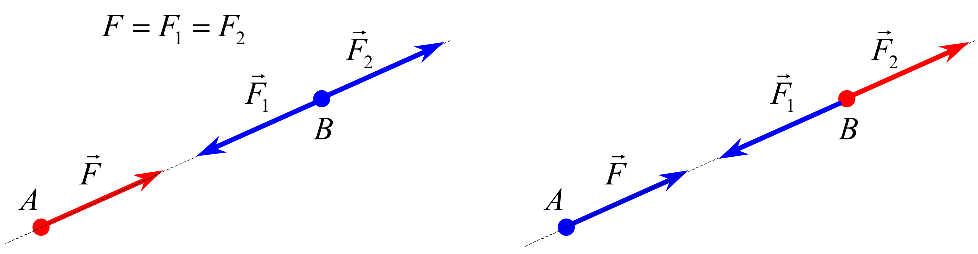
Statikos aksiomos

1 *aksioma.* Norint, kad dvi kūną veikiančios jėgos būtų pusiausviros, būtina ir pakanka, kad tos jėgos būtų lygios ir veiktų viena tiese priešingomis kryptimis (3 pav.). Tai yra paprasčiausias atsisveriančių jėgų sistemos atvejis.



3 pav. Jėgos, sudarančios paprasčiausią atsisveriančių jėgų sistemą

2 *aksioma.* Jei prie veikiančios kūną jėgų sistemos pridėsime ar atimsime atsisveriančių jėgų sistemą, pavyzdžiui $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2\right)$ (žr. 4a pav.), tai nuo to kūno būvis nepasikeis. Matome (4b pav.), kad jėgos $\vec{F}$ ir $\vec{F}_1$ sudaro atsisveriančių jėgų sistemą, kurią galima atmesti.

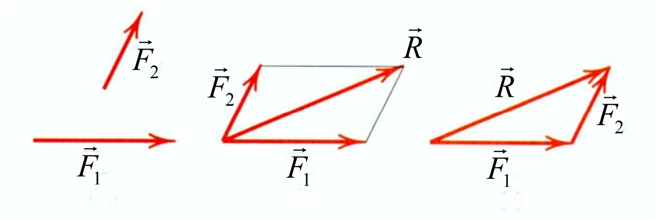


a) b)

4 pav. Jėgos perkėlimas išilgai jos veikimo tiesės

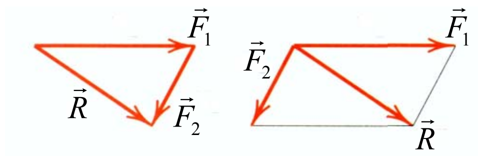
Išvada: kietąjį kūną veikiančią jėgą galima perkelti išilgai jos veikimo tiesės (4b pav.).

3 *aksioma.* Dviejų viename kūno taške pridėtų jėgų atstojamoji yra lygi jėgų vektorių geometrinei sumai, t. y. didumu ir kryptimi lygi sudaryto iš tų jėgų lygiagretainio įstrižainei (5–6 pav.).



$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

5 pav. Vektorių sudėtis



$$\vec{R} = \vec{F}_1 - \vec{F}_2$$

6 pav. Vektorių skirtumas

Dviejų viename taške pridėtų jėgų $\vec{F}_1$ ir $\vec{F}_2$ atstojamosios jėgos $\vec{R}$ dydį ir kryptį galima rasti analiziniu būdu taikant kosinusų ir sinusų teoremas.

- Atstojamosios jėgos $\vec{R}$ didumas (modulis) randamas iš trikampio *OAB* (7 pav.):

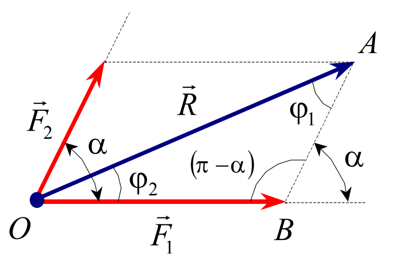
$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos(\pi - \alpha)},$$

arba

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}\,. \qquad (2)$$

- Atstojamosios jėgos $\vec{R}$ kryptis nusakoma kampais φ_1 ir φ_2 (5 pav.):

$$\frac{F_1}{\sin\varphi_1} = \frac{F_2}{\sin\varphi_2} = \frac{R}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{R}{\sin\alpha}\,. \qquad (3)$$



7 pav. Atstojamosios jėgos kryptis

4 aksioma. Jėgos, kuriomis du kūnai veikia vienas kitą (akcija ir reakcija), yra lygios ir veikia viena tiese priešingomis kryptimis. Šios jėgos yra pridėtos prie skirtingų kūnų ir nesudaro atsisveriančių jėgų sistemos.

Ketvirtoji aksioma yra vienas iš pagrindinių mechanikos dėsnių, nes gamtoje vienpusio jėgos veikimo nėra.

5 aksioma. Jei materialiųjų taškų sistema ar deformuojamas kūnas, veikiamas tam tikrų jėgų, yra pusiausviras, tai ši pusiausvyra nebus suardyta, jei kūnas taps absoliučiai kietu. Tačiau atvirkščia tvarka šio dėsnio taikyti negalima, nes nors jėgų veikiamas absoliučiai kietas kūnas yra pusiausviras, jam tapus deformuojamuoju pusiausvyra gali būti suardyta.

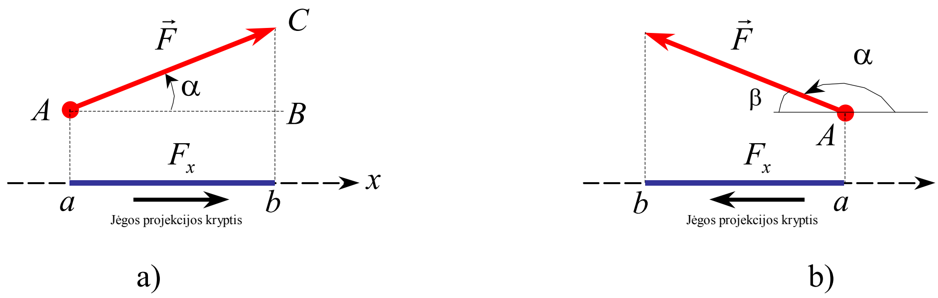
6 aksioma. Bet kurį suvaržytą kūną galima būtų laikyti laisvuoju, nutraukus ryšius ir vietoj jų pridėjus atitinkamas ryšių reakcijų jėgas (dažniausiai pasitaikančių ryšių analizė atlikta 1.8 skyrelyje).

1. JĖGOS IR JĖGŲ SISTEMOS

Teorinės mechanikos kursas pradedamas nuo jėgos sąvokos įvedimo. Naudojant jėgą yra įvertinamas vieno materialiojo kūno mechaninis poveikis kitam materialiajam kūnui. Skaičiavimo schemose jėga vaizduojama kaip vektorius, kurio ilgis atitinka poveikio didumą, o kryptis sutampa su poveikio kryptimi. Sprendžiant mechanikos uždavinius, dažnai tenka nagrinėti ne vienos jėgos, bet tam tikros jėgų sistemos, sudarytos iš skirtingo didumo ir krypties jėgų, poveikį. Atsižvelgiant į jėgų išsidėstymą erdvėje, bet kuri jėgų sistema gali būti priskirta plokščiajai arba erdvinei jėgų sistemoms, kurios savo ruožtu yra skirstomos į susikertančių, lygiagrečiųjų arba bet kaip išdėstytų jėgų sistemas. Todėl toliau aptarsime bendrus atskirų jėgų bei jėgų sistemų poveikių kūnams arba kūnų sistemoms įvertinimo principus.

1.1. JĖGA

Pagal geometrinius požymius statikos uždaviniai gali būti skirstomi į tris grupes: vienmačiai, dvimačiai (plokštieji) ir trimačiai (erdviniai). Atitinkamai tenka parinkti vienos, dviejų arba trijų koordinačių ašių kryptis. Nors daugelis statikos uždavinių yra formuluojami ir sprendžiami naudojant Dekarto koordinačių sistemą, pasitaiko atvejų, kai koordinačių ašys nėra statmenos viena kitai. Todėl nagrinėsime bendrąjį atvejį – *jėgos projekciją* į laisvai pasirinktą ašį.



8 pav. Jėgos projekcija į ašį

Tarkim, kad yra ašis *x* ir jėga $\vec{F}$, pridėta kūno taške *A* (8a pav.). Jėga ir ašis yra vienoje plokštumoje. Iš jėgos pradinio ir galinio taškų leidžiami statmenys į ašį *x*. Gautoji atkarpa *ab* ašyje *x* vadinama jėgos $\vec{F}$ projekcija į ašį *x* ir yra žymima F_x:

$$F_x = ab. \tag{4}$$

Jėgos projekcijos F_x kryptį nusako atkarpos *ab* atskaitos kryptis – nuo taško *a* link taško *b* (8a,b pav.). Jėgos projekcijos F_x didumas randamas iš ΔABC:

$$\cos\alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{F_x}{F},$$

$$\boxed{F_x = F\cos\alpha,} \tag{5}$$

čia F – jėgos modulis (didumas); kampas α matuojamas prieš laikrodžio rodyklę nuo teigiamos x ašies krypties jėgos link. (5) išraiška tinka bet kokiai kampo α reikšmei.

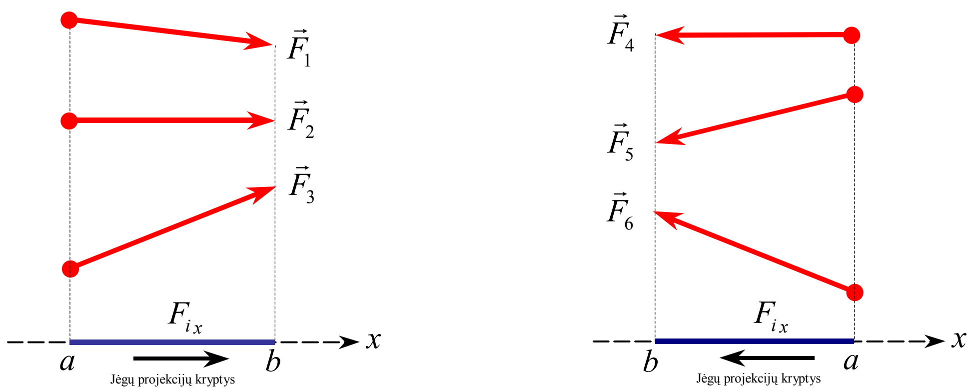
Kai jėgos projekcijos kryptis nesutampa su teigiama ašies kryptimi (8b pav.), jėgos projekcija turi minuso ženklą, nes:

$$F_x = F\cos\alpha = F\cos(180-\beta) = -F\cos\beta\ . \tag{6}$$

Jėgos projekcija į ašį yra skaliarinis dydis, lygus jėgos modulio ir kosinuso smailaus kampo tarp ašies ir jėgos sandaugai. Jėgos projekcijos ženklą nusako jėgos su teigiama ašies kryptimi kampo kosinusas, pavyzdžiui:

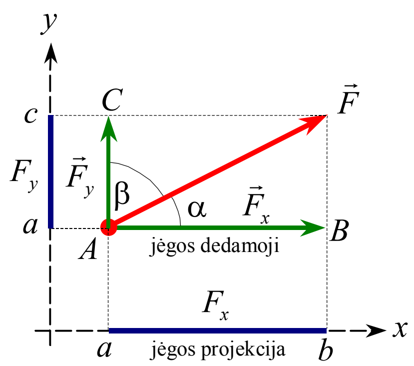
$\alpha = 0$	$F_x = F\cos 0 = F$
$\alpha = 90^0$	$F_x = F\cos 90^0 = 0$
$\alpha = 180^0$	$F_x = F\cos 180^0 = -F$

Skirtingos jėgos gali turėti vienodo didumo ir ženklo projekcijas (9 pav.), todėl jėgai nustatyti nepakanka žinoti jėgos projekciją į vieną ašį.



9 pav. Jėgų projekcijos į ašį

Norint nustatyti jėgą plokštumoje, reikia turėti jos projekcijas į dvi viena kitai statmenas koordinačių ašis bei jėgos pridėties tašką (10–11 pav.).



10 pav. Jėgos projekcijos plokštumoje

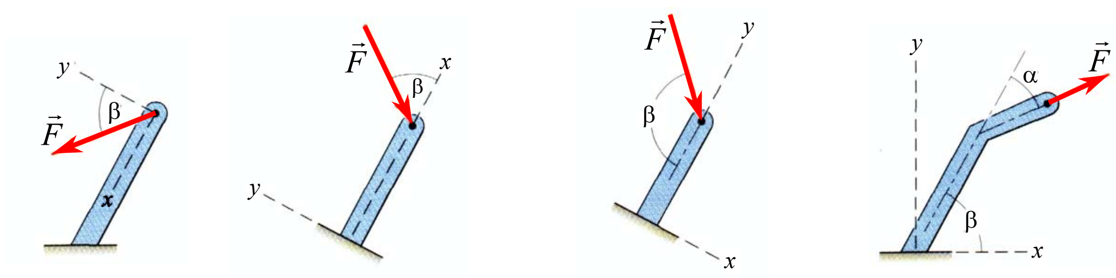
$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y. \tag{7}$$

Jėgos didumas (modulis) randamas taip:

$$\boxed{F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2},} \tag{8}$$

kur $F_x = F\cos\alpha$; $F_y = F\cos\beta = F\sin\alpha$. Todėl:

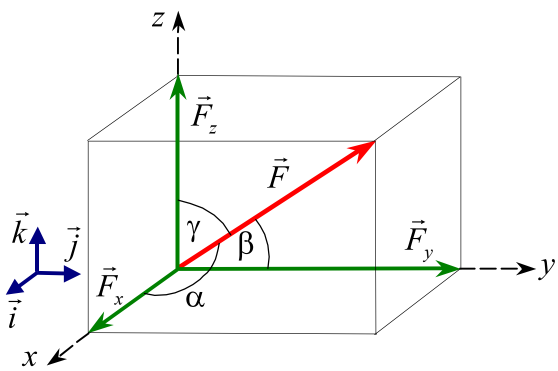
$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F}, \qquad \cos\beta = \frac{F_y}{F}. \tag{9}$$



$$\boxed{\begin{aligned} F_x &= F\sin\beta \\ F_y &= F\cos\beta \end{aligned}} \quad \boxed{\begin{aligned} F_x &= -F\cos\beta \\ F_y &= -F\sin\beta \end{aligned}} \quad \boxed{\begin{aligned} F_x &= F\sin(\pi-\beta) \\ F_y &= -F\cos(\pi-\beta) \end{aligned}} \quad \boxed{\begin{aligned} F_x &= F\cos(\beta-\alpha) \\ F_y &= F\sin(\beta-\alpha) \end{aligned}}$$

11 pav. Jėgų projekcijos į ašis

Norint nustatyti jėgą erdvėje, reikia žinoti jėgos pridėties tašką ir jėgos dedamąsias pagal tris viena kitai statmenas koordinačių ašis (12 pav.).



12 pav. Jėgos dedamosios erdvėje

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z, \tag{10}$$

čia $\vec{F}_x, \vec{F}_y$ ir $\vec{F}_z$ – jėgos $\vec{F}$ dedamosios.

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}\ , \tag{11}$$

kur $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – koordinačių ašių vienetiniai vektoriai; F_x, F_y, F_z – jėgos vektoriaus projekcijos į x, y, z koordinačių ašis.

Jėgos didumas randamas taip:

$$\boxed{F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}\ ,} \tag{12}$$

kur $F_x = F\cos\alpha$; $F_y = F\cos\beta$; $F_z = F\cos\gamma$.

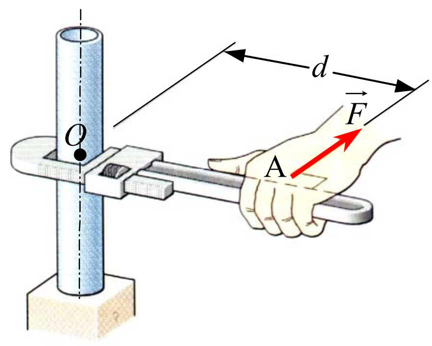
Jėgos kryptis nusakoma kampais:

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F}; \qquad \cos\beta = \frac{F_y}{F}; \qquad \cos\gamma = \frac{F_z}{F}\ . \tag{13}$$

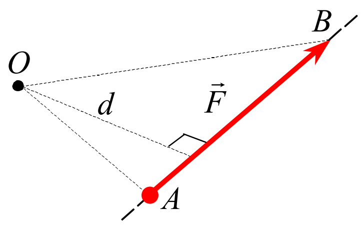
1.2. JĖGOS MOMENTAS

Atvejų, kai jėga stengiamasi vienaip arba kitaip pasukti kūną, dažnai pasitaiko praktikoje (13 pav.). Jėgos sukimo veikimui nusakyti įvesime jėgos momento apie tašką sąvoką.

Nagrinėsime jėgos $\vec{F}$ sukimą apie tašką O, kuriame vamzdžio (toliau – kūno) ašis kerta plokštumą, kurią sudaro raktas ir jėgos $\vec{F}$ veikimo tiesė (13–14 pav.).



13 pav. Jėgos momentas



Iš taško O leidžiamas statmuo (d) į jėgos $\vec{F}$ veikimo tiesę.

Atkarpa d vadinama jėgos $\vec{F}$ petimi taško O atžvilgiu.

14 pav. Jėgos momentas apie tašką

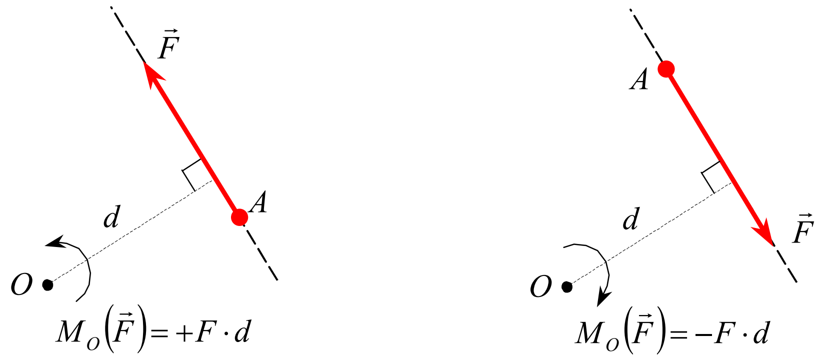
Jėgos $\vec{F}$ sukimo efektas pasireiškia plokštumoje, einančioje per jėgą $\vec{F}$ ir tašką O (13 pav.), ir priklauso nuo jėgos $\vec{F}$ didumo (modulio), peties d dydžio ir sukimo krypties.

- Jėgos momentas taško atžvilgiu žymimas $M_O(\vec{F})$, kur indeksas O rodo tašką, apie kurį skaičiuojamas momentas.

- Jėgos momentu taško atžvilgiu vadinama jėgos modulio ir peties sandauga:

$$\boxed{M_O(\vec{F}) = F \cdot d.} \tag{14}$$

Jėgos krypčiai taško atžvilgiu nurodyti prieš sandaugą rašomas (+) arba (–) ženklas. Pagal susitarimą momentas yra teigiamas, kai jėga pasuka kūną apie tašką prieš laikrodžio rodyklę (15a pav.), ir neigiamas, – kai kūnas yra pasukamas pagal laikrodžio rodyklę (15b pav.).



a) b)

15 pav. Jėgos momento apie tašką teigiama ir neigiama kryptys

Jėgos momento taško atžvilgiu skaitinė reikšmė lygi trikampio, kurio pagrindas yra jėga, o viršūnė – taškas, apie kurį skaičiuojamas momentas, dvigubam plotui. Pavyzdžiui, jėgos $\vec{F}$ (14 pav.) momentas taško O atžvilgiu lygus trikampio OAB dvigubam plotui:

$$\boxed{M_O(\vec{F}) = 2 \cdot A_{\Delta OAB},} \tag{15}$$

čia $A_{\Delta OAB}$ – trikampio OAB plotas; $\vec{F}$ – trikampio pagrindas; taškas O – trikampio viršūnė.

Jėgos momentas taško atžvilgiu pasižymi šiomis savybėmis:

- jėgos momentas taško atžvilgiu lygus nuliui, jei jėgos veikimo tiesė eina per tašką;
- jėgos momentas taško atžvilgiu nepasikeičia, kai jėga perkeliama į kitą tašką jos veikimo tiesėje, nes nepasikeičia jėgos ir peties didumai bei sukimo kryptis.

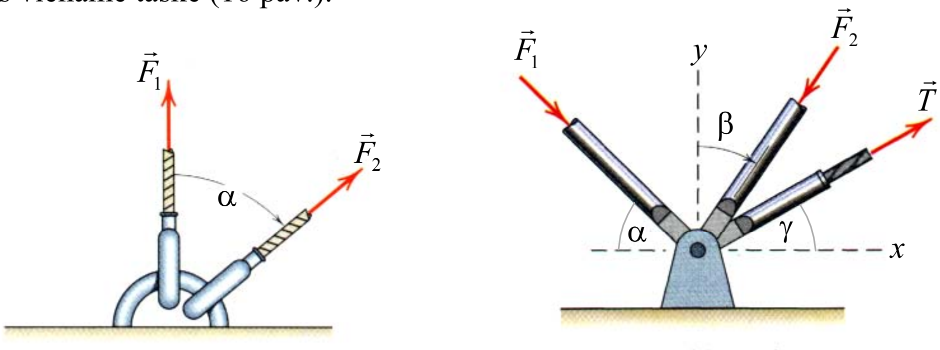
Jėgos momento dimensija – $[N \cdot m]$.

PLOKŠČIOJI JĖGŲ SISTEMA

Plokščiąją jėgų sistemą sudaro jėgos, veikiančios vienoje plokštumoje.

1.3. PLOKŠČIOJI SUSIKERTANČIŲ JĖGŲ SISTEMA

Plokščiąją susikertančių jėgų sistemą sudaro jėgos, veikiančios vienoje plokštumoje ir susikertančios viename taške (16 pav.).



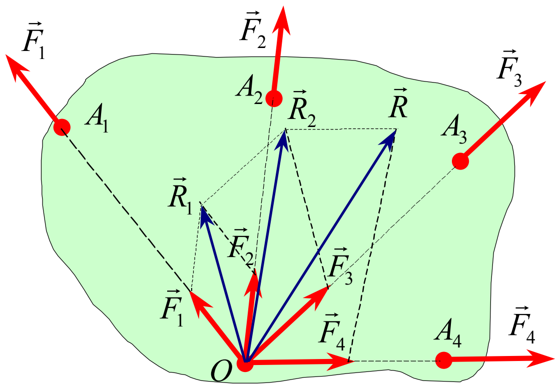
16 pav. Plokščiosios susikertančių jėgų sistemos

1.3.1. SUSIKERTANČIŲ JĖGŲ SUDĖTIS

Žinome, kad jėgos vektoriaus kryptis sutampa su jėgos veikimo kryptimi, o vektoriaus ilgis atitinka jėgos didumą. Todėl jėgas galima sudėti dviem būdais: geometriškai – grafiškai sudedant jėgų vektorius ir analiziškai – sudedant jėgų vektorių projekcijas į atitinkamas koordinačių ašis.

Susikertančių jėgų geometrinė sudėtis

Sakykime, kad absoliučiai kietą kūną veikia jėgos $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ ir $\vec{F}_4$, pridėtos atitinkamai taškuose A_1, A_2, A_3 ir A_4 (17 pav.).



17 pav. Susikertančių jėgų geometrinė sudėtis

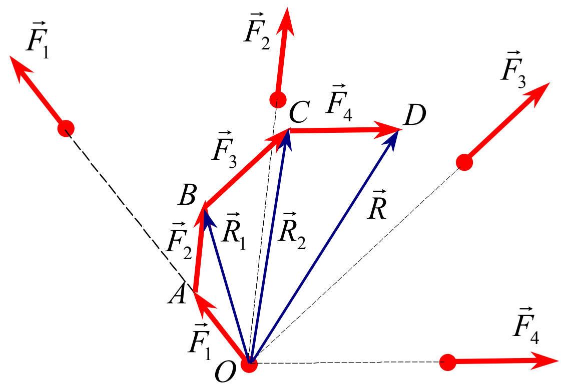
Į jėgų veikimo tiesių susikirtimo tašką *0* perkeliamos visos jėgos. Pritaikius trečiąją aksiomą ir lygiagretainio taisyklę, sudėjus jėgas $\vec{F}_1$ ir $\vec{F}_2$, gaunama šių jėgų atstojamoji jėga $\vec{R}_1$:

$$\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 . \tag{16}$$

Toliau jėgų $\vec{F}_1$ ir $\vec{F}_2$ atstojamoji $\vec{R}_1$ sudedama su jėga $\vec{F}_3$. Taip paeiliui galima sudėti visas jėgas ir gauti visos sistemos atstojamąją jėgą $\vec{R}$:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 . \tag{17}$$

Matome, kad, sudedant dvi jėgas, nebūtina sudaryti jėgų lygiagretainį. Tą patį rezultatą galima gauti prie pirmosios jėgos $\vec{F}_1$ galo pridėjus vektorių, kurio didumas ir kryptis atitinka antrosios jėgos $\vec{F}_2$ didumą ir kryptį. Sujungus pirmosios jėgos pradžią ir pridėtosios jėgos $\vec{F}_2$ galą, taip pat gaunama jų atstojamoji $\vec{R}_1$. Taigi galima nuosekliai sudėti visas jėgas (18 pav.).



18 pav. Susikertančių jėgų geometrinė sudėtis

Gautasis daugiakampis *OABCD* vadinamas jėgų daugiakampiu, o aprašytas jėgų sudėties būdas vadinamas jėgų daugiakampio taisykle. Šio daugiakampio uždaromoji *OD* pagal didumą ir kryptį yra lygi jėgų sistemos atstojamajai jėgai $\vec{R}$.

Iš brėžinio (18 pav.) matyti, kad:

$$\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 , \tag{18}$$

$$\vec{R}_2 = \vec{R}_1 + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 , \tag{19}$$

$$\vec{R} = \vec{R}_2 + \vec{F}_4 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 . \tag{20}$$

Bendruoju atveju, kai sistemą sudarančių jėgų skaičius yra lygus *n*, galima užrašyti:

$$\boxed{\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i ,} \tag{21}$$

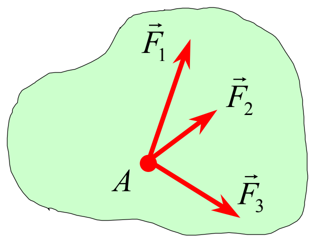
kur $i = 1, 2, \ldots, n$.

Taigi susikertančių jėgų sistema pakeičiama viena jai ekvivalentine jėga $\vec{R}$, pridėta jėgų veikimo tiesių susikirtimo taške, ir lygia sistemą sudarančių jėgų geometrinei sumai.

Susikertančių jėgų analizinė sudėtis

Atstojamosios projekcijos teorema: plokščiosios, viename taške susikertančių jėgų sistemos atstojamosios projekcija į ašį yra lygi sistemą sudarančių jėgų projekcijų į tą pačią ašį algebrinei sumai.

Kūno taške *A* (19 pav.) pridėta plokščioji susikertančių jėgų sistema ($\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$).

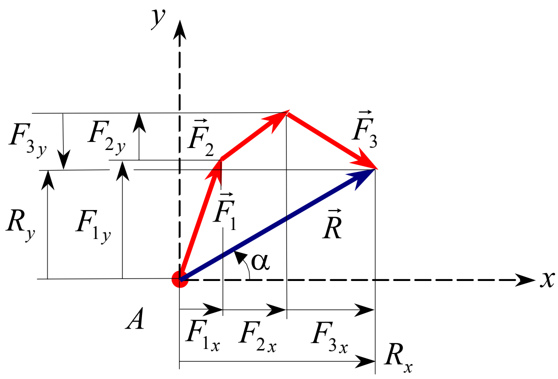


19 pav. Susikertančių jėgų sistema

Šios jėgų sistemos atstojamoji $\vec{R}$ randama taikant jėgų daugiakampio taisyklę:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \sum_{i=1}^{3} \vec{F}_i \,. \tag{22}$$

Analiziškai rasti jėgų atstojamosios $\vec{R}$ dydį galima visas jėgas suprojektavus į *x* ir *y* koordinačių ašis (20 pav.).



20 pav. Jėgų ir jėgų sistemos atstojamosios projekcijos

$$\begin{aligned} R_x &= F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = \sum_{i=1}^{3} F_{ix} \,, \\ R_y &= F_{1y} + F_{2y} + \left(-F_{3y}\right) = \sum_{i=1}^{3} F_{iy} \,. \end{aligned} \tag{23}$$

Ši teorema analogiškai įrodoma esant bet kuriam jėgų skaičiui *n*, todėl galima užrašyti:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} \,,$$

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} \,. \tag{24}$$

Atstojamosios jėgos $\vec{R}$ didumas (modulis) randamas taip:

$$\boxed{R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}\,.} \tag{25}$$

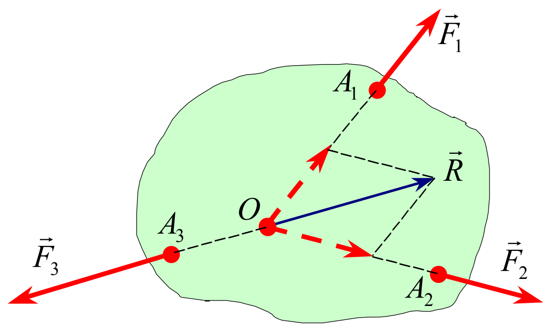
Atstojamosios jėgos $\vec{R}$ kryptis nusakoma kampu α :

$$\tan\alpha = \frac{R_y}{R_x} \qquad \text{arba} \qquad \cos\alpha = \frac{R_x}{R}\,, \;\; \sin\alpha = \frac{R_y}{R}\,. \tag{26}$$

1.3.2. TRIJŲ JĖGŲ TEOREMA

Teorema: trijų nelygiagrečių, esančių vienoje plokštumoje, jėgų veikimo linijos susikerta viename taške, jėgų sistemai esant pusiausvirai.

Sakykime, kietąjį kūną veikia trys nelygiagrečios tarpusavyje atsisveriančios jėgos $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, pridėtos atitinkamai taškuose A_1, A_2, A_3 (21 pav.).



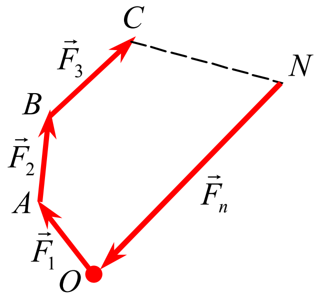
21 pav. Trijų jėgų teorema

Jėgos $\vec{F}_1$ ir $\vec{F}_2$ veikia vienoje plokštumoje, todėl galima jas perkelti į šių dviejų jėgų veikimo linijų susikirtimo tašką O ir rasti jų atstojamąją jėgą $\vec{R}$, kuri bus pridėta tame pačiame taške.

Pagal sąlygą jėgos $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ ir $\vec{F}_3$ yra pusiausviros, todėl jėgos $\vec{F}_3$ ir $\vec{R}$ turi būti lygių didumų ir veikti viena tiese priešingomis kryptimis. Tai reiškia, kad jėgos $\vec{F}_3$ veikimo tiesė taip pat kerta tašką O.

1.3.3. SUSIKERTANČIŲ JĖGŲ SISTEMOS PUSIAUSVYROS SĄLYGOS

Susikertančių jėgų sistemos grafinė pusiausvyros sąlyga



22 pav. Grafinė pusiausvyros sąlyga

Sakykime, kad kūnas yra veikiamas susikertančių jėgų sistemos, sudarytos iš n jėgų. Visas jėgas sudedame pagal jėgų daugiakampio taisyklę (22 pav.). Jeigu gautojo jėgų daugiakampio $OABC\ldots N$ paskutiniosios jėgos $\vec{F}_n$ galas remiasi į tašką O, t. y. pirmosios jėgos pridėties tašką, tai toks jėgų daugiakampis yra uždaras, o jo uždaromoji yra lygi nuliui.

Kadangi jėgų daugiakampio uždaromoji pagal dydį ir kryptį yra lygi susikertančių jėgų sistemos atstojamajai jėgai $\vec{R}$, tai reiškia, kad:

$$\boxed{\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0.} \tag{27}$$

Taigi susikertančių jėgų sistemos atstojamoji yra lygi nuliui arba, kitaip tariant, jėgų sistema yra ekvivalentinė nuliui ir tokios sistemos veikiamas kūnas niekada nepakeis savo kinematinės būklės. Iš čia gaunama grafinė pusiausvyros sąlyga: veikiamas susikertančių jėgų sistemos kietasis kūnas yra pusiausviras, jei šių jėgų daugiakampis yra uždaras.

Susikertančių jėgų sistemos analizinės pusiausvyros sąlygos

Jėgų sistemai esant pusiausvirai, jėgų daugiakampis yra uždaras, vadinasi, jėgų sistemos atstojamoji jėga $\vec{R}$ yra lygi nuliui. Analiziškai jėgų sistemos atstojamosios modulis išreiškiamas taip:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}\,, \tag{28}$$

kur R_x ir R_y – jėgų atstojamosios $\vec{R}$ projekcijos į x ir y koordinačių ašis.

Jėgų atstojamoji $\vec{R}$ bus lygi nuliui, kai $\sqrt{R_x^2 + R_y^2}$ bus lygus nuliui, todėl abi projekcijos R_x ir R_y turi būti lygios nuliui:

$$R_x = 0 \text{ ir } R_y = 0\,. \tag{29}$$

Žinant, kad $R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}$ ir $R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}$, plokščiosios, viename taške susikertančių jėgų sistemos pusiausvyros sąlygas galima užrašyti taip:

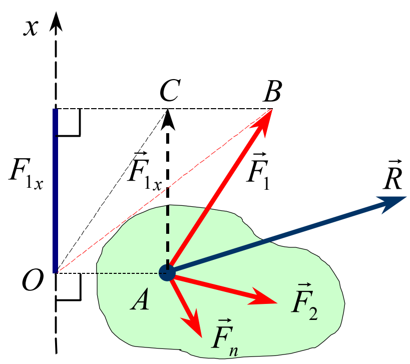
$$\boxed{\begin{cases} R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \\ R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0. \end{cases}} \tag{30}$$

Išvada: plokščioji viename taške susikertančių jėgų sistema yra pusiausvira, jei jėgų projekcijų algebrinės sumos į dvi viena kitai statmenas ašis yra lygios nuliui.

1.3.4. VARINJONO TEOREMA

Teorema: plokščiosios susikertančių jėgų sistemos atstojamosios jėgos momentas bet kurio plokštumos taško atžvilgiu lygus sudedamųjų jėgų momentų to paties taško atžvilgiu algebrinei sumai.

Įrodymas. Plokščioji jėgų sistema ($\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, …, $\vec{F}_n$) yra pridėta kūno taške *A* (23 pav.). Šios jėgų sistemos atstojamoji jėga $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ taip pat pridėta taške *A*. Reikia rasti visų jėgų momentus laisvai pasirinkto taško *O* atžvilgiu.



23 pav. Jėgų $\vec{F}_1$ ir $\vec{F}_{1x}$ momentai taško *O* atžvilgiu

Priminsime, kad jėgos momentas apie tašką yra lygus trikampio, kurio pagrindas yra pati jėga, o viršūnė – taškas, apie kurį skaičiuojamas momentas, dvigubam plotui (žr. 1.2 skyrių).

Per tašką *O* (23 pav.) jėgų veikimo plokštumoje nubrėšime ašį *x*, statmeną atkarpai *OA*, ir rasime jėgos $\vec{F}_1$ dedamąją jėgą pagal šią ašį $\vec{F}_{1x}$. Iš 23 pav. matyti, kad trikampių *OAB* ir *OAC* plotai yra lygūs, nes jie turi bendrą pagrindą *OA* ir vienodas aukštines – *AC*. Todėl jėgos $\vec{F}_1$ momentą taško *O* atžvilgiu galima išreikšti taip:

$$M_O\left(\vec{F}_1\right) = M_O\left(\vec{F}_{1x}\right) = OA \cdot F_{1x}, \tag{31}$$

čia F_{1x} – jėgos $\vec{F}_1$ projekcija į ašį *x*.

Analogiškai galima užrašyti, kad:

$$M_O\left(\vec{F}_2\right) = OA \cdot F_{2x}, \tag{32}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$M_O\left(\vec{F}_n\right) = OA \cdot F_{nx},$$

ir

$$M_O\left(\vec{R}\right) = OA \cdot R_x .$$

Pagal atstojamosios projekcijos teoremą:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} . \tag{33}$$

Padauginę abi lygybės (33) puses iš atkarpos *OA* gauname:

$$OA \cdot R_x = OA \cdot \sum_{i=1}^{n} F_{ix}, \tag{34}$$

ir

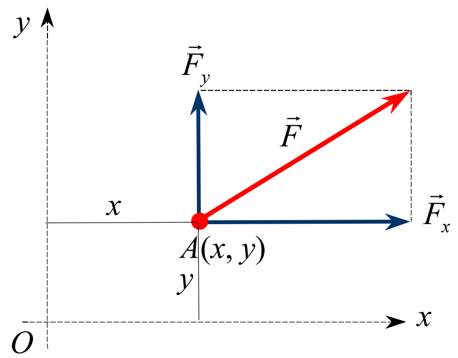
$$M_O\left(\vec{R}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(F_{ix} \cdot OA\right). \tag{35}$$

Tačiau, bet kurios jėgos projekcija, padauginta iš atkartos *OA* yra lygi tos jėgos momentui taško *O* atžvilgiu, todėl:

$$\boxed{M_O\left(\vec{R}\right) = \sum_{i=1}^{n} M_O\left(\vec{F}_i\right).} \tag{36}$$

Užrašytoji formulė yra Varinjono teoremos matematinė išraiška.

Sprendžiant uždavinius, reikia, kad jėgos momentas taško atžvilgiu būtų išreikštas jėgos projekcijomis arba dedamosiomis (24 pav.).



24 pav. Jėgos $\vec{F}$ dedamųjų jėgų $\vec{F}_x$ ir $\vec{F}_y$ momentai taško *O* atžvilgiu

Jėgos $\vec{F}$ dedamosios $\vec{F}_x$ ir $\vec{F}_y$ pridėtos kūno taške *A*, kurio koordinatės yra *x* ir *y* (24 pav.). Taikant Varinjono teoremą, galima užrašyti:

$$M_O(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_x) + M_O(\vec{F}_y), \tag{37}$$

kur

$$M_O(\vec{F}_x) = -y \cdot F_x, \tag{38}$$

$$M_O(\vec{F}_y) = x \cdot F_y, \tag{39}$$

todėl

$$M_O(\vec{F}) = x \cdot F_y - y \cdot F_x, \tag{40}$$

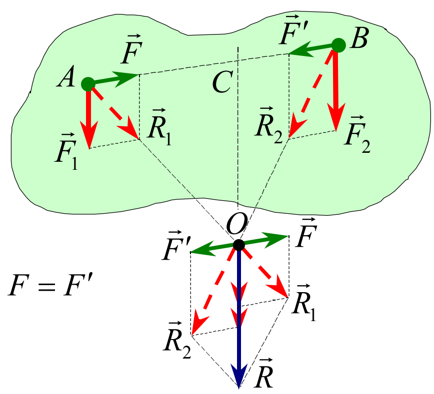
kur *x* ir *y* – taško *A* koordinatės.

1.4. PLOKŠČIOJI LYGIAGREČIŲJŲ JĖGŲ SISTEMA

Lygiagrečiąsias jėgas galima vertinti kaip atskirą susikertančių jėgų atvejį, kai tų jėgų susikirtimo taškas yra begalybėje.

1.4.1. LYGIAGREČIAI VEIKIANČIŲ JĖGŲ SUDĖTIS

Sakykime, kad dvi lygiagrečios jėgos $\vec{F}_1$ ir $\vec{F}_2$ veikia kūną taškuose *A* ir *B* ir yra nukreiptos viena linkme (25 pav.).



25 pav. Lygiagrečiai veikiančių jėgų sudėties schema

Šių dviejų jėgų atstojamoji jėga $\vec{R}$ nustatoma taip:

a) Taškuose *A* ir *B* pridedamos dvi lygios, bet priešingai nukreiptos jėgos $\vec{F}$ ir $\vec{F}'$, todėl gautoji keturių jėgų sistema ($\vec{F}_1, \vec{F}_2$, $\vec{F}$; $\vec{F}'$) yra ekvivalentiška jėgų sistemai ($\vec{F}_1, \vec{F}_2$).

b) Sudėjus jėgas $\vec{F}_1$ su $\vec{F}$ ir $\vec{F}_2$ su $\vec{F}'$ gaunamos dvi nelygiagrečios jėgos $\vec{R}_1$ ir $\vec{R}_2$. Šios jėgos perkeliamos į jų veikimo tiesių susikirtimo tašką *O* ir sudedamos. Jėgų $\vec{R}_1$ ir $\vec{R}_2$ atstojamoji jėga $\vec{R}$ bus nukreipta ta pačia linkme kaip ir sudedamosios jėgos $\vec{F}_1$ ir $\vec{F}_2$ ir lygi:

$$\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 ,$$

$$\boxed{R = F_1 + F_2 .} \tag{41}$$

Pagal trikampių panašumą galima užrašyti:

$$\frac{AC}{CO} = \frac{F}{F_1} \quad \text{ir} \quad \frac{BC}{CO} = \frac{F'}{F_2} . \tag{42}$$

Pertvarkę gauname:

$$\boxed{\frac{AC}{F_2} = \frac{BC}{F_1} = \frac{AC + BC}{F_1 + F_2} = \frac{AB}{R} ,} \tag{43}$$

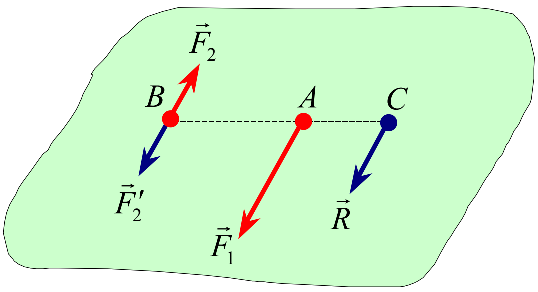
todėl

$$F_1 \cdot AC = F_2 \cdot BC . \tag{44}$$

Išvada: Dviejų lygiagrečių, nukreiptų viena linkme, jėgų atstojamoji yra lygiagreti su šiomis jėgomis ir yra nukreipta ta pačia linkme. Atstojamosios modulis lygus šių jėgų modulių sumai, o jos veikimo tiesė dalija atstumą tarp jėgų į dvi dalis atvirkščiai proporcingai šių jėgų dydžiams (moduliams). Be to, atstojamosios jėgos $\vec{R}$ veikimo tiesės bet kurio taško atžvilgiu dedamųjų jėgų $\vec{F}_1$ ir $\vec{F}_2$ momentai yra lygūs.

Dviejų lygiagrečių priešingai nukreiptų jėgų sudėtis

Kūno taškuose *A* ir *B* pridėtos dvi lygiagrečiosios priešingų krypčių jėgos $\vec{F}_1$ ir $\vec{F}_2$, be to, $\vec{F}_1 > \vec{F}_2$ (26 pav.).



26 pav. Lygiagrečių, priešingai nukreiptų jėgų, sudėtis

Kad rastume šių jėgų atstojamąją, jėga $\vec{F}_1$ yra išskaidoma į dvi jai lygiagrečias ir nukreiptas ta pačia linkme sudaromąsias: $\vec{F}_2'$ $\left(F_2' = F_2\right)$ ir $\vec{R}$. Jėga $\vec{F}_2'$ pridedama taške *B*, o sudaromosios $\vec{R}$ didumas nustatomas taikant lygiagrečių jėgų sudėties taisyklę:

$$F_1 = F_2' + R ,$$

todėl

$$R = F_1 - F_2',$$

kur $F_2' = F_2$, todėl

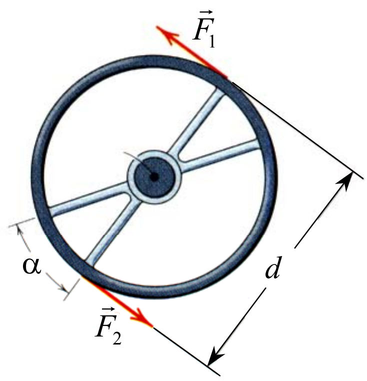
$$\boxed{R = F_1 - F_2\,.} \tag{45}$$

Dedamosios $\vec{R}$ pridėties taškas C nustatomas iš santykio:

$$\frac{AC}{F_2'} = \frac{AC}{F_2} = \frac{AB}{R} = \frac{AC + AB}{F_2 + R} = \frac{BC}{F_1}\,. \tag{46}$$

1.4.2. JĖGŲ POROS

Kai lygiagrečios priešingai nukreiptos jėgos $\vec{F}_1$ ir $\vec{F}_2$ (26–27 pav.) yra lygios, t. y. $F_1 = F_2$, turime dviejų jėgų sistemą $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2\right)$, kuri yra vadinama jėgų pora.



27 pav. Jėgų pora

Kadangi $F_1 = F_2$, tai jų atstojamoji lygi nuliui:

$$R = F_1 - F_2 = 0\,. \tag{47}$$

Atstumas iki atstojamosios pridėties taško C apskaičiuojamas iš anksčiau pateikto (46) santykio:

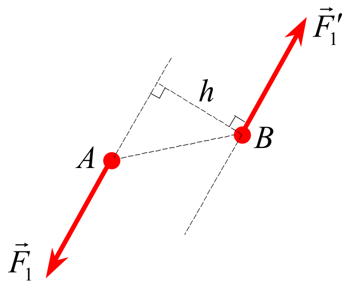
$$AC = F_2\frac{AB}{R} = F_2\frac{AB}{0} = \infty; \qquad BC = F_1\frac{AB}{R} = F_1\frac{AB}{0} = \infty\,. \tag{48}$$

Išvados:

a) jėgų poros atstojamoji $\vec{R}$ lygi nuliui, o jos pridėties taškas yra begalybėje;

b) jėgos, sudarančios jėgų porą, nėra pusiausviros, nes jos veikia ne viena tiese;

c) jėgų pora yra tokia jėgų sistema, kuri nėra pusiausvira ir neturi atstojamosios.



28 pav. Jėgų pora

Jėgų porą (28 pav.) žymime $(\vec{F}_1;\vec{F}_1')$, čia $F_1 = F_1'$.

Pagrindinės sąvokos:

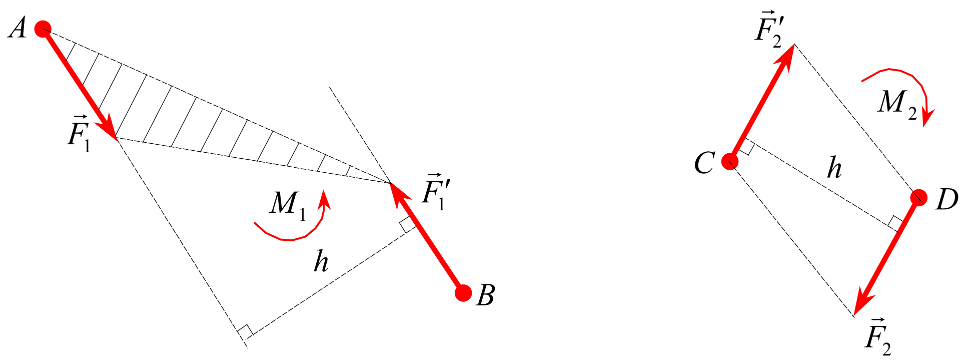
- plokštuma, einanti per jėgų poros veikimo tieses, vadinama jėgų poros veikimo plokštuma;
- atstumas *h* tarp jėgų poros jėgų veikimo tiesių vadinamas jėgų poros petimi;
- negalima sutapatinti jėgų poros peties su atstumu tarp jėgų poros jėgų pridėties taškų *AB*.

Jėgų poros sukamasis poveikis kitam kūnui priklauso nuo:

- jėgų porą sudarančių jėgų modulio ir peties ilgio *h*;
- jėgų poros veikimo plokštumos padėties erdvėje;
- poros sukimo krypties šitoje plokštumoje.

Jėgų poros momentu vadinama vienos iš sudarančių jėgų porą jėgos modulio ir poros peties sandauga. Pagal susitarimą jėgų poros momentas laikomas teigiamu, kai jėgų pora pasuka kūną prieš laikrodžio rodyklės kryptį, ir neigiamu, kai kūnas pasukamas pagal laikrodžio rodyklę.

Jėgų poros momentas (29 pav.) yra žymimas $M(\vec{F}_i,\vec{F}_i')$ arba tiesiog M_i, kur *i* – jėgų porą sudarančių jėgų indeksas.



$M_1 = M(\vec{F}_1,\vec{F}_1') = F_1 \cdot h = F_1' \cdot h$

a) teigiama jėgų poros kryptis

$M_2 = M(\vec{F}_2,\vec{F}_2') = -F_2 \cdot h = -F_2' \cdot h$

b) neigiama jėgų poros kryptis

29 pav. Jėgų poros momento kryptys

Jėgų poros momentas yra lygus vienos iš sudarančių jėgų porą jėgos momentui apie tašką, kuriame pridėta antroji tos jėgų poros jėga:

$$\boxed{M_1 = M\left(\vec{F}_1, \vec{F}_1'\right) = M_B\left(\vec{F}_1\right) = M_A\left(\vec{F}_1'\right),} \quad \text{(žr. 29a pav.);} \tag{49}$$

$$\boxed{M_2 = M\left(\vec{F}_2, \vec{F}_2'\right) = M_C\left(\vec{F}_2\right) = M_D\left(\vec{F}_2'\right),} \quad \text{(žr. 29b pav.).} \tag{50}$$

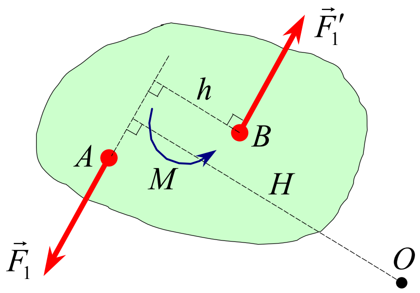
Skaitinė jėgų poros reikšmė yra lygi lygiagretainio plotui (29b pav.), kurį sudaro poros jėgos, arba dvigubam trikampio plotui (29a pav.), kurio pagrindas yra viena iš jėgų, o aukštinė – jėgų poros petys.

Jėgų poros momento M dimensija: $[N \cdot m]$.

Jėgų poros savybės

1. Jėgų poros jėgų momentų suma bet kurio taško, esančio poros veikimo plokštumoje, atžvilgiu nepriklauso nuo jo parinkimo vietos ir yra lygi jėgų poros momentui.

Sakykime, kad absoliučiai kietąjį kūną veikia jėgų pora $\left(\vec{F}_1; \vec{F}_1'\right)$ (30 pav.). Apskaičiuosime jėgų poros jėgų momentų sumą jėgų poros veikimo plokštumoje laisvai parinkto taško O atžvilgiu:



30 pav. Jėgų poros momentas taško O atžvilgiu

$$M_O\left(\vec{F}_1\right) + M_O\left(\vec{F}_1'\right) = F_1 \cdot H - F_1' \cdot (H - h) = F_1 \cdot (H - H + h) = F_1 \cdot h, \tag{51}$$

nes jėgų poros jėgos yra lygios $F_1 = F_1'$.

Kita vertus, jėgų poros momentas M lygus:

$$M = M\left(\vec{F}_1, \vec{F}_1'\right) = F_1 \cdot h, \tag{52}$$

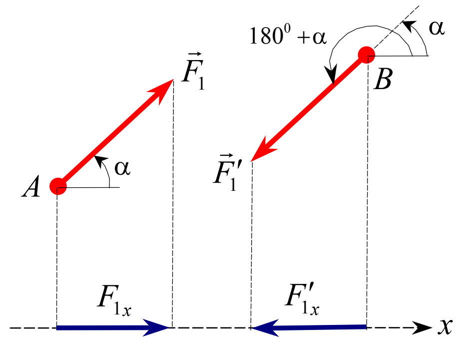
todėl

$$\boxed{M\left(\vec{F}_1, \vec{F}_1'\right) = M_O\left(\vec{F}_1\right) + M_O\left(\vec{F}_1'\right),} \tag{53}$$

t. y. jėgų poros momentas bet kurio taško, esančio poros veikimo plokštumoje, atžvilgiu yra lygus jėgų poros jėgų momentų apie tą patį tašką algebrinei sumai.

Išvada: kadangi taškas O buvo pasirinktas laisvai, tai jėgų porą galima perkelti į bet kurią kitą vietą jos veikimo plokštumoje ir nuo to kūno būvis nepasikeis.

2. Jėgų poros jėgų projekcijų į bet kurią ašį suma yra lygi nuliui.



31 pav. Jėgų poros jėgų projekcijos į ašį

Jėgų poros jėgų projekcijų (31 pav.) didumai:

$$F_{1x}=F_1\cos\alpha\,,\qquad\qquad F_{1x}'=F_1'\cos\left(180^0+\alpha\right). \tag{54}$$

Jėgų poros jėgų projekcijų suma:

$$F_{1x}+F_{1x}'=F_1\cos\alpha+F_1'\cos\left(180^0+\alpha\right). \tag{55}$$

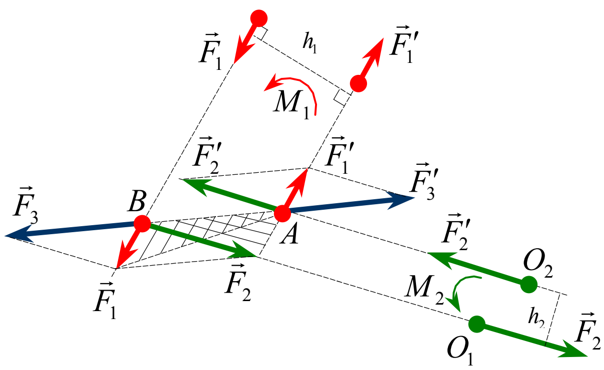
Kadangi $F_1=F_1'$, tai

$$F_{1x}+F_{1x}'=F_1\cos\alpha+F_1'\cos\left(180^0+\alpha\right)=F_1\cos\alpha-F_1'\cos\alpha=0\,. \tag{56}$$

Išvada: kadangi jėgų poros jėgų projekcijų į bet kurią ašį suma yra lygi nuliui, tai jėgų poros poveikis kūnui yra įvertinamas tik pagal momentų pusiausvyros lygtis.

3. *Jėgų porų ekvivalentiškumo teorema*. Jėgų poros poveikis kūnui nepasikeis, jeigu ši jėgų pora bus pakeista kita jėgų pora, veikiančia toje pat plokštumoje ir turinčia tokio pat didumo ir ženklo momentą.

Įrodymas: Kietąjį kūną veikia jėgų pora $\left(\vec{F}_1;\vec{F}_1'\right)$, kurios momentas yra lygus M_1 (32 pav.).



32 pav. Ekvivalentiškos jėgų poros

Per laisvai parinktus kūno taškus O_1 ir O_2, esančius toje pačioje plokštumoje kaip ir jėgų pora $\left(\vec{F}_1;\vec{F}_1'\right)$, išvedamos dvi lygiagrečios tiesės. Atstumas h_2 tarp šių tiesių taip pat parenkamas laisvai. Jėgos $\vec{F}_1$ ir $\vec{F}_1'$ perkeliamos jų veikimo linkme į šių tiesių susikirtimo taškus A ir B. Kiekviena jėga yra išskaidoma į dvi jėgas: jėga $\vec{F}_1$ tiesėmis BO_1 ir AB išskaidoma į $\vec{F}_2$ ir $\vec{F}_3$, o jėga $\vec{F}_1'$ – atitinkamai į $\vec{F}_2'$ ir $\vec{F}_3'$.

Kadangi $F_1 = F_1'$, tai ir gauti komponentai yra lygūs:

$$F_2 = F_2', \quad F_3 = F_3'.$$

Jėgos $\vec{F}_3$ ir $\vec{F}_3'$ sudaro atsisveriančių jėgų sistemą, todėl jas pašalinus, kūno būklė nepasikeis. Jėgas $\vec{F}_2$ ir $\vec{F}_2'$ perkėlus į taškus O_1 ir O_2, gaunama nauja jėgų pora $\left(\vec{F}_2;\vec{F}_2'\right)$, kuri yra ekvivalentiška jėgų porai $\left(\vec{F}_1;\vec{F}_1'\right)$.

Jėgų poros $\left(\vec{F}_1;\vec{F}_1'\right)$ momento didumas lygus trikampio ABF_1 dvigubam plotui:

$$M\left(\vec{F}_1,\vec{F}_1'\right) = 2 \cdot A_{\Delta ABF_1}; \tag{57.1}$$

$$M\left(\vec{F}_2,\vec{F}_2'\right) = 2 \cdot A_{\Delta ABF_2}, \tag{57.2}$$

kur $A_{\Delta ABF_2}$ – trikampio ABF_2 plotas.

Trikampiai ABF_1 ir ABF_2 yra lygūs, nes turi bendrą pagrindą AB ir lygias aukštines ($\overrightarrow{AB} \,//\, \overrightarrow{F_1F_2}$). Todėl ir jėgų porų momentai yra lygūs:

$$M\left(\vec{F}_1,\vec{F}_1'\right) = M\left(\vec{F}_2,\vec{F}_2'\right), \tag{58}$$

$$\boxed{M_1 = M_2.}$$

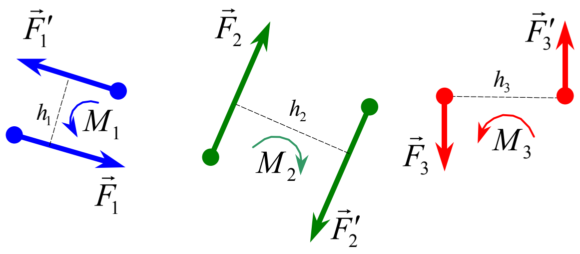
Išvados:

1. Vienu metu pakeitus jėgų poros jėgų didumus ir petį taip, kad jėgų poros momentas ir jos sukimo kryptis nepakistų, jėgų poros poveikis kietajam kūnui nepakis;
2. Jei $h_1 = h_2$, matyti, jog poros poveikis kūnui nekinta, kai jėgų pora perkeliama į kitą vietą toje pačioje plokštumoje;
3. Dvi jėgų poros, veikiančios vienoje plokštumoje ir turinčios vienodo didumo ir ženklo momentus, yra ekvivalentiškos;
4. Ekvivalentiškos jėgų poros gali skirtis viena nuo kitos pagal padėtį plokštumoje, sudarančių jėgų modulius ir šių jėgų kryptis bei peties ilgius, tačiau jėgų porų momentų didumai ir ženklai turi būti vienodi.

1.4.3. JĖGŲ PORŲ SUDĖTIS IR PUSIAUSVYROS SĄLYGA

Kai vienoje plokštumoje veikia kelios jėgų poros, jos sudaro jėgų porų sistemą. Bet kuri jėgų porų sistema gali būti pakeista viena atstojamąja jėgų pora, kurios momentas lygus sistemą sudarančių jėgų porų momentų algebrinei sumai.

Pavyzdžiui, vienoje plokštumoje veikia trys jėgų poros (33 pav.): $\left(\vec{F}_1;\vec{F}_1'\right)$, $\left(\vec{F}_2;\vec{F}_2'\right)$ ir $\left(\vec{F}_3;\vec{F}_3'\right)$.



33 pav. Jėgų porų sistema

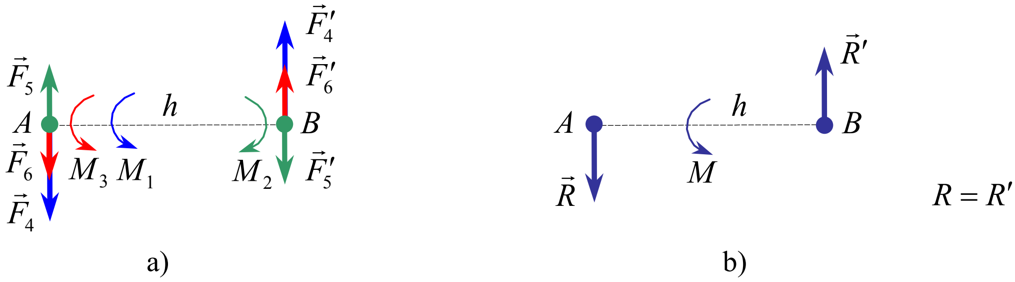
Jėgų porų momentai:

$$M\left(\vec{F}_1,\vec{F}_1'\right)=F_1\cdot h_1=M_1;\qquad M\left(\vec{F}_2,\vec{F}_2'\right)=-F_2\cdot h_2=M_2;\quad M\left(\vec{F}_3,\vec{F}_3'\right)=F_3\cdot h_3=M_3. \tag{59}$$

Taikome jėgų porų ekvivalentiškumo teoremą ir visas jėgų poras pakeičiame naujomis jėgų poromis, turinčiomis vienodą petį h, taip, kad jėgų porų momentai liktų nepakitę:

$$\begin{aligned}&M\left(\vec{F}_1,\vec{F}_1'\right)\Rightarrow M\left(\vec{F}_4,\vec{F}_4'\right)=F_4\cdot h=M_1;\\&M\left(\vec{F}_2,\vec{F}_2'\right)\Rightarrow M\left(\vec{F}_5,\vec{F}_5'\right)=-F_5\cdot h=M_2;\\&M\left(\vec{F}_3,\vec{F}_3'\right)\Rightarrow M\left(\vec{F}_6,\vec{F}_6'\right)=F_6\cdot h=M_3.\end{aligned} \tag{60}$$

Perkeliame jėgų porų jėgas į taškus A ir B (34a pav.).



34 pav. Jėgų porų sudėtis

Sudėjus jėgų porų jėgas gaunama atstojamoji jėgų pora $(\vec{R};\vec{R}')$ (34 a,b pav.):

$$\vec{R} = \vec{F}_4 + \vec{F}_5 + \vec{F}_6 = \sum_{i=4}^{6} \vec{F}_i\,; \qquad \vec{R}' = \vec{F}_4' + \vec{F}_5' + \vec{F}_6' = \sum_{i=4}^{6} \vec{F}_i'\,;$$
$$R = F_4 - F_5 + F_6 = \sum_{i=4}^{6} F_i\,; \qquad R' = F_4' - F_5' + F_6' = \sum_{i=4}^{6} F_i'\,. \tag{61}$$

Atstojamosios jėgų poros momentas $M(\vec{R},\vec{R}')$ skaičiuojamas taip:

$$\begin{aligned} M(\vec{R},\vec{R}') &= R \cdot h = \\ &= (F_4 - F_5 + F_6)\cdot h = \\ &= F_4 \cdot h - F_5 \cdot h + F_6 \cdot h = \\ &= M(\vec{F}_4,\vec{F}_4') + M(\vec{F}_5,\vec{F}_5') + M(\vec{F}_6,\vec{F}_6') = \sum_{i=4}^{6} M(\vec{F}_i,\vec{F}_i'), \end{aligned} \tag{62}$$

todėl galima užrašyti: $\qquad M = M_1 + M_2 + M_3 = \sum_{i=1}^{3} M_i\,.$

Kai jėgų porų skaičius yra n, atitinkamai turime:

$$\boxed{M = \sum_{i=1}^{n} M_i\,.} \tag{63}$$

Remiantis jėgų porų sudėties principu galima suformuluoti jėgų porų sistemos pusiausvyros sąlygą.

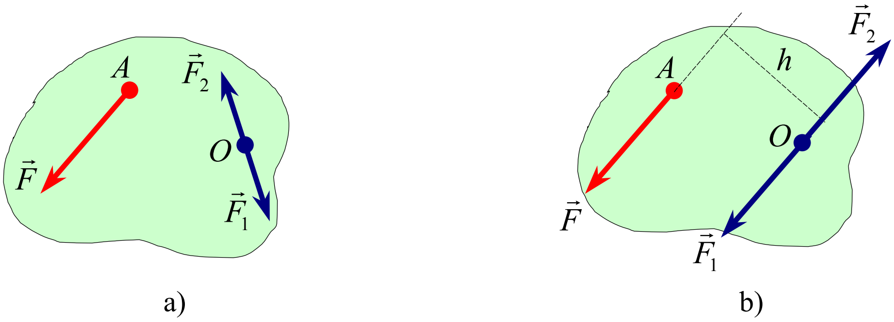
Vienoje plokštumoje veikiančių jėgų porų sistema bus pusiausvira, kai visų jėgų porų momentų algebrinė suma bus lygi nuliui.

$$\boxed{M = \sum_{i=1}^{n} M_i = 0\,.} \tag{64}$$

1.4.4. LYGIAGRETUSIS JĖGOS PERKĖLIMAS

Puanso teorema: norint perkelti jėgą lygiagrečiai į bet kurį kitą tašką, reikia papildomai pridėti jėgų porą, kurios momentas lygus perkeliamosios jėgos momentui taško, į kurį ši jėga yra perkeliama, atžvilgiu.

Įrodymas: Jėga $\vec{F}$ yra pridėta kūno taške A (35a pav.). Jeigu laisvai pasirinktame taške O pridėsime atsisveriančių jėgų sistemą $(\vec{F}_1,\vec{F}_2)$, tai kūno būvis nuo to nepasikeis.

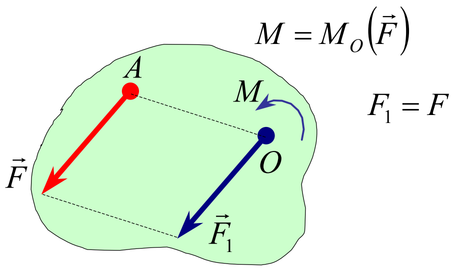


35 pav. Lygiagretusis jėgos perkėlimas

Jeigu taške O bus pridėta atsisveriančių jėgų sistema $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$, kurios jėgos bus nukreiptos lygiagrečiai su jėga $\vec{F}$ (35b pav.), ir jų didumas bus toks pat kaip jėgos $\vec{F}$, tai jėgos $\vec{F}$ ir $\vec{F}_2$ sudarys jėgų porą $(\vec{F}; \vec{F}_2)$, kurios momentas bus lygus M:

$$M = F_2 \cdot h = F \cdot h = M_O(\vec{F}). \tag{65}$$

Taigi gauname, kad taške O bus pridėta jėga $\vec{F}_1$, kurios didumas ir kryptis sutampa su jėgos $\vec{F}$ didumu ir kryptimi, ir jėgų pora, kurios momentas M yra lygus jėgos $\vec{F}$ momentui taško O atžvilgiu (36 pav.).



36 pav. Jėgos $\vec{F}$ redukavimas į centrą O

Jėgos $\vec{F}$ lygiagretus perkėlimas iš taško A į laisvai pasirinktą tašką O, pridedant papildomą jėgų porą $(\vec{F}; \vec{F}_2)$, kurios momentas $M = M_O(\vec{F})$ yra vadinamas jėgos $\vec{F}$ redukavimu į centrą O.

1.5. PLOKŠČIOJI BET KAIP IŠDĖSTYTŲ JĖGŲ SISTEMA

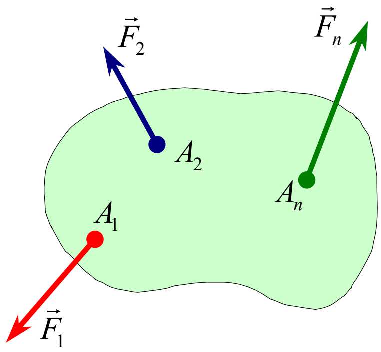
Jeigu jėgų sistemos jėgos veikia vienoje plokštumoje, bet nėra viena su kita lygiagrečios ir nesusikerta viename taške, tai tokia jėgų sistema yra vadinama plokščiąja bet kaip išdėstytų jėgų sistema.

Plokščiosioms bet kaip išdėstytų jėgų sistemoms, sudarytoms iš didelio jėgų skaičiaus, supaprastinti taikomi toliau pateikti redukavimo (pertvarkymo) būdai.

1.5.1. PLOKŠČIOSIOS JĖGŲ SISTEMOS REDUKAVIMO BŪDAI

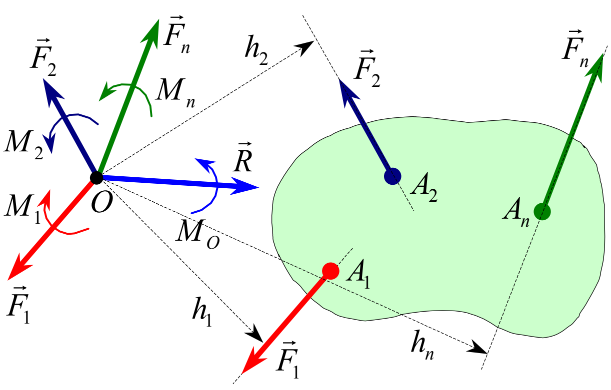
Plokščiosios jėgų sistemos redukavimas į tam tikrą centrą

Sakykime, jog kietąjį kūną veikia plokščioji bet kaip išdėstytų jėgų sistema $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right)$ (37 pav.):



37 pav. Plokščioji bet kaip išdėstytų jėgų sistema

Jėgų veikimo plokštumoje (38 pav.) laisvai parenkamas taškas O – redukavimo centras ir visos jėgos perkeliamos lygiagrečiai į šį tašką. Perkeliant jėgas, kiekvienai iš jų reikia pridėti papildomą jėgų porą, kurios momentas bus lygus perkeliamos jėgos momentui taško O atžvilgiu.



38 pav. Plokščiosios bet kaip išdėstytų jėgų sistemos redukavimas į centrą O

Papildomų jėgų porų momentai lygūs sudedamų jėgų momentams redukavimo centro atžvilgiu:

$$M_1 = M_O\left(\vec{F}_1\right) = -F_1 \cdot h_1\,; \qquad M_2 = M_O\left(\vec{F}_2\right) = F_2 \cdot h_2\,; \qquad M_n = M_O\left(\vec{F}_n\right) = F_n \cdot h_n\,. \tag{66}$$

Perkeltas į tašką O jėgas $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ galima sudėti kaip jėgas, susikertančias viename taške. Jų atstojamoji $\vec{R}$ bus lygi sudedamų jėgų geometrinei sumai:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\,, \tag{67}$$

čia $\vec{R}$ – plokščiosios jėgų sistemos svarbiausias vektorius.

Visas papildomas jėgų poras galima sudėti pagal vienoje plokštumoje veikiančių jėgų porų sudėties taisyklę, t. y. pakeisti jas viena jėgų pora. Atstojamosios jėgų poros momentas M_O bus lygus sudedamųjų jėgų porų momentų algebrinei sumai:

$$M_O = \sum_{i=1}^{n} M_O\left(\vec{F}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} M_i\,, \tag{68}$$

čia M_O – plokščiosios jėgų sistemos svarbiausias momentas redukavimo centro O atžvilgiu.

Teorema: veikiančią kūną plokščiąją bet kaip išdėstytų jėgų sistemą galima pakeisti viena, pridėta laisvai pasirinktame redukavimo centre O, jėga, lygia sistemos svarbiausiam vektoriui $\vec{R}$, ir viena jėgų pora, kurios momentas lygus sistemos svarbiausiam momentui M_O redukavimo centro O atžvilgiu.

Pastabos:

- svarbiausio vektoriaus $\vec{R}$ didumas ir kryptis nepriklauso nuo redukavimo centro parinkimo;
- pakeitus redukavimo centro padėtį, svarbiausiojo momento didumas ir ženklas keisis, nes keisis sudarančių jėgų momentai ir jų ženklai.

Plokščiosios jėgų sistemos redukavimas į jėgų porą

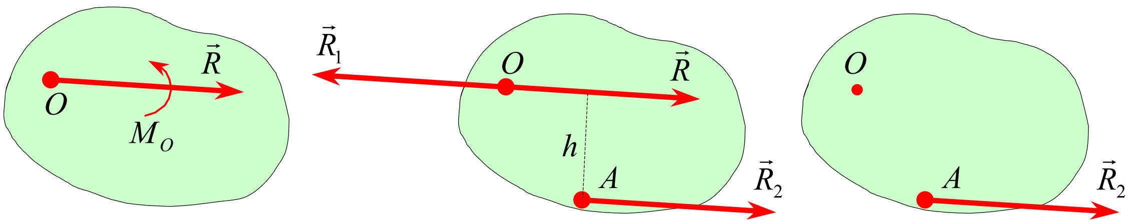
Jeigu redukavus plokščiąją jėgų sistemą (38 pav.) į tam tikrą centrą O paaiškės, kad svarbiausias vektorius $\vec{R}$ yra lygus nuliui ($\vec{R} = 0$), o svarbiausias momentas M_O nelygus nuliui ($M_O \neq 0$), tai ši jėgų sistema yra redukuojama tik į vieną jėgų porą, kurios momentas lygus sudedamųjų jėgų porų momentų algebrinei sumai:

$$M_O = \sum_{i=1}^{n} M_O\left(\vec{F}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} M_i\,. \tag{69}$$

Šiuo atveju svarbiausiojo momento M_O didumas ir ženklas nepriklauso nuo redukavimo centro padėties.

Plokščiosios jėgų sistemos redukavimas į atstojamąją

Sakykime, kad plokščioji bet kaip išdėstytų jėgų sistema yra redukuota (39a pav.) į sistemos svarbiausiąjį vektorių $\vec{R} \neq 0$, pridėtą taške *O*, ir jėgų porą, kurios momentas $M_O \neq 0$. Tokia jėgų sistema savo ruožtu gali būti redukuota į atstojamąją jėgą, kurios veikimo tiesė eis per tašką A.



a) b) c)

39 pav. Jėgų sistemos redukavimas į atstojamąją jėgą

Jėgų pora, kurios momentas yra M_O, pakeičiama taip, kad jėgos $\vec{R}_1$ ir $\vec{R}_2$, sudarančios šią porą (39b pav.), būtų lygios vektoriaus $\vec{R}$ moduliui ir nukreiptos lygiagrečiai su juo:

$$R_1 = R_2 = R\,.$$

Poros petys *h* parenkamas taip, kad momentas išliktų nepakitęs:

$$M_O = R_1 \cdot h = R \cdot h\,, \tag{70}$$

todėl jėgos $\vec{R}_2$ veikimo tiesės padėtis randama taip:

$$h = \frac{M_O}{R}\,. \tag{71}$$

Matyti, kad jėgos $\vec{R}$ ir $\vec{R}_1$ sudaro atsisveriančių jėgų sistemą, todėl jas galima atmesti. Tokiu būdu nagrinėjama jėgų sistema yra pakeičiama viena jėga $\vec{R}_2$ – visos jėgų sistemos atstojamąja jėga. Taškas A yra ypatingas tuo, kad atstojamoji $\vec{R}_2$, pridėta šiame taške, turės momentą apie tašką *O*, lygų sistemos svarbiausiam momentui.

1.5.2. PLOKŠČIOSIOS BET KAIP IŠDĖSTYTŲ JĖGŲ SISTEMOS PUSIAUSVYROS SĄLYGOS

Pirmoji pusiausvyros sąlygų forma

Jeigu redukavus plokščiąją bet kaip išdėstytų jėgų sistemą į laisvai pasirinktą redukavimo centrą *O* (38 pav.) sistemos svarbiausias vektorius $\vec{R}$ ir svarbiausias momentas M_O yra lygūs nuliui, tai ir visa jėgų sistema yra ekvivalentiška nuliui:

$$\begin{cases} \vec{R} = 0, \\ M_O = 0. \end{cases} \quad \text{arba} \quad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} M_O\left(\vec{F}_i\right) = 0, \end{cases} \tag{72}$$

čia O – bet kuris plokštumos taškas.

Plokščioji bet kaip išdėstytų jėgų sistema bus pusiausvira, kai sistemos svarbiausias vektorius $\vec{R}$ ir svarbiausias momentas M_O bus lygūs nuliui. Kadangi

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{\left(\sum_{i-1}^{n} F_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i-1}^{n} F_{iy}\right)^2}, \tag{73}$$

ir

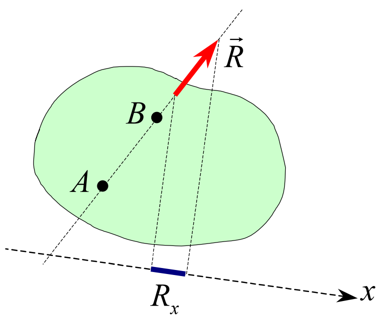
$$M_O = \sum_{i=1}^{n} M_O\left(\vec{F}_i\right), \tag{74}$$

gauname, kad plokščioji bet kaip išdėstytų jėgų sistema bus pusiausvira, kai visų jėgų projekcijų į bet kurias dvi laisvai pasirinktas ašis algebrinė suma bus lygi nuliui ir kai visų jėgų momentų laisvai pasirinkto taško atžvilgiu algebrinė suma bus lygi nuliui:

$$\boxed{\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} M_O\left(\vec{F}_i\right) = 0. \end{cases}} \tag{75}$$

Antroji pusiausvyros sąlygų forma

Plokščioji bet kaip išdėstytų jėgų sistema bus pusiausvira, kai visų jėgų momentų suma dviejų kurių nors taškų A ir B atžvilgiu (40 pav.) ir visų jėgų projekcijų į nestatmeną tiesei AB ašį x suma bus lygi nuliui.



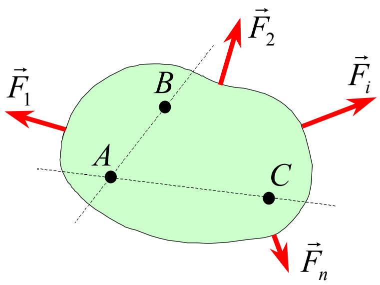
$$\boxed{\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} M_A\left(\vec{F}_i\right) = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} M_B\left(\vec{F}_i\right) = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} F_{ix} = R_x = 0. \end{cases}} \tag{76}$$

40 pav. Antroji pusiausvyros sąlygų forma

Paaiškinimas. Kai $\sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i) = 0$ ir $\sum_{i=1}^{n} M_B(\vec{F}_i) = 0$, tai jėgų sistemos atstojamosios jėgos $\vec{R}$ veikimo tiesė eina per taškus A ir B, todėl apie $\vec{R}$ didumą galima spręsti tik pagal projekciją į nestatmeną atkarpai AB ašį.

Trečioji pusiausvyros sąlygų forma

Plokščioji bet kaip išdėstytų jėgų sistema bus pusiausvira (41 pav.), kai visų sistemos jėgų momentų trijų laisvai pasirinktų ir nesančių vienoje tiesėje taškų A, B ir C atžvilgiu algebrinės sumos bus lygios nuliui.

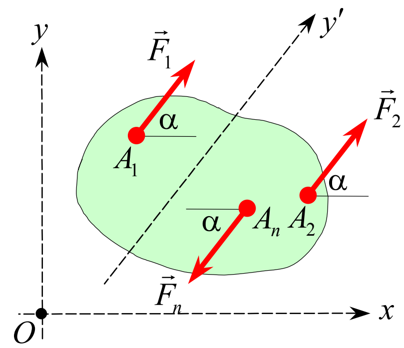


$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i) = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} M_B(\vec{F}_i) = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} M_C(\vec{F}_i) = 0. \end{cases} \tag{77}$$

41 pav. Trečioji pusiausvyros sąlygų forma

1.5.3. PLOKŠČIOSIOS LYGIAGREČIŲJŲ JĖGŲ SISTEMOS PUSIAUSVYROS SĄLYGOS

Jeigu vienoje plokštumoje veikiančių jėgų veikimo tiesės yra lygiagrečios, tai jėgų sistema vadinama plokščiąja lygiagrečiųjų jėgų sistema (42 pav.).



42 pav. Lygiagrečiųjų jėgų sistema

Taikome pirmąją plokščiosios bet kaip išdėstytų jėgų sistemos pusiausvyros sąlygų formą:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} M_O(\vec{F}_i) = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\alpha + \ldots - F_n \cos\alpha = 0, \\ F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\alpha + \ldots - F_n \sin\alpha = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} M_O(\vec{F}_i) = 0. \end{cases} \tag{78}$$

Pertvarkę gauname pirmąją pusiausvyros sąlygų formą, taikomą lygiagrečiųjų jėgų sistemai:

$$\begin{cases} F_1 + F_2 + \ldots - F_n = 0, \\ F_1 + F_2 + \ldots - F_n = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} M_O\left(\vec{F}_i\right) = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} F_1 + F_2 + \ldots - F_n = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} M_O\left(\vec{F}_i\right) = 0. \end{cases}$$

Matome, kad pakanka turėti jėgų projekcijų sumą į kurią nors vieną ašį. Atliekant skaičiavimus patogu nubrėžti šią ašį, pavyzdžiui y', (42 pav.) taip, kad ji būtu lygiagreti su jėgomis. Todėl gauname:

$$\boxed{\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} F_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} M_O\left(\vec{F}_i\right) = 0. \end{cases}} \tag{79}$$

Antroji pusiausvyros sąlygų forma lygiagrečiųjų jėgų sistemai (42 pav.) užrašoma taip:

$$\boxed{\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} M_{A_1}\left(\vec{F}_i\right) = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} M_{A_2}\left(\vec{F}_i\right) = 0, \end{cases}} \tag{80}$$

kur taškai A_1 ir A_2 parenkami taip, kad tiesė, nubrėžta per šiuos du taškus, nebūtų lygiagreti su jėgomis.

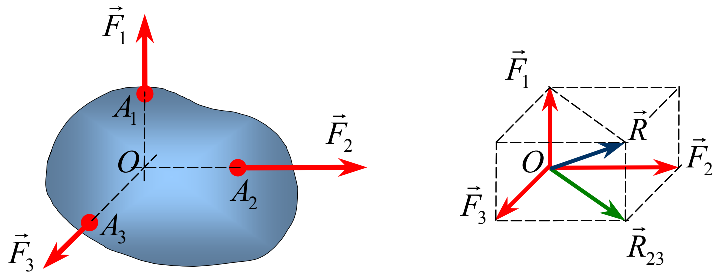
ERDVINĖ JĖGŲ SISTEMA

Erdvinę jėgų sistemą sudaro erdvėje išsidėsčiusios jėgos. Tokia jėgų sistema nagrinėjama laisvai pasirinktos erdvinės koordinačių sistemos atžvilgiu.

1.6. JĖGOS IR JĖGŲ POROS ERDVĖJE

Paprasčiausią erdvinę jėgų sistemą sudaro jėgos, kurių veikimo linijos susikerta viename taške. Tokia jėgų sistema yra vadinama erdvine susikertančių jėgų sistema.

Erdvinės susikertančių jėgų sistemos visas jėgas galima geometriškai sudėti, taikant plokščiosios susikertančių jėgų sistemos metodus (43 pav.).



43 pav. Erdvinės susikertančių jėgų sistemos jėgų sudėtis

Jėgų $\vec{F}_2$ ir $\vec{F}_3$ atstojamoji $\vec{R}_{23}$ randama taip:

$$\vec{R}_{23} = \vec{F}_2 + \vec{F}_3 .$$

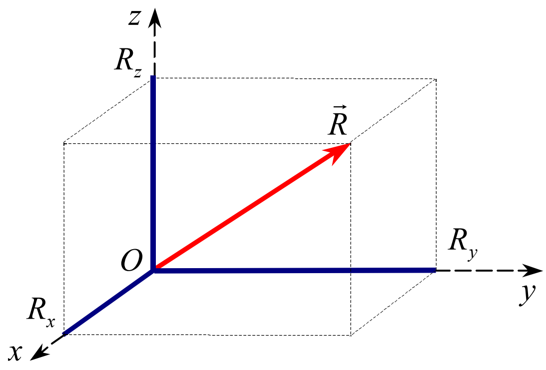
Visos jėgų sistemos $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3\right)$ atstojamąją jėgą $\vec{R}$ galima rasti sudėjus jėgas $\vec{F}_1$ ir $\vec{R}_{23}$:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{R}_{23} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 .$$

Analogiškai randame susikertančių jėgų sistemos, sudarytos iš n jėgų $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right)$, atstojamąją:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{R} .$$

Kai per jėgų susikirtimo tašką O yra išvestos koordinačių sistemos ašys, tai taikant jėgų atstojamosios projekcijos į ašį teoremą galima rasti atstojamosios projekcijas R_x, R_y ir R_z (44 pav.).



44 pav. Jėgų sistemos atstojamosios projekcijos

Atstojamosios jėgos $\vec{R}$ projekcijos skaičiuojamos taip:

$$F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = R_x ,$$

$$F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = R_y , \tag{81}$$

$$F_{1z} + F_{2z} + \ldots + F_{nz} = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = R_z .$$

Atstojamosios jėgos $\vec{R}$ dydis randamas taip:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} . \tag{82}$$

Matome, kad erdvinė susikertančių jėgų sistema bus pusiausvira, kai jos atstojamoji jėga $\vec{R}$ bus lygi nuliui, arba kai visų sistemos jėgų projekcijų į koordinačių ašis sumos bus lygios nuliui. Todėl pusiausvyros sąlygos erdvinei susikertančių jėgų sistemai užrašomos taip:

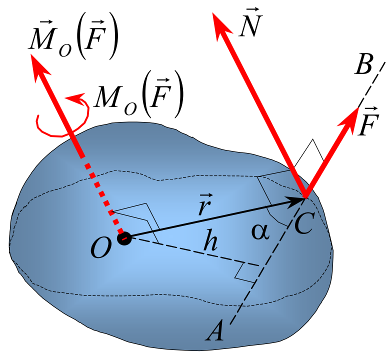
$$\boxed{\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0. \end{cases}} \tag{83}$$

1.6.1. JĖGOS MOMENTAS ERDVĖJE

Nagrinėjant erdvinę jėgų sistemą, jėgos momento taško atžvilgiu apibrėžimas, suformuluotas plokščiajai jėgų sistemai, pasidaro nebepakankamas. Plokščiojoje jėgų sistemoje visos jėgos veikė vienoje plokštumoje, todėl pakakdavo žinoti jėgos momento didumą ir kryptį. Erdvinėje jėgų sistemoje tenka atsižvelgti į tai, kad jėgos ir jų momentai gali veikti skirtingose plokštumose.

Kai kūną veikia bet kaip pridėta jėga $\vec{F}$ (45 pav.), jos momentas laisvai pasirinkto erdvės arba kūno taško O atžvilgiu bus visiškai nusakomas trimis charakteristikomis:

1. jėgos veikimo plokštuma OAB, einančia per jėgos vektorių $\vec{F}$ ir tašką O;
2. jėgos momento dydžiu, kuris lygus jėgos $\vec{F}$ modulio ir peties h sandaugai;
3. kryptimi, kuria jėga $\vec{F}$ suks kūną plokštumoje OAB.



45 pav. Jėgos momento apie tašką vektorius

Jėgos $\vec{F}$ pridėties taško C (45 pav.) padėtį erdvėje galima apibrėžti spinduliu-vektoriumi $\vec{r}$. Vektorių $\vec{r}$ ir $\vec{F}$ sandauga yra vektorius $\vec{N}$, kuris yra lygus:

$$\left|\vec{N}\right| = \left|\vec{r} \times \vec{F}\right| = r \cdot F \cdot \sin\alpha = F \cdot h = M_O(\vec{F}), \tag{84}$$

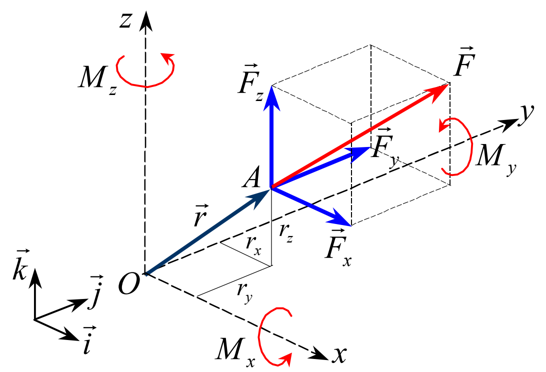
t. y. vektoriaus $\vec{N}$ modulis lygus jėgos $\vec{F}$ momentui taško O atžvilgiu. Todėl jėgos $\vec{F}$ momentas taško O atžvilgiu erdvinėje jėgų sistemoje yra vaizduojamas vektoriumi $\vec{M}_O(\vec{F})$, lygiu vektoriui $\vec{N}$, bet pridėtu taške O:

$$\left|\vec{M}_O(\vec{F})\right| = \left|\vec{N}\right|, \tag{85}$$

ir

$$\left|\vec{M}_O(\vec{F})\right| = M_O(\vec{F}) = F \cdot h. \tag{86}$$

Schemose vaizduojamas momentas-vektorius $\vec{M}_O(\vec{F})$ turi būti statmenas plokštumai OAB (45 pav.) ir nukreiptas į tą pusę, iš kurios matyti, kad jėga $\vec{F}$ suka šią plokštumą prieš laikrodžio rodyklės kryptį.



46 pav. Jėgos momentas apie tašką

Jeigu per laisvai pasirinktą tašką *O* (46 pav.) išvesime koordinačių ašis *x*, *y* ir *z*, jėgą $\vec{F}$ bus galima išskaidyti į dedamąsias $\vec{F}_x$, $\vec{F}_y$ ir $\vec{F}_z$. Taip pat bus galima užrašyti, kad:

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z, \tag{87}$$

$$\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k}$$

ir (88)

$$\vec{r} = r_x \cdot \vec{i} + r_y \cdot \vec{j} + r_z \cdot \vec{k},$$

kur $\vec{i}$, $\vec{j}$ ir $\vec{k}$ – koordinačių ašių vienetiniai vektoriai.

Atsižvelgiant į anksčiau pateiktą jėgos momento apie tašką išraišką:

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}\right) = \vec{r} \times \vec{F},$$

gaunama jėgos $\vec{F}$ apie tašką *O* momento išraiška *xyz* koordinačių sistemai (46 pav.):

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}\right) = \left(r_x \cdot \vec{i} + r_y \cdot \vec{j} + r_z \cdot \vec{k}\right) \times \left(F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k}\right), \tag{89}$$

kur bendruoju atveju $r_x = x$, $r_y = y$, $r_z = z$. Todėl

$$\begin{aligned} \vec{M}_O\left(\vec{F}\right) &= \left(x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}\right) \times \left(F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k}\right) = \\ &= \left(y \cdot F_z + \left(-z \cdot F_y\right)\right) \cdot \vec{i} + \left(z \cdot F_x + \left(-x \cdot F_z\right)\right) \cdot \vec{j} + \left(x \cdot F_y + \left(-y \cdot F_x\right)\right) \cdot \vec{k}, \end{aligned} \tag{90}$$

nes $F_x \,//\, x, F_y \,//\, y, F_z \,//\, z$, o tokių narių sandauga lygi nuliui.

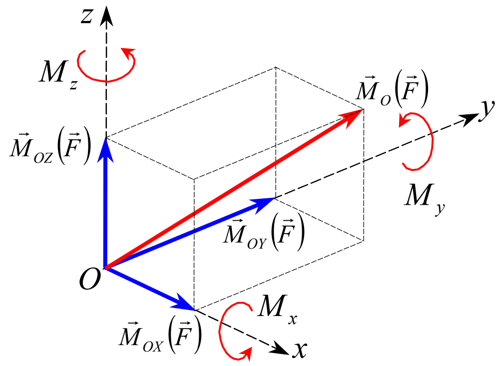
Matome, kad jėgos $\vec{F}$ apie tašką *O* momento išraiška (90) yra sudaryta iš trijų dalių – jėgos $\vec{F}$ momentų apie *x*, *y* ir *z* ašis (46 pav.):

$$y \cdot F_z - z \cdot F_y = M_x, \qquad z \cdot F_x - x \cdot F_z = M_y, \quad x \cdot F_y - y \cdot F_x = M_z,$$

todėl

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = M_x \cdot \vec{i} + M_y \cdot \vec{j} + M_z \cdot \vec{k}, \tag{91}$$

kur $M_x \cdot \vec{i} = \vec{M}_{OX}(\vec{F})$, $M_y \cdot \vec{j} = \vec{M}_{OY}(\vec{F})$, $M_z \cdot \vec{k} = \vec{M}_{OZ}(\vec{F})$ – jėgos momento-vektoriaus $\vec{M}_O(\vec{F})$ dedamosios pagal *x*, *y* ir *z* ašis (47 pav.).



47 pav. Jėgos momento apie tašką vektorius

Jėgos $\vec{F}$ momento apie tašką *O* vektoriaus didumą galima rasti geometriškai sudėjus jėgos $\vec{F}$ momentus-vektorius apie *x*, *y* ir *z* ašis:

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{M}_{OX}(\vec{F}) + \vec{M}_{OY}(\vec{F}) + \vec{M}_{OZ}(\vec{F}), \tag{92}$$

kur momentų-vektorių didumai atitinkamai lygūs:

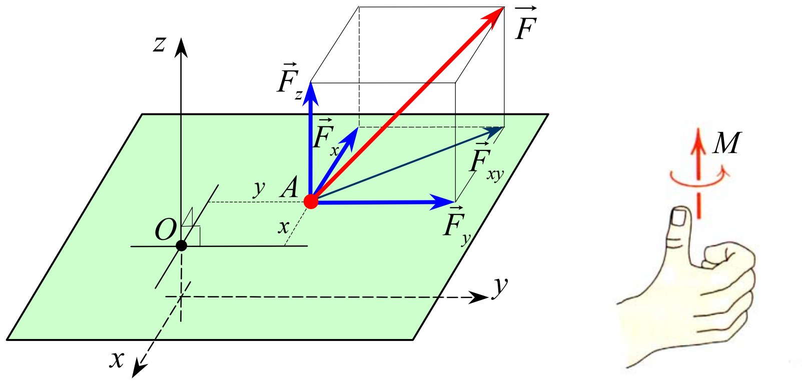
$$\left|\vec{M}_{OX}(\vec{F})\right| = M_x, \qquad \left|\vec{M}_{OY}(\vec{F})\right| = M_y, \qquad \left|\vec{M}_{OZ}(\vec{F})\right| = M_z. \tag{93}$$

Išnagrinėjus gautąsias jėgos $\vec{F}$ momentų apie *x*, *y* ir *z* ašis išraiškas

$$y \cdot F_z - z \cdot F_y = M_x, \qquad z \cdot F_x - x \cdot F_z = M_y, \quad x \cdot F_y - y \cdot F_x = M_z \tag{94}$$

matome, kad momentą apie ašį turės tik tos jėgos $\vec{F}$ dedamosios, kurios veikia statmenoje nagrinėjamai ašiai plokštumoje:

$$\begin{aligned} y \cdot F_z - z \cdot F_y &= M_x = M_x(F_{yz}), \\ z \cdot F_x - x \cdot F_z &= M_y = M_y(F_{xz}), \\ x \cdot F_y - y \cdot F_x &= M_z = M_z(F_{xy}). \end{aligned} \tag{95}$$



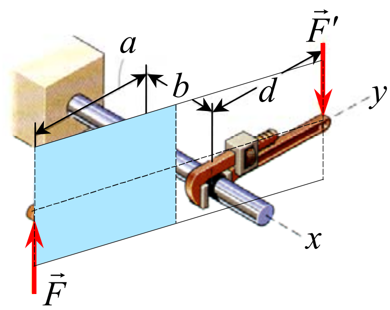
a) b)

48 pav. Jėgos momentas apie ašį *z*

Kaip pavyzdį panagrinėsime jėgos $\vec{F}$ momentą apie ašį *z* (48a pav.). Jėgos $\vec{F}$ dedamoji $\vec{F}_z$ yra lygiagreti su ašimi *z* ir jėgos momento apie ją neturės. Momentus apie ašį *z* turės tik statmenoje tai ašiai plokštumoje veikiančios dedamosios $\vec{F}_x$ ir $\vec{F}_y$. Tačiau jas galima pakeisti viena atstojamąja $\vec{F}_{xy}$. Vadinasi, norint rasti jėgos $\vec{F}$ momentą apie ašį, reikia suprojektuoti jėgą į plokštumą, statmeną tai ašiai, ir apskaičiuoti jėgos projekcijos momentą apie tašką, kuriame ašis susikerta su plokštuma.

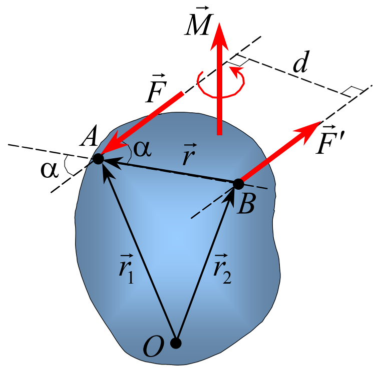
- Pagal susitarimą momentas laikomas teigiamu, kai, žiūrint iš ašies galo, matoma, kad jėga suka kūną prieš laikrodžio rodyklės kryptį (48a,b pav.).

1.6.2. JĖGŲ PORA ERDVĖJE



49 pav. Jėgų pora erdvėje

Jėgų poros sąvoka, pateikta 1.4.2 skyrelyje, lengvai gali būti pritaikyta ir erdvinei jėgų sistemai. Erdvėje kūną veikianti jėgų pora $\left(\vec{F};\vec{F}'\right)$ pavaizduota 49 pav.



50 pav. Jėgų poros momentas

Jėgų poros jėgų $\vec{F}$ ir $\vec{F}'$ (50 pav.) momentus laisvai parinkto erdvės arba kūno taško O atžvilgiu galima išreikšti vektoriais:

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r}_1 \times \vec{F}, \qquad \vec{M}_O(\vec{F}') = \vec{r}_2 \times \vec{F}'. \tag{96}$$

Todėl jėgų poros momentas-vektorius $\vec{M}$ yra lygus jėgų poros jėgų momentų-vektorių geometrinei sumai:

$$\vec{M} = \vec{M}_O(\vec{F}) + \vec{M}_O(\vec{F}') = \vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r}_2 \times \vec{F}', \tag{97}$$

kur $\vec{F}' = -\vec{F}$, todėl: $\quad \vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}) = \vec{r}_1 \times \vec{F} - \vec{r}_2 \times \vec{F} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F};$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F},$$

kur $\left|\vec{r} \times \vec{F}\right| = r \cdot F \cdot \sin\alpha = F \cdot d = M(\vec{F}, \vec{F}')$.

$$\left|\vec{M}\right| = M(\vec{F}, \vec{F}') = F \cdot d. \tag{98}$$

Išvados:

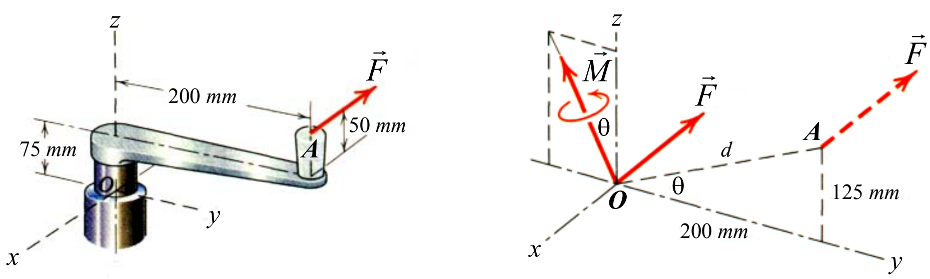
1. Jėgų poros momentas apibrėžiamas vektoriumi, statmenu jėgų poros veikimo plokštumai, ir nukreiptu į tą pusę, iš kurios žiūrint matyti, kad jėgų pora suka kūną prieš laikrodžio rodyklės kryptį;
2. Kadangi taškas O buvo parinktas laisvai, tai jėgų poros momentas-vektorius gali būti pridėtas bet kuriame kūno arba erdvės taške;
3. Sandaugos $\vec{r} \times \vec{F}$ rezultatas bus toks pat visoms plokštumoms, lygiagrečioms su jėgų poros veikimo plokštuma. Todėl jėgų porą galima perkelti į bet kurią su jos veikimo plokštuma lygiagrečią plokštumą.

1.6.3. LYGIAGRETUSIS JĖGOS PERKĖLIMAS ERDVĖJE

Perkeliant jėgą lygiagrečiai erdvėje, yra taikoma lygiagretaus jėgos perkėlimo teorema (žr. 1.4.4 sk.), kuri skamba taip: *norint lygiagrečiai perkelti jėgą į bet kurį kitą plokštumos tašką, reikia papildomai pridėti jėgų porą, kurios momentas lygus perkeliamos jėgos momentui taško atžvilgiu, į kurį ši jėga yra perkeliama*.

Čia reikia atkreipti dėmesį į tai, kad ir jėga, ir taškas yra erdvėje, todėl plokštuma, išvesta per jėgos veikimo tiesę ir tašką taip pat bus erdvėje.

Pavyzdys. Jėga $F = 400N$ yra pridėta mechanizmo taške A (51a pav.). Ją reikia perkelti lygiagrečiai į tašką O ir nustatyti papildomos jėgų poros momento dydį bei padėtį erdvėje.



a) b)

51 pav. Lygiagretusis jėgos perkėlimas erdvėje

Papildomos jėgų poros momentas gali būti rastas vektorine forma:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F},$$

čia spindulys-vektorius $\vec{r} = \overrightarrow{OA} = 0{,}2\vec{j} + 0{,}125\vec{k}\ \ (m)$, o jėgos didumas $\vec{F} = -400\vec{i}\ \ (N)$.

Tada:

$$\vec{M} = \left(0{,}2\vec{j} + 0{,}125\vec{k}\right) \times \left(-400\vec{i}\right) = -50\vec{j} + 80\vec{k}\quad (N \cdot m).$$

Šio vektoriaus dydis skaičiuojamas taip:

$$M = \sqrt{-50^2 + 80^2} = 94{,}3\quad (N \cdot m).$$

Momentas-vektorius $\vec{M}$ (51b pav.) bus statmenas atkarpai AO, veiks plokštumoje zy:

$$\theta = \arctan\frac{125}{200} = \arctan 0{,}625 = 32{,}0^0$$

ir bus nukreiptas taip, kad žiūrint nuo jo galo jėga $\vec{F}$ suktų mechanizmą prieš laikrodžio rodyklės kryptį.

Tačiau per tašką O ir jėgos $\vec{F}$ veikimo tiesę išvedus plokštumą (51b pav.) matyti, kad trumpiausias atstumas tarp jėgos $\vec{F}$ veikimo tiesės ir taško O yra lygus:

$$d = \sqrt{0{,}125^2 + 0{,}2^2} = 0{,}236\ (m).$$

Todėl jėgos $\vec{F}$ apie tašką O ir taip pat papildomos jėgų poros momentas randamas taip:

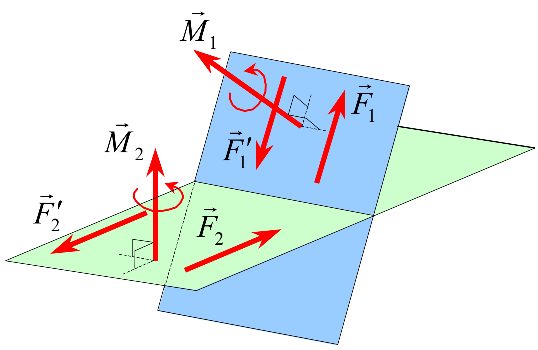
$$M = F \cdot d = 400 \cdot 0{,}236 = 94{,}3\ (N \cdot m),$$

jėgų pora veiks plokštumoje, einančioje per tašką O ir jėgos $\vec{F}$ veikimo tiesę, ir bus nukreipta jėgos $\vec{F}$ apie tašką O sukimo kryptimi.

1.6.4. JĖGŲ PORŲ SUDĖTIS ERDVĖJE. ERDVINĖS JĖGŲ PORŲ SISTEMOS PUSIAUSVYROS SĄLYGOS

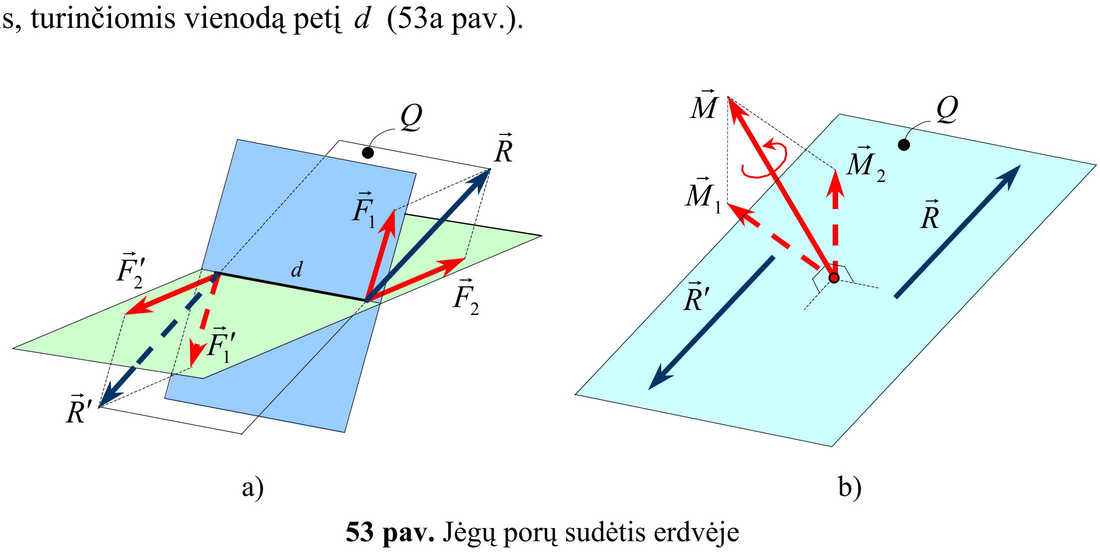
Erdvinė jėgų porų sistema gali būti pakeista viena jėgų pora, kurios momentas lygus dedamųjų jėgų porų momentų geometrinei sumai.

Nagrinėjamos dvi jėgų poros $(\vec{F}_1; \vec{F}_1')$ ir $(\vec{F}_2; \vec{F}_2')$, veikiančios skirtingose plokštumose (52 pav.).



52 pav. Jėgų porų sistema

Atsižvelgiant į jėgų porų savybes (žr. 1.4.2–1.4.3 sk.) abi poros pakeičiamos kitomis poromis, turinčiomis vienodą petį d (53a pav.).



53 pav. Jėgų porų sudėtis erdvėje

Geometriškai sudėjus jėgų porų $(\vec{F}_1;\vec{F}_1')$ ir $(\vec{F}_2;\vec{F}_2')$ jėgas randame atstojamosios jėgų poros $(\vec{R};\vec{R}')$ jėgas bei jų veikimo plokštumą Q:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \qquad \vec{R}' = \vec{F}_1' + \vec{F}_2'. \tag{99}$$

Atstojamosios jėgų poros $(\vec{R};\vec{R}')$ momentas lygus:

$$\vec{M} = \vec{d} \times \vec{R} = \vec{d} \times \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right) = \vec{d} \times \vec{F}_1 + \vec{d} \times \vec{F}_2 = \vec{M}_1 + \vec{M}_2. \tag{100}$$

Vadinasi, atstojamosios jėgų poros momentas-vektorius lygus dedamųjų jėgų porų momentų-vektorių geometrinei sumai ir yra statmenas atstojamosios jėgų poros veikimo plokštumai (53b pav.).

Kai jėgų porų sistemą sudaro n jėgų porų, galima užrašyti:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + ... + \vec{M}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i. \tag{101}$$

Atstojamosios jėgų poros momentą-vektorių $\vec{M}$ galima išreikšti projekcijomis:

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}, \tag{102}$$

kur $M_x = \sum_{i=1}^{n} M_{xi}$, $M_y = \sum_{i=1}^{n} M_{yi}$, $M_z = \sum_{i=1}^{n} M_{zi}$.

Kadangi jėgų porų sistema pakeičiama viena atstojamąja jėgų pora, tai sistemos pusiausvyrai pakanka, kad atstojamosios jėgų poros momentas būtų lygus nuliui:

$$\vec{M} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = 0. \tag{103}$$

Išreiškus atstojamosios jėgų poros momentą projekcijomis, gaunamos analizinės pusiausvyros sąlygos:

$$\sum_{i=1}^{n} M_{xi} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} M_{yi} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} M_{zi} = 0. \tag{104}$$

Kai jėgų poros veikia vienoje plokštumoje arba lygiagrečiose plokštumose, pusiausvyrai nusakyti pakanka vienos lygties:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = 0. \tag{105}$$

1.7. ERDVINĖ BET KAIP IŠDĖSTYTŲ JĖGŲ SISTEMA

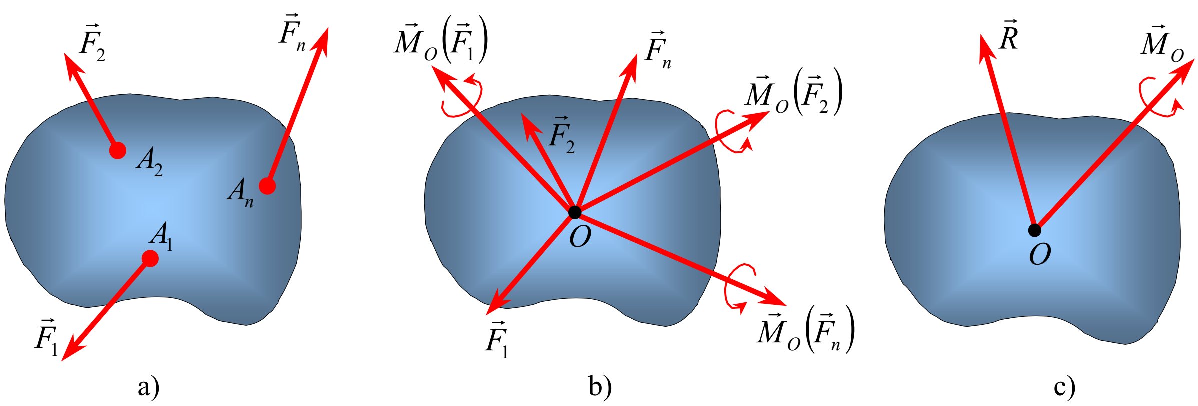
Erdvinė sistema jėgų, kurių veikimo tiesės nesusikerta viename taške ir nėra lygiagrečios, yra vadinama erdvine bet kaip išdėstytų jėgų sistema. Sprendžiant uždavinius tokios jėgų sistemos, kaip ir plokščiosios bet kaip išdėstytų jėgų sistemos, gali būti pertvarkomos, taikant toliau aprašytus redukavimo būdus.

1.7.1. ERDVINĖS JĖGŲ SISTEMOS REDUKAVIMO BŪDAI

Erdvinės jėgų sistemos redukavimas į tam tikrą centrą

Erdvinę jėgų sistemą galima pakeisti viena jėga, lygia sistemos svarbiausiam vektoriui, pridėta pasirinktame redukavimo centre, ir viena jėgų pora, kurios momentas lygus sistemos svarbiausiam momentui to paties redukavimo centro atžvilgiu.

Tarkim, kad kietojo kūno taškuose $A_1, A_2, ..., A_n$ yra pridėtos jėgos $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$. Laisvai pasirenkamas redukcijos centras – kūno taškas O (54a pav.).



54 pav. Erdvinės jėgų sistemos redukavimas į centrą O

Nustatyta, kad jėgos poveikis kūnui nepasikeis, jei perkeliant jėgą lygiagrečiai į bet kurį kitą kūno tašką bus pridėta jėgų pora, kurios momentas lygus perkeliamos jėgos momentui to taško atžvilgiu. Todėl per jėgų veikimo tieses ir tašką O yra išvedamos plokštumos, ir kiekviena jėga atitinkamoje plokštumoje lygiagrečiai perkeliama į tašką O (54b pav.). Papildomi kiekvienos jėgos momentai apie tašką O yra vaizduojami momentais-vektoriais, statmenais atitinkamoms jėgų veikimo plokštumoms, ir nukreiptais taip, kad žiūrint nuo vektoriaus galo jėga suktų kūną prieš laikrodžio rodyklės kryptį. Tokiu būdu taške O gaunamos visos jėgos $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ ir pridėtinių jėgų porų momentai-vektoriai $\vec{M}_O(\vec{F}_1), \vec{M}_O(\vec{F}_2), \ldots, \vec{M}_O(\vec{F}_n)$.

Geometriškai sudėjus jėgas $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ randamas sistemos svarbiausias vektorius $\vec{R}$ (54c pav.):

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i .$$

Geometriškai sudėjus visus momentus-vektorius $\vec{M}_O(\vec{F}_1), \vec{M}_O(\vec{F}_2), \ldots, \vec{M}_O(\vec{F}_n)$ randamas sistemos svarbiausias momentas-vektorius $\vec{M}_O$ (54c pav.):

$$\vec{M}_O = \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) + \ldots + \vec{M}_O(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_i). \tag{106}$$

Matome, kad svarbiausio vektoriaus $\vec{R}$ kryptis ir didumas nepriklauso nuo redukavimo centro padėties, o svarbiausias momentas-vektorius $\vec{M}_O$, kintant redukavimo centro padėčiai, kinta, nes kinta atskirų jėgų momentai to centro atžvilgiu. Erdvinės jėgų sistemos charakteristikos, kurios nekinta keičiant redukavimo centrą, yra vadinamos erdvinės jėgų sistemos redukavimo invariantais. Bet kaip išdėstytų jėgų erdvinė sistema turi du invariantus:

1. Pirmasis invariantas yra vektorinis, tai sistemos svarbiausias vektorius $\vec{R}$:

$$\vec{R} = const.$$

2. Antrasis invariantas yra skaliarinis, tai svarbiausio vektoriaus ir svarbiausio momento-vektoriaus skaliarinė sandauga, lygi svarbiausio momento-vektoriaus projekcijai į svarbiausiojo vektoriaus kryptį:

$$\vec{R} \cdot \vec{M}_O = const.$$

Erdvinės jėgų sistemos redukavimo į tam tikrą centrą galimi atvejai pateikti 1 lentelėje.

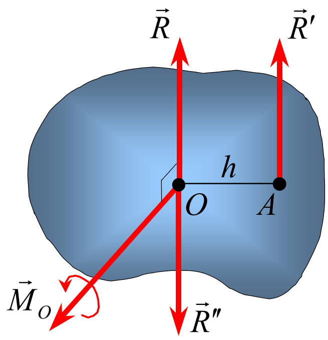
1 lentelė. Erdvinės jėgų sistemos redukavimo galimi atvejai

	Galimas redukavimo į centrą rezultatas	**Redukavimo būdo pavadinimas**
1.	$\vec{R} \neq 0$ ir $\vec{R} \cdot \vec{M}_O \neq 0$	Redukavimas į dinamą
2.	$\vec{R} \neq 0,\ \vec{R} \cdot \vec{M}_O = 0.$ Taip gali būti, kai $\vec{M}_O = 0$ arba $\vec{R} \perp \vec{M}_O$	Redukavimas į atstojamąją jėgą
3.	$\vec{R} = 0$ ir $\vec{R} \cdot \vec{M}_O = 0,$ bet $\vec{M}_O \neq 0$	Redukavimas į jėgų porą
4.	$\vec{R} = 0$ ir $\vec{M}_O = 0$	Jėgų sistema yra pusiausvira

Erdvinės jėgų sistemos redukavimas į atstojamąją jėgą

Jeigu redukuojant jėgų sistemą svarbiausias vektorius (54c pav.) $\vec{R}$ nelygus nuliui $\vec{R} \neq 0$, o svarbiausias momentas-vektorius $\vec{M}_O$ pasirinkto redukavimo centro atžvilgiu lygus nuliui $\vec{M}_O = 0$ arba statmenas svarbiausiam vektoriui $\vec{M}_O \perp \vec{R}$, tai jėgų sistema yra redukuojama į atstojamąją jėgą.

Kai $\vec{M}_O = 0$, tai svarbiausias vektorius $\vec{R}$ bus visos jėgų sistemos atstojamoji jėga, nes jis vienas atstos visą jėgų sistemą.



55 pav. Erdvinės jėgų sistemos redukavimas į atstojamąją jėgą

Kai $\vec{M}_O \perp \vec{R}$ (55 pav.), svarbiausiąjį momentą-vektorių $\vec{M}_O$ galima pakeisti jėgų pora $\left(\vec{R}';\vec{R}''\right)$, kurios jėgos lygios svarbiausio vektorius $\vec{R}$ moduliui, yra su juo lygiagrečios ir veikia toje pat plokštumoje. Poros petys *h* parenkamas taip, kad momentas išliktų nepakitęs:

$$M_O = M\left(\vec{R}',\vec{R}''\right) = h \cdot R\,, \tag{107}$$

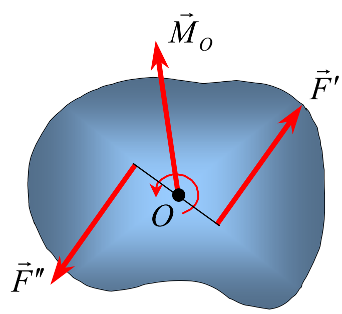
$$h = \frac{M_O}{R}\,. \tag{108}$$

Jėgos $\vec{R}$ ir $\vec{R}''$ sudaro atsisveriančių jėgų sistemą, todėl jas atmetę gauname, kad jėgų sistema yra pakeista viena jėga $\vec{R}'$, kuri yra visos jėgų sistemos atstojamoji jėga. Taškas *A* yra ypatingas tuo, kad atstojamoji $\vec{R}'$, pridėta šiame taške, turės momentą apie tašką *O*, lygų sistemos svarbiausiam momentui M_O.

Erdvinės jėgų sistemos redukavimas į jėgų porą

Kai jėgų sistemos (54c pav.) svarbiausias vektorius $\vec{R}$ lygus nuliui $\vec{R} = 0$, o svarbiausias momentas $\vec{M}_O$ bet kurio laisvai pasirinkto redukavimo centro atžvilgiu nelygus nuliui $\vec{M}_O \neq 0$ (56 pav.), tai jėgų sistema redukuojama į jėgų porą, kurios momentas lygus jėgų sistemos svarbiausiam momentui. Tokia jėgų sistema gali tik sukti kūną.

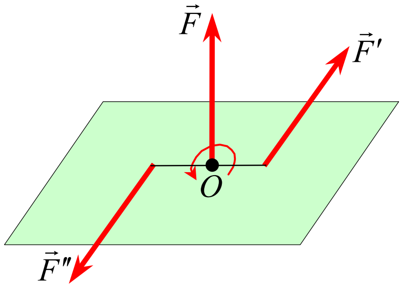
$$M_O = M\left(\vec{F}',\vec{F}''\right).$$



56 pav. Erdvinės jėgų sistemos redukavimas į jėgų porą

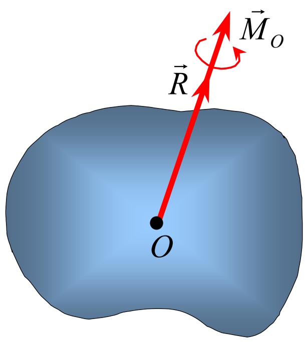
Erdvinės jėgų sistemos redukavimas į dinamą

Dinama arba dinaminiu sraigtu vadinama jėgų sistema, susidedanti iš jėgos ir jėgų poros, kurios veikimo plokštuma yra statmena jėgai (57 pav.). Dinama, veikdama kūną, verčia jį slinkti ir suktis apie dinamos ašį.



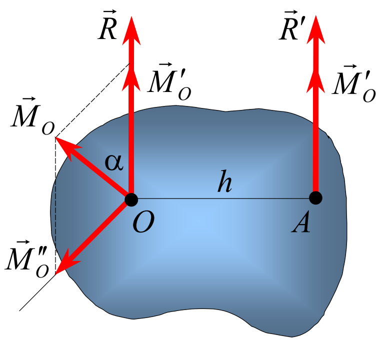
57 pav. Dinama

Jeigu redukavę jėgų sistemą į tam tikrą centrą (54c pav.) gavome, kad vektoriai $\vec{R}$ ir $\vec{M}_O$ yra lygiagretūs, tai redukuotoji jėgų sistema sudaro dinamą (58 pav.).



58 pav. Erdvinė jėgų sistema, redukuota į dinamą

Jei redukuojant jėgų sistemą kampas α tarp svarbiausių vektorių $\vec{R}$ ir $\vec{M}_O$ (59 pav.) yra $\alpha \neq 0$ ir $\alpha \neq 90$, tai pagal jėgų porų sudėties ir skaidymo teoremą momentą-vektorių $\vec{M}_O$ galima išskaidyti į dedamąsias $\vec{M}'_O$ ir $\vec{M}''_O$.



$$R' = R$$

$$M'_O = M_O \cdot \cos\alpha$$

$$M''_O = M_O \cdot \sin\alpha$$

$$h = \frac{M''_O}{R} = \frac{M_O \cdot \sin\alpha}{R}$$

59 pav. Erdvinės jėgų sistemos redukavimas į dinamą

Svarbiausiojo momento-vektoriaus dedamoji $\vec{M}''_O$ yra statmena svarbiausiam vektoriui $\vec{R}$, todėl sistemą $\vec{M}''_O$ ir $\vec{R}$ galima pakeisti viena atstojamąja jėga $\vec{R}'$, pridėta taške A (žr. redukavimas į atstojamąją). Dedamoji $\vec{M}'_O$ yra svarbiausio momento-vektoriaus projekcija į svarbiausiojo vektoriaus $\vec{R}'$ kryptį ir nepriklauso nuo redukavimo centro, todėl ją galima perkelti į tašką A. Dėl šių pakeitimų taške A gavome sistemą, sudarytą iš jėgos $\vec{R}'$ ir jėgų poros, kurios momentas-vektorius $\vec{M}'_O$ sutampa su vektoriaus $\vec{R}'$ veikimo tiese. Vektorių $\vec{R}'$ ir $\vec{M}'_O$ veikimo tiesė yra vadinama dinamos ašimi.

1.7.2. ERDVINĖS BET KAIP IŠDĖSTYTŲ JĖGŲ SISTEMOS PUSIAUSVYROS SĄLYGOS

Erdvinės jėgų sistemos (54c pav.) svarbiausiąjį vektorių $\vec{R}$ ir svarbiausiąjį momentą-vektorių $\vec{M}_O$ galima išreikšti projekcijomis:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} ,$$

kur $R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}$, $R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}$, $R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}$.

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} .$$

Atsižvelgiant į tai, kad jėgos momento-vektoriaus projekcija į bet kurią ašį yra lygi jėgos momentui tos ašies atžvilgiu, gauname:

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} M_x(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^{n}(y_i \cdot F_{iz} - z_i \cdot F_{iy}),$$

$$M_y = \sum_{i=1}^{n} M_y(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^{n}(z_i \cdot F_{ix} - x_i \cdot F_{iz}), \qquad (109)$$

$$M_z = \sum_{i=1}^{n} M_z(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^{n}(x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix}).$$

Vadinasi, kad erdvinė bet kaip išdėstytų jėgų sistema būtų pusiausvira, būtina, kad sistemos svarbiausias vektorius ir svarbiausias momentas-vektorius abu kartu būtų lygūs nuliui:

$$\vec{R} = 0 \ \text{ ir } \ \vec{M}_O = 0.$$

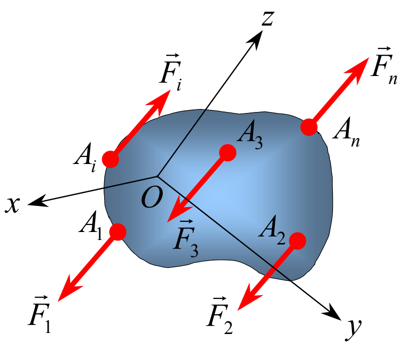
Todėl pusiausvyros lygčių sistema erdvinei bet kaip išdėstytų jėgų sistemai užrašoma taip:

$$
\begin{cases}
R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \\
R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \\
R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0, \\
M_x = \sum_{i=1}^{n} M_x(\vec{F}_i) = 0, \\
M_y = \sum_{i=1}^{n} M_y(\vec{F}_i) = 0, \\
M_z = \sum_{i=1}^{n} M_z(\vec{F}_i) = 0.
\end{cases}
\tag{110}
$$

1.7.3. ERDVINĖS LYGIAGREČIŲJŲ JĖGŲ SISTEMOS PUSIAUSVYROS SĄLYGOS

Kai erdvinės jėgų sistemos visos jėgos yra lygiagrečios, jos sudaro erdvinę lygiagrečiųjų jėgų sistemą (60 pav.).

Koordinačių sistemos ašis nukreipiame taip, kad viena ašis, pavyzdžiui *z*, būtų lygiagreti su jėgų veikimo tiesėmis.



60 pav. Erdvinė lygiagrečiųjų jėgų sistema

Matyti, kad jėgų projekcijos į x ir y ašis bei jėgų momentai apie z ašį yra lygūs nuliui, nepriklausomai nuo to, ar sistema yra pusiausvira, ar ne, todėl sąlygos:

$$
R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \quad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \quad M_z = \sum_{i=1}^{n} M_z(\vec{F}_i) = 0 \tag{111}
$$

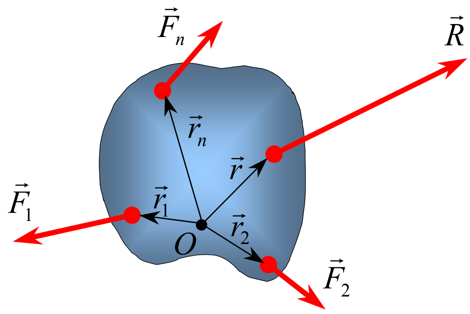
bus tenkinamos visada.

Vadinasi, erdvinei lygiagrečiųjų jėgų sistemai galima parašyti tik tris nepriklausomas pusiausvyros lygtis:

$$
\begin{cases}
R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0, \\
M_x = \sum_{i=1}^{n} M_x\left(\vec{F}_i\right) = 0, \\
M_y = \sum_{i=1}^{n} M_y\left(\vec{F}_i\right) = 0.
\end{cases}
\tag{112}
$$

1.7.4. VARINJONO TEOREMA, TAIKOMA ERDVINEI JĖGŲ SISTEMAI

Varinjono teoremą, įrodytą plokščiajai jėgų sistemai (žr. 1.3.4 sk.), galima taikyti ir erdvinei jėgų sistemai (61 pav.). Ji skamba taip: *erdvinės bet kaip išdėstytų jėgų sistemos atstojamosios momentas bet kurio taško atžvilgiu lygus visų sistemos jėgų momentų to taško atžvilgiu vektorinei sumai*.



61 pav. Erdvinė jėgų sistema

Todėl erdvinei jėgų sistemai Varinjono teoremos matematinė išraiška užrašoma taip:

$$
\vec{r} \times \vec{R} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \ldots + \vec{r}_n \times \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i \tag{113}
$$

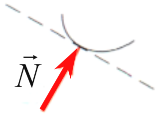
ir

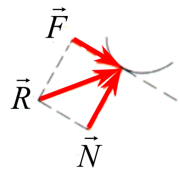
$$
\vec{M}_O\left(\vec{R}\right) = \vec{M}_O\left(\vec{F}_1\right) + \vec{M}_O\left(\vec{F}_2\right) + \ldots + \vec{M}_O\left(\vec{F}_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right). \tag{114}
$$

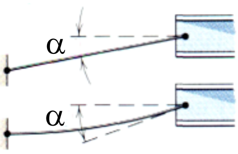
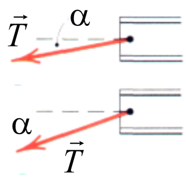
1.8. RYŠIŲ MODELIAVIMAS

Kūnų judėjimo laisvumo suvaržymai mechanikoje vadinami ryšiais. Ryšiai gali būti sudaryti iš kietų arba lanksčių kūnų, gali būti sujungti su šiuo kūnu arba gali jį tik liesti. Jei kūnas gali judėti erdvėje laisvai, niekieno nevaržomas, tai jis vadinamas laisvuoju arba nesuvaržytu kūnu.

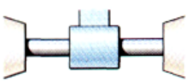
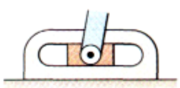
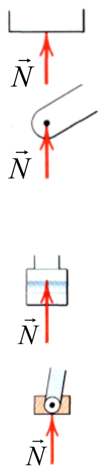
2 lentelė. Pagrindiniai ryšių tipai ir jų reakcijos

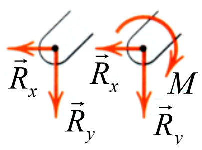
<table>
<tr><th colspan="2">PLOKŠČIOJI MECHANINĖ SISTEMA</th></tr>
<tr><th>Kontakto tipas</th><th>Atramos reakcija</th></tr>
<tr><td>Lietimasis
Lygūs paviršiai 
Nelygūs paviršiai </td><td>

Reakcija yra statmena atramos paviršiui


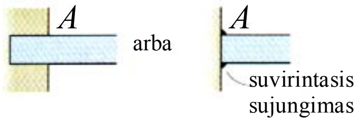
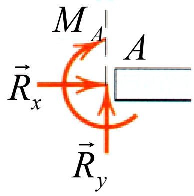
Reakcijos $\vec{R}$ kryptis ir dydis randami sudėjus tangentinę komponentę $\vec{F}$ (trinties jėga) ir normalinę komponentę $\vec{N}$</td></tr>
<tr><td>Lankstus ryšys (virvė, trosas, lynas)
svoris neįvertinamas
svoris įvertinamas 
</td><td>

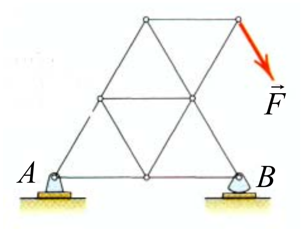
Reakcija nukreipta nuo kūno išilgai ryšio</td></tr>
<tr><td>Paslankūs šarnyrai
Šarnyrai su ratuku 

Slankikliai 
</td><td>

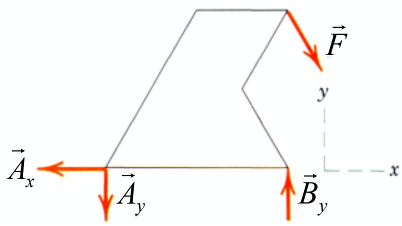
Reakcija visada yra statmena atramos paviršiui, net kai šis paviršius yra pasviręs</td></tr>
<tr><td>Nepaslankūs šarnyrai
</td><td>

Atramos reakcija gali būti nukreipta bet kaip plokštumoje, todėl dažnai yra naudojamos dvi šios reakcijos komponentės $\vec{R}_x$ ir $\vec{R}_y$. Kai sukimasis apie ašį yra nors kiek suvaržomas, atsiranda dar viena reakcija – momentas M.</td></tr>
</table>

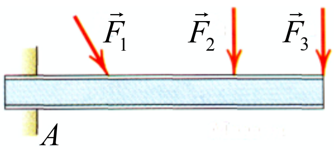
Standus įtvirtinimas Gembe vadinamas strypas, vienu galu standžiai įtvirtintas į atramą – sieną arba kitą masyvią konstrukcijos dalį 	Toks įtvirtinimas  neleidžia strypui nei pasislinkti, nei pasisukti bet kuria kryptimi. Todėl yra pridedamos dvi dedamosios $\vec{R}_x$ ir $\vec{R}_y$ ir jėgų pora su nežinomu momentu M_A.



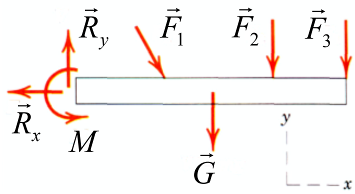
a) nepaslankus A ir paslankus B šarnyrai



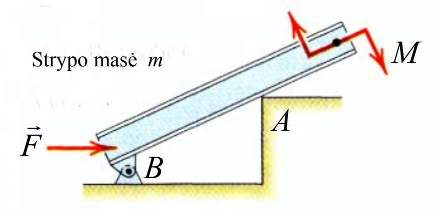
laisvojo kūno diagrama



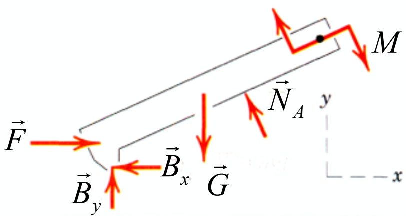
b) vienas kraštas strypo yra standžiai įtvirtintas



laisvojo kūno diagrama



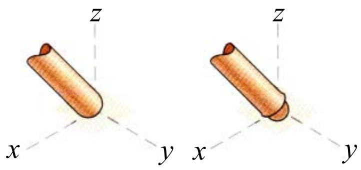
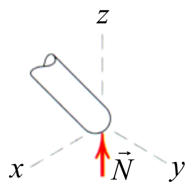
c) lietimasis A ir nepaslankus šarnyras B

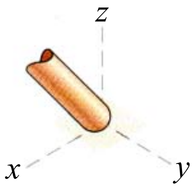
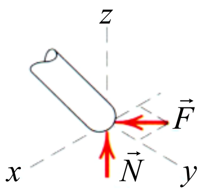


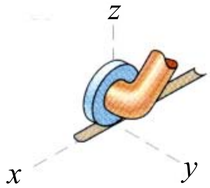
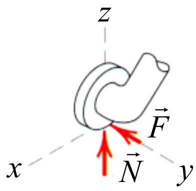
laisvojo kūno diagrama

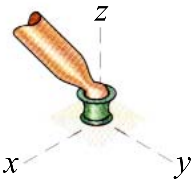
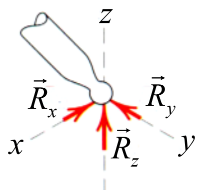
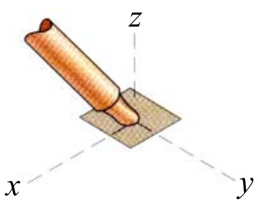
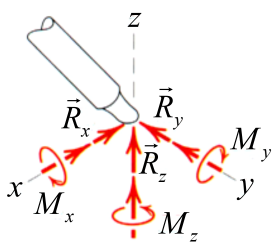
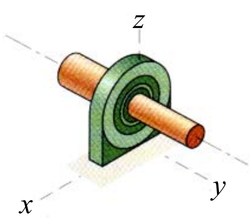
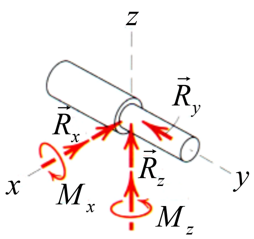
62 pav. Ryšiai ir reakcijos

3 lentelė. Pagrindiniai ryšių tipai ir jų reakcijos

<table>
<tr><th colspan="2">ERDVINĖ MECHANINĖ SISTEMA</th></tr>
<tr><th>Kontakto tipas</th><th>Atramos reakcija</th></tr>
<tr><td>Lietimasis
Lygūs paviršius 
</td><td>

Reakcija yra statmena atramos paviršiui</td></tr>
<tr><td>Nelygūs paviršius 
</td><td>

Reakcija $\vec{R}$ randama sudėjus tangentinę komponentę $\vec{F}$ (trinties jėga) ir normalinę komponentę $\vec{N}$</td></tr>
<tr><td>Paslankus šarnyras

</td><td>

Atramos reakcija $\vec{N}$ nukreipta statmenai atramos paviršiui, net kai ratuką veikia šoninė jėga $\vec{F}$</td></tr>
<tr><td>Nepaslankus šarnyras

</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Standus įtvirtinimas

</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Atraminis guolis

</td><td>
</td></tr>
</table>

1.9. STATIŠKAI IŠSPRENDŽIAMI IR STATIŠKAI NEIŠSPRENDŽIAMI UŽDAVINIAI

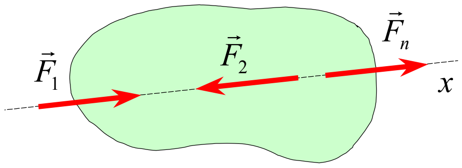
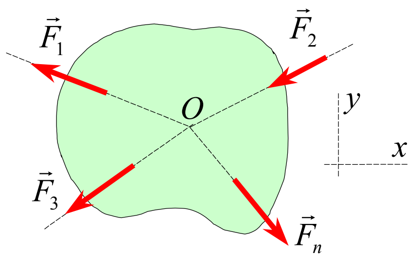
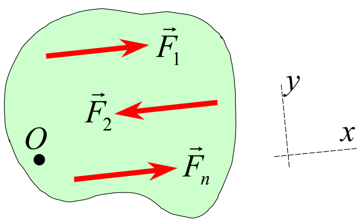
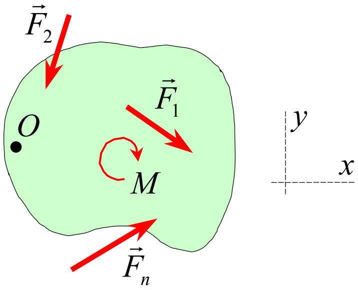
Kūnas yra pusiausviras, kai visų kūną veikiančių jėgų atstojamoji jėga yra lygi nuliui. Taigi, kai atstojamoji jėga $\vec{R}$ ir atstojamosios jėgų poros momentas $\vec{M}$ kartu yra lygūs nuliui, bendroji pusiausvyros sąlyga užrašoma taip:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0 \quad \text{ir} \quad \vec{M} = \sum_{i=1}^{k} \vec{M}_i = 0,$$

kur $i = 1, 2, \ldots, n$; n – veikiančių jėgų skaičius; k – veikiančių jėgų porų skaičius.

Pusiausvyros lygtys galimoms plokščiosioms ir erdvinėms jėgų sistemoms pateiktos 4 ir 5 lentelėse.

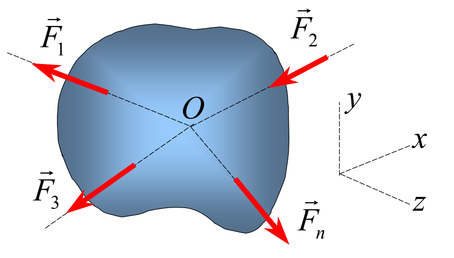
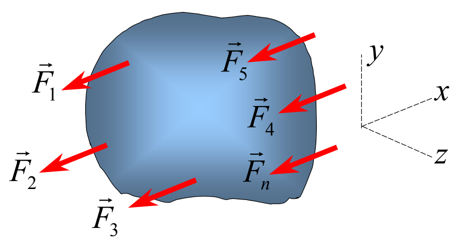
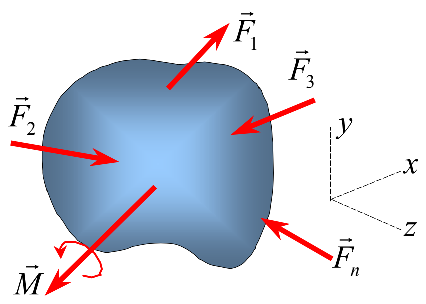
4 lentelė. Plokščiosios jėgų sistemos

PLOKŠČIOSIOS JĖGŲ SISTEMOS PUSIAUSVYROS SĄLYGOS		
Jėgų išdėstymas	Laisvojo kūno diagrama	Pusiausvyros lygtys
1. Veikia vienoje tiesėje		$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0.$
2. Susikerta viename taške		$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0,$ $\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0.$
3. Lygiagrečios		$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0,$ $\sum_{i=1}^{n} M_O(\vec{F}_i) = 0.$
4. Bet kaip išdėstytos		$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0,$ $\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0,$ $\sum_{i=1}^{n} M_O(\vec{F}_i) = 0.$

Matome (4 lent.), kad plokščiajai bet kaip išdėstytų jėgų sistemai galima parašyti ne daugiau kaip tris viena nuo kitos nepriklausomas pusiausvyros lygtis. Iš šių trijų lygčių galima rasti tik tris nežinomus dydžius, o plokščiajai lygiagrečių jėgų sistemai – tik du nežinomus dydžius. Vadinasi, bet kuris plokščiasis uždavinys yra statiškai išsprendžiamas, kai yra ne daugiau kaip trys nežinomi dydžiai.

Erdvinei bet kaip išdėstytų jėgų sistemai (5 lent.) galima parašyti ne daugiau kaip šešias nepriklausomas pusiausvyros lygtis. Iš šešių lygčių galima rasti tik šešis nežinomus dydžius, todėl erdvinis uždavinys bus statiškai išsprendžiamas, kai yra ne daugiau kaip šeši nežinomi dydžiai.

5 lentelė. Erdvinės jėgų sistemos

ERDVINĖS JĖGŲ SISTEMOS PUSIAUSVYROS SĄLYGOS		
Jėgų išdėstymas	Laisvojo kūno diagrama	Pusiausvyros lygtys
1. Susikerta viename taške		$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0,$ $\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0,$ $\sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0.$
2. Lygiagrečios		$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0,$ $\sum_{i=1}^{n} M_y(\vec{F}_i) = 0,$ $\sum_{i=1}^{n} M_z(\vec{F}_i) = 0.$
3. Bet kaip išdėstytos		$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0,\ \sum_{i=1}^{n} M_x(\vec{F}_i) = 0,$ $\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0,\ \sum_{i=1}^{n} M_y(\vec{F}_i) = 0,$ $\sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0,\ \sum_{i=1}^{n} M_z(\vec{F}_i) = 0.$

Išvada: bet kuris statikos uždavinys yra statiškai išsprendžiamas, kai nežinomų jėgų skaičius neviršija nepriklausomų pusiausvyros lygčių skaičiaus.

2. KŪNŲ SISTEMOS

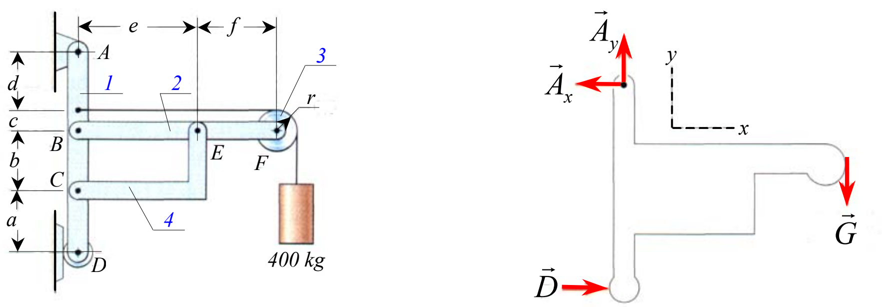
Iki šiol buvo nagrinėjami atskiri jėgų veikiami kietieji kūnai ir jų pusiausvyra. Šiame skyrelyje dėmesį skirsime tarpusavyje sujungtų kietųjų kūnų, kurių kiekvieną atskirai arba visus kartu gali veikti tam tikros jėgos, pusiausvyrai nagrinėti.

Nejudanti mechaninė sistema, sudaryta iš kelių tarpusavyje sujungtų kietųjų kūnų, yra vadinama kūnų sistema. Nagrinėjant vieno sistemos kūno poveikį kitam sistemos kūnui yra taikomos 4-oji – *akcijos ir reakcijos* bei 6-oji – *ryšio atlaisvinimo* statikos aksiomos, kurios skamba taip:

- *jėgos, kuriomis du kūnai veikia vienas kitą (akcija ir reakcija), yra lygios ir veikia viena tiese priešingomis kryptimis*;
- *bet kurį suvaržytą kūną galima būtų laikyti laisvuoju, nutraukus ryšius ir vietoj jų pridėjus atitinkamas ryšių reakcijų jėgas.*

Jėgos, kuriomis sistemą sudarantys kūnai veikia vienas kitą sujungimo arba kontakto vietose, yra vadinamos vidinėmis jėgomis arba vidinių ryšių reakcijomis. Pagal akcijos ir reakcijos aksiomą šios jėgos yra lygių modulių ir priešingų krypčių. Visos kitos kūnų sistemą veikiančios jėgos vadinamos išorinėmis jėgomis. Atraminių ryšių reakcijos vadinamos išorinių ryšių reakcijomis.

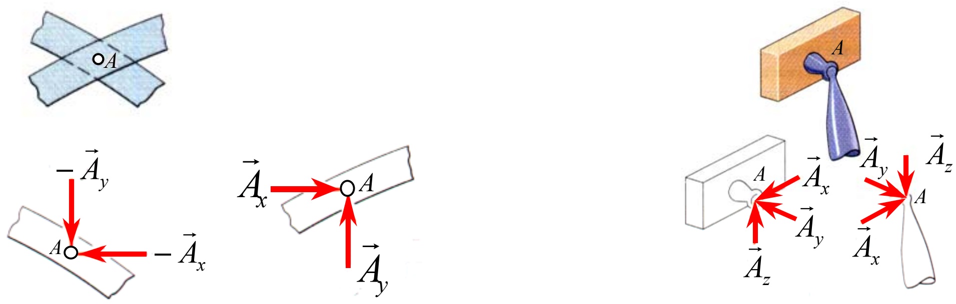
2.1. *KŪNŲ SISTEMOS PUSIAUSVYRA*



kūnų sistema laisvojo kūno diagrama

63 pav. Kūnų sistema

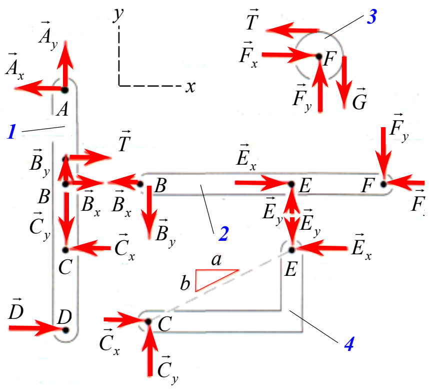
Nagrinėjant kūnų sistemą (63 pav.) svarbu žinoti, kiek kūnų sudaro tą sistemą, kiek yra sujungimo (arba kontakto) vietų (64a pav.) ir kokius ryšio tipus (žr. 1.8 sk., 2–3 lent.) atitinka tos sujungimo vietos. Sistemos kūnai veikia vienas kitą tik per sujungimo arba kontakto vietas, todėl nustačius, kokį ryšio tipą atitinka konkretus sujungimas, jame galima pridėti atitinkamas ryšio reakcijas. Reikia atkreipti dėmesį į tai, kad vienodo didumo ir priešingų krypčių reakcijų jėgos turi būti pridėtos prie visų *toje vietoje* (64a, b pav.) sujungtų kūnų, nes kūnai veikia vienas kitą.



a) b)

64 pav. Kūnų reakcijos sujungimo vietoje

Jeigu kūnų sistema yra pusiausvira, tai pusiausviri yra ir atskirai paimti sistemos kūnai. Pritaikę ryšio atlaisvinimo aksiomą galime išskirti kūnus (65 pav.) ir kiekvienam iš jų užrašyti pusiausvyros lygtis taip, kaip tai yra daroma esant vienam kūnui.



65 pav. Išskaidytos kūnų sistemos jėgų diagrama

Uždavinių sprendimo eiga yra tokia:

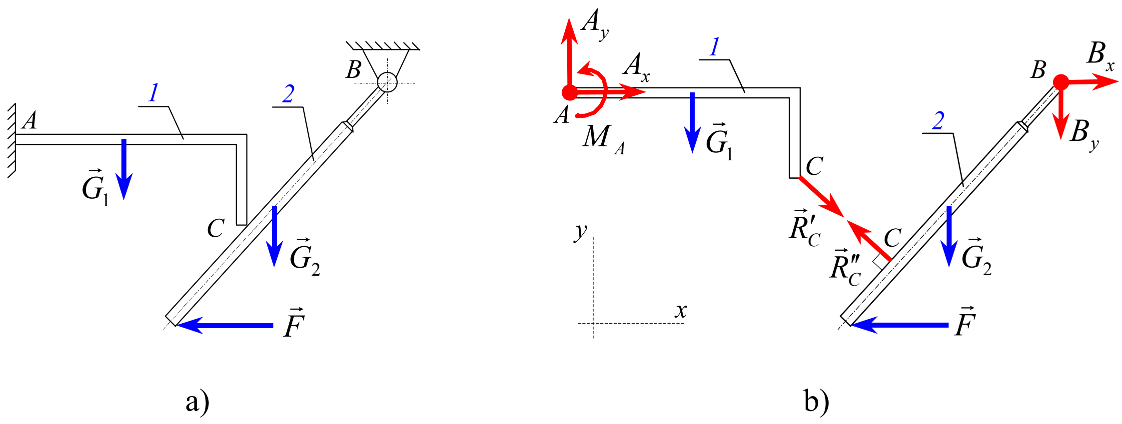
a) kūnų sistema skirstoma į atskirus kūnus, išorinius ir vidinius ryšius pakeičiant ryšių reakcijomis;

b) kiekvienam sistemos kūnui sudaroma atskira pusiausvyros lygčių sistema;

c) išsprendus lygčių sistemas randamos nežinomos ryšių reakcijos.

Kai plokščiąją kūnų sistemą sudaro n kūnų, galima sudaryti tik $(3 \cdot n)$ nepriklausomų pusiausvyros lygčių. Todėl plokščioji kūnų sistema bus statiškai išsprendžiama tada, kai bendras nežinomų išorinių ir vidinių reakcijų skaičius nebus didesnis kaip $(3 \cdot n)$. Erdvinės kūnų sistemos nežinomųjų skaičius negali viršyti atitinkamai $(6 \cdot n)$.

Pavyzdys. Dviejų taške C susiliečiančių kietųjų kūnų pusiausvirai sistemai (66a pav.) reikia rasti išorinių ryšių reakcijų jėgas (*atramų reakcijas*). Kad įvertintume kūnų tarpusavio poveikį, prie kiekvieno iš jų taške C yra pridedamos vienodo didumo bet priešingų krypčių reakcijos $\vec{R}'_C$ ir $\vec{R}''_C$ (66b pav.) (pastaba: *lietimosi atveju reakcija yra statmena paviršiui*, žr. 1.8 sk., 2 lent.).



66 pav. Dviejų kūnų sistema

Dabar galima atsisakyti ryšio, atskirti kūnus ir kiekvienam iš jų užrašyti pusiausvyros lygčių sistemą:

pirmam kūnui

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} M_A\left(\vec{F}_i\right) = 0 \end{cases}$$

antram kūnui

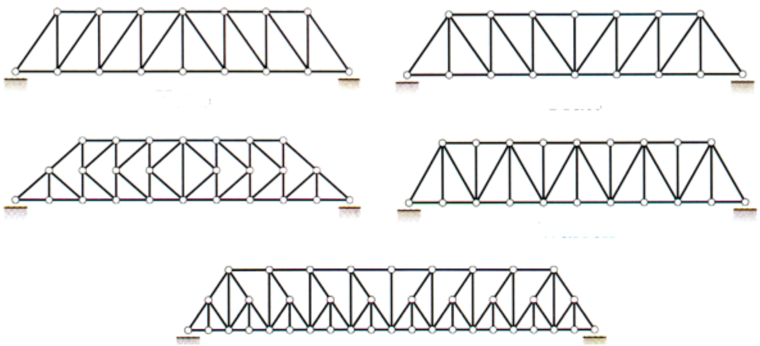
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} M_B\left(\vec{F}_i\right) = 0 \end{cases}$$

Sujungę užrašytąsias pusiausvyros lygtis į vieną lygčių sistemą, nagrinėjamai kūnų sistemai gauname šešių nepriklausomų pusiausvyros lygčių sistemą. Kūnus (66b pav.) veikia šešios nežinomos jėgos $A_x, A_y, M_A, R'_C = R''_C, B_x, B_y$, todėl taikant žinomus matematikos metodus jos yra nesunkiai randamos. Matyti, kad momentų lygtys kūnams yra užrašytos taškų, kuriuose pridėta daugiausia nežinomų jėgų, atžvilgiu. Tai leidžia sumažinti nežinomų jėgų skaičių momentų lygtyse ir taip pat gauti paprastesnes išraiškas.

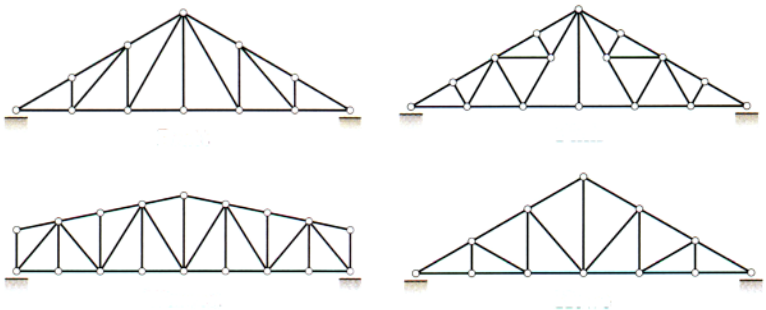
2.2. SANTVAROS

Standi konstrukcija, sudaryta iš tiesių elementų, sujungtų galuose yra vadinama santvara. Tiltai, kranai, stogai, elektros stulpai ir kitos panašaus pobūdžio struktūros yra santvaros. Struktūriniams santvarų elementams – strypams, kampuočiams, juostoms bei specialiems profiliams sujungti galuose naudojami įvairūs varžtai, kniedės, smeigtukai arba suvirinimas. Santvaros elementų sujungimo vietos yra vadinamos santvaros mazgais. Kadangi lenkimo deformacijos santvaros mazguose yra palyginti mažos, sprendžiant akademinio pobūdžio uždavinius, mazgai yra modeliuojami kaip šarnyrai (žr. 1.8 sk.).

Santvara vadinama plokščiąja, kai visi jos elementai yra vienoje plokštumoje. Keletas dažniausiai naudojamų plokščiosios struktūros santvarų yra pavaizduotos 67 pav.



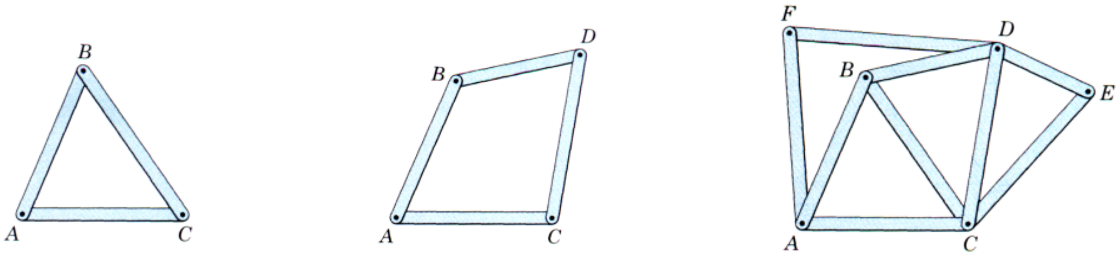
Tiltų santvaros



Stogų santvaros

67 pav. Plokščiosios santvaros

Matyti, kad bazinis plokščiosios santvaros elementas yra trikampis, nes trys tiesūs elementai, sujungti galuose šarnyrais, sudaro standžiąją struktūrą (68a pav.). Kita vertus, sujungus į daugiakampį keturis arba daugiau strypų (68b pav.), yra gaunama nestandžioji (nestabili) struktūra. Tokia struktūra taps standi tik taškus *A* ir *D* arba *C* ir *B* sujungus papildomu strypu (68c pav.). Toliau gautoji standžioji struktūra gali būti išplečiama, pridedant papildomus blokus iš dviejų tarpusavyje sujungtų strypų *AF*-*FD* arba *DE*-*EC* (68c pav.) ir liks standi.



a) b) c)

68 pav. Strypų sistemos

Standžiosios struktūros, sudarytos trikampio pagrindu taip, kaip buvo aprašyta anksčiau, yra paprastos santvaros. Tačiau, kai elementų struktūroje bus daugiau, negu reikia formai išlaikyti, santvara bus statiškai neišsprendžiama. Papildomi elementai arba atramos, skirti pusiausvyrai palaikyti, vadinami pertekliniais (*redundanciniais*). Statiškai neišsprendžiamos santvaros negali būti išanalizuotos taikant vien tik statikos metodus.

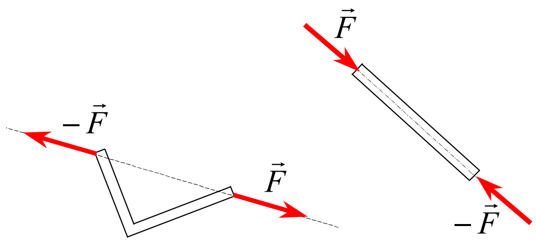
Statiškai išsprendžiamoms santvaroms santvaros mazgų ir strypų skaičiaus priklausomybė užrašoma taip:

$$S = 2 \cdot m - 3\,,$$

kur S – strypų skaičius santvaroje; m – mazgų skaičius santvaroje.

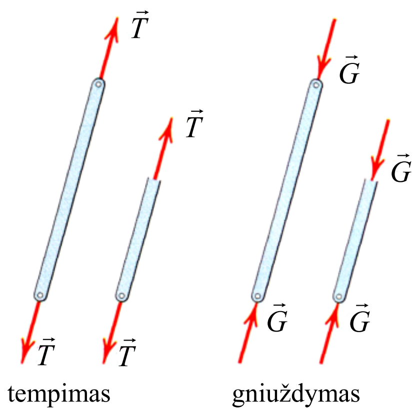
$S = 2 \cdot m - 3$	santvara statiškai išsprendžiama (68a,c pav.)
$S > 2 \cdot m - 3$	santvara statiškai neišsprendžiama
$S < 2 \cdot m - 3$	sistema neišlaiko savo formos (68b pav.)

Santvarų projektavimo pagrindą sudaro veikiančių jėgų pasiskirstymo įvairiose santvaros dalyse įvertinimas ir atitinkamai tokio santvaros matmenų, geometrinės struktūros bei struktūrinių elementų formos derinio parinkimas, kad santvara galėtų efektyviai priešintis veikiančioms apkrovoms. Prielaidos, taikomos analizuojant santvaros elementus veikiančias jėgas, visų pirma remiasi tuo, kad bet kuris (69 pav.) dviejų jėgų veikiamas kietasis kūnas bus pusiausviras, kai pridėtosios jėgos bus vienodo dydžio ir veiks viena tiese priešingomis kryptimis.



69 pav. Pusiausvyros sąlygos

Atsižvelgiant į tai, kad santvarų elementai (strypai, kampuočiai ir kt.) yra tiesūs ir tarpusavyje sujungti galuose, o jėgų, pridėtų viename santvaros mazge, poveikis kitiems santvaros mazgams gali būti perduodamas tik per santvaros elementus, laikoma, kad esant pusiausvyrai kiekvieną santvaros elementą veiks tik dvi vienodo dydžio ir priešingų krypčių jėgos, pridėtos elemento galuose (70 pav.).



70 pav. Santvaros elementą veikiančios jėgos

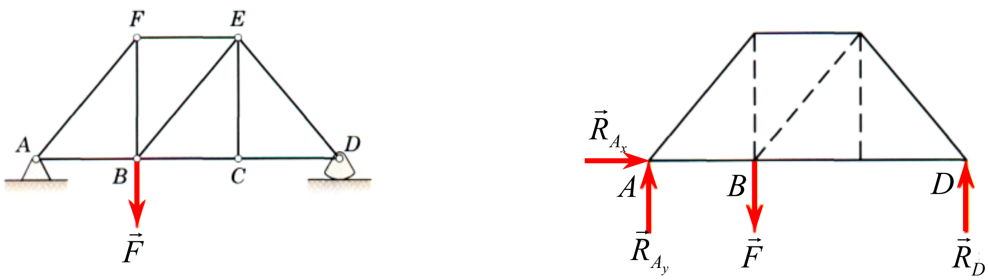
70 pav. matome, kad santvaros elementas gali būti tempiamas arba gniuždomas. Bet kurią pusiausviro santvaros elemento dalį veikia tos pačios tempimo $\vec{T}$ arba gniuždymo $\vec{G}$ jėgos (70 pav.). Laikoma, kad kai elementas yra tempiamas, jo įrąža – vidinė jėga, atsirandanti dėl išorinės apkrovos poveikio, yra teigiama, kai gniuždomas – neigiama.

Skaičiuojant santvaras atramų reakcijų jėgos ir visos išorinės apkrovos yra pridedamos tik santvaros mazguose. Santvaros elemento nuosavo svorio galima nepaisyti, kai jis yra daug mažesnis palyginti su elementą veikiančios jėgos dydžiu. Kai svorio efekto atsisakyti negalima, elemento svoris yra pakeičiamas dviem jėgomis, pridėtomis elemento galuose. Pavyzdžiui, kai elementas yra vientisas, kiekviename jo gale yra pridedama sunkio jėgos pusė. Toks elemento svorio įvertinimo būdas leidžia gauti teisingus rezultatus, kai yra vidutinis tempimas ir gniuždymas, tačiau elemento lenkimo efektas liks nepaaiškintas.

Santvaros elementų įrąžoms skaičiuoti dažniausiai taikomi mazgų ir pjūvio metodai.

Mazgų metodas

Šis santvaros įrąžoms skaičiuoti taikomas metodas yra paremtas kiekvieną santvaros mazgą veikiančių išorinių ir vidinių jėgų pusiausvyros sąlygų analize. Metodo esminius bruožus ir uždavinių sprendimo principą iliustruosime nagrinėdami plokščiąją santvarą (71a pav.).



a) b)

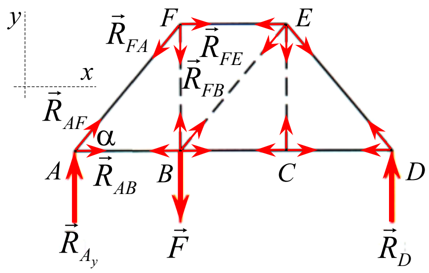
71 pav. Plokščioji santvara

Pusiausviros santvaros atskiri strypai ir mazgai bei visos veikiančios jėgos bus pusiausviros. Visų pirma reikia rasti šarnyrinių atramų A ir D reakcijas (71b pav.), todėl santvara yra nagrinėjama kaip standusis pusiausviras kūnas, kurį veikia išorinė jėga $\vec{F}$ ir nežinomos ryšių reakcijos $\vec{R}_{A_x}$, $\vec{R}_{A_y}$ ir $\vec{R}_D$. Šios jėgos kartu paimtos sudaro plokščiąją bet kaip išdėstytų jėgų sistemą, kuriai galima užrašyti tris nepriklausomas pusiausvyros lygtis (žr. 1.9 sk.):

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = 0, \\ \sum F_{iy} = 0, \\ \sum M_A\left(\vec{F}_i\right) = 0. \end{cases}$$

Išsprendus šią lygčių sistemą rasime reakcijų $\vec{R}_{A_x}$, $\vec{R}_{A_y}$ ir $\vec{R}_D$ reikšmes. Iš pirmos lygties matyti, kad šiame uždavinyje reakcija $\vec{R}_{A_x}$ bus lygi nuliui, todėl schemose jos nevaizduosime.

Toliau yra sudaroma santvarą veikiančių išorinių ir vidinių jėgų diagrama (72 pav.). Dažnai iš karto teisingai pasirinkti vidinių jėgų kryptis yra neįmanoma. Todėl sutarta, kad visos vidinės jėgos iš pradžių yra nukreipiamos nuo mazgo. Jeigu skaičiavimo metu bus gauta neigiama kurios nors vidinės jėgos reikšmė, tai reikš, kad tikroji šios jėgos kryptis yra priešinga pasirinktajai.



72 pav. Išorinių ir vidinių jėgų diagrama

Kiekvieną santvaros mazgą veikiančios jėgos sudaro susikertančių jėgų sistemą. Tokiai jėgų sistemai galima užrašyti tik dvi nepriklausomas pusiausvyros lygtis (žr. 1.9 sk.):

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = 0, \\ \sum F_{iy} = 0. \end{cases}$$

Užrašius dviejų pusiausvyros lygčių sistemą kiekvienam plokščiosios santvaros mazgui galima rasti visų santvaros elementų įrąžas. Tačiau svarbu atkreipti dėmesį į tai, kad sprendimą reikia pradėti nuo mazgo, kuriame yra pridėta *bent viena* žinoma jėga ir yra sujungti *ne daugiau kaip du* elementai su nežinomomis vidinėmis jėgomis. Iš 72 pav. matome, kad šias sąlygas tenkina du nagrinėjamos santvaros mazgai *A* ir *D*, todėl pradėti sprendimą galima nuo bet kurio iš jų.

Užrašysime pusiausvyros sąlygas ir pusiausvyros lygtis mazgui *A* (72 pav.):

$$\vec{R}_A + \vec{R}_{AB} + \vec{R}_{AF} = 0,$$

$$\begin{cases} R_{AB} + R_{AF} \cdot \cos(\alpha) = 0, \\ R_A + R_{AF} \cdot \sin(\alpha) = 0, \end{cases}$$

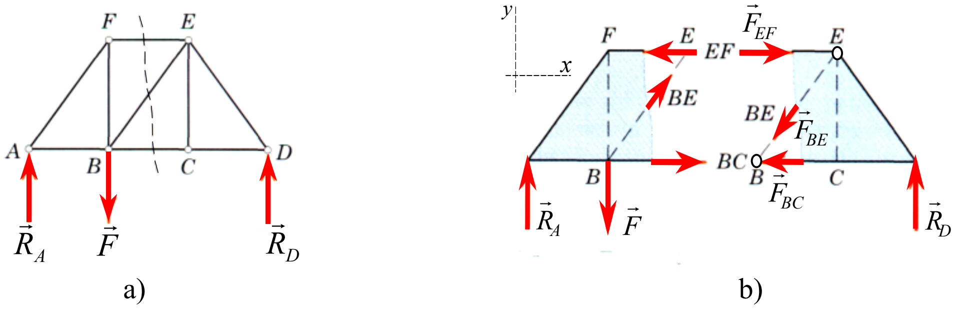
kur $\vec{R}_A$ – atramos *A* reakcija; $\vec{R}_{AB}$ ir $\vec{R}_{AF}$ – santvaros elementų *AB* ir *AF* įrąžos.

Išsprendus mazgo *A* pusiausvyros lygčių sistemą, randame santvaros elementų *AB* ir *AF* įrąžų $\vec{R}_{AB}$ ir $\vec{R}_{AF}$ reikšmes. Kadangi $\vec{R}_{AF} = -\vec{R}_{FA}$, tai galima pereiti prie mazgo *F*, užrašyti dviejų pusiausvyros lygčių sistemą šiam mazgui ir rasti santvaros elementų *FB* ir *FE* įrąžas.

Taip nuosekliai analizuojant mazgus galima rasti visų santvaros elementų įrąžas. Jeigu visų įrąžų reikšmės bus apskaičiuotos teisingai, tai *CD* ir *ED* elementų įrąžos bus ekvivalentiškos atramos reakcijai $\vec{R}_D$.

Pjūvio metodas (*Ritterio* metodas)

Palyginti su *mazgų* metodu, *pjūvio* metodas leidžia rasti beveik bet kurį santvaros elementą veikiančią vidinę jėgą (*įrąžą*), neatliekant nuoseklaus skaičiavimo nuo mazgo prie mazgo. Metodas paremtas tuo, kad iš pusiausviros santvaros išpjauti fragmentai (dalys) (73b pav.) liks pusiausviri, jeigu pjūvio vietoje bus pridėtos atitinkamos jėgos.



73 pav. Pjūvio metodo taikymas plokščiajai santvarai apskaičiuoti

Reikia atkreipti dėmesį į tai, kad pridėtosios fragmentų pusiausvyrai palaikyti jėgos *nėra žinomos*. Yra žinoma tik jų kryptis – būtinai išilgai perpjautų elementų, nes visos vidinės jėgos santvaroje gali veikti tik išilgai jos elementų. Veikiančios išilgai santvaros elementų jėgos yra tų elementų įrąžos.

Pjūvio metodui iliustruoti pasirinksime pusiausvirą plokščiąją santvarą (73a pav.), anksčiau išanalizuotą pagal mazgų metodą. Išorinių atramų *A* ir *D* reakcijų skaičiavimas šiai santvarai pateiktas anksčiau, todėl laikysime, kad išorinės reakcijos mums yra žinomos.

Tarkime, reikia rasti santvaros elementų *BC*, *BE* ir *FE* įrąžas (73a pav.). Atsižvelgdami į tai, kad pjūvio linija gali būti vedama tik per santvaros elementus (*ne per mazgus*), perpjauname santvarą į dvi dalis per mus dominančius *BC*, *BE* ir *FE* elementus (73b pav.). Skaičiavimams galima imti bet kurią iš dviejų dalių, tačiau paprastesnis sprendimas bus gautas tai daliai, kurią veikia mažiau jėgų. Taikant pjūvio metodą atskirai paimta santvaros dalis yra nagrinėjama kaip vientisas pusiausviras kūnas. Todėl į pusiausvyros lygtis reikia įtraukti tik nežinomas jėgas, veikiančias perpjautus elementus ir nagrinėjamą santvaros dalį veikiančias išorines jėgas. Vidinės jėgos, veikiančios fragmento (dalies) elementuose, nėra nagrinėjamos ir į skaičiavimus neįtraukiamos.

Plokščiajai jėgų sistemai galima užrašyti daugiausia tris nepriklausomas pusiausvyros lygtis (žr. 1.5.2 sk.), iš kurių galima rasti tik tris nežinomus dydžius. Todėl darant plokščiosios santvaros pjūvį galima perpjauti daugiausia tris santvaros elementus, kuriems vidinės jėgos nėra žinomos. Sprendžiant galima taikyti bet kurią plokščiosios jėgų sistemos pusiausvyros sąlygų formą (žr. 1.5.2 sk.).

Sprendimas: sprendimui pasirenkame dešiniąją (73b pav.) santvaros dalį. Laisvai pasirenkame perpjautus elementus veikiančių nežinomų jėgų kryptis ir pradedame nagrinėti kiekvieno perpjauto elemento pusiausvyrą:

a) jėgą $\vec{F}_{EF}$ galima rasti iš momentų pusiausvyros lygties. Rašant momentų lygtį reikia stengtis pasirinkti tokį tašką, per kurį eina daugiausia nežinomų jėgų. Matyti, kad jėgų

$\vec{F}_{BE}$ ir $\vec{F}_{BC}$ veikimo tiesės eina per tašką B, todėl užrašius momentų lygtį apie B, šių jėgų galėsime atsikratyti:

$$\sum_{i=1}^{2} M_B\left(\vec{F}_i\right) = 0\,; \qquad M_B\left(\vec{F}_{EF}\right) + M_B\left(\vec{R}_D\right) = 0\,.$$

b) jėgą $\vec{F}_{BE}$ galima rasti suprojektavus visas jėgas į y ašį, nes šiuo atveju jėgų $\vec{F}_{EF}$ ir $\vec{F}_{BC}$ projekcijos bus lygios nuliui:

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{F}_{iy} = 0\,; \qquad \vec{F}_{BE} + \vec{R}_D = 0\,.$$

c) jėgą $\vec{F}_{BC}$ galima rasti iš momentų pusiausvyros lygties, užrašytos apie tašką E:

$$\sum_{i=1}^{2} M_E\left(\vec{F}_i\right) = 0\,; \qquad M_E\left(\vec{F}_{BC}\right) + M_E\left(\vec{R}_D\right) = 0\,.$$

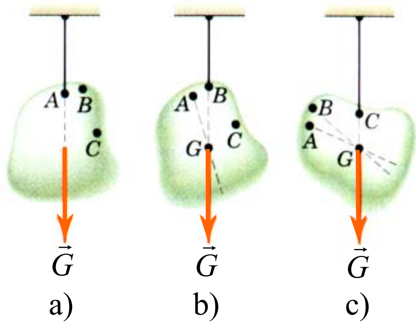
Taškai B ir E, per kuriuos eina nežinomų jėgų veikimo tiesės, yra vadinami *Ritterio* taškais.

Ne visada galima iš karto parinkti teisingą nežinomos jėgos kryptį, tačiau neigiamas atsakymas reikš, kad tikroji jėgos kryptis yra priešinga negu pasirinktoji. Šiuo atveju reikia grįžti prie schemos, pakeisti jėgos kryptį, perrašyti lygtį ir gauti teigiamą atsakymą. Laikantis šios tvarkos bus išvengta atsakymų dviprasmiškumo, o apie jėgos poveikį santvaros elementui – tempimą ar gniuždymą – bus galima spręsti iš sudarytos schemos.

Pjūvių metodas negali būti taikomas plokščioms santvaroms skaičiuoti, kai darant pjūvį tenka perpjauti daugiau negu tris elementus, kurių vidinės jėgos (įrąžos) nėra žinomos. Todėl kai kuriais atvejais, siekiant gauti efektyvesnį sprendimą, mazgų ir pjūvio metodai yra taikomi kartu. Pavyzdžiui, reikia rasti sudėtingos santvaros centre esančio elemento įrąžą, tačiau, darant santvaros pjūvį tenka perpjauti mažiausiai keturis elementus (*gaunami keturi nežinomieji*). Šiuo atveju vieną arba kelias nežinomas jėgas galima rasti pagal mazgų metodą, paskui padaryti pjūvį ir rasti kitas jėgas. Tokia metodų kombinacija gali būti racionalesnė negu atskirų metodų taikymas.

3. SVORIO CENTRAS

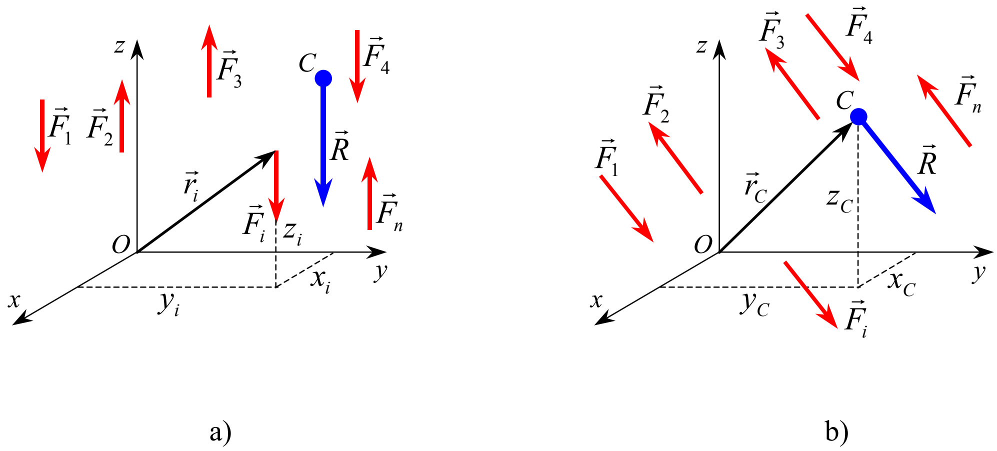
Panagrinėkime masės m trimatį kūną (74a pav.), kabantį ant siūlo, pririšto taške A. Matome, kad kūnas bus pusiausviras, kai siūlo įtempimo jėga bus lygi visas kūno daleles veikiančių sunkio jėgų atstojamajai jėgai $\vec{G}$. Taip pat matome, kad atstojamosios jėgos $\vec{G}$ ir siūlo tempimo jėgos veikimo linijos sutampa. Pakartosime eksperimentą, pririšdami tą patį kūną kituose taškuose, pavyzdžiui, B arba C (74b,c pav.), kaskart punktyru pažymėdami atstojamosios jėgos $\vec{G}$ veikimo liniją. Visais stebimais atvejais (74a,b,c pav.) šios linijos bus tarpusavyje lygiagrečios (nes yra vertikalios) ir kirsis tame pačiame taške (74c pav.). Šis taškas yra vadinamas kūno svorio centru.



74 pav. Kūno svorio centras

Norint tikslesnės analizės visgi tektų įvertinti tai, kad skirtingų kūno dalelių gravitacijos jėgų kryptys šiek tiek skiriasi ir nėra lygiagrečios, nes gravitacijos jėgos eina į žemės centrą. Be to, tektų įvertinti tai, kad kūno dalelės nuo žemės yra nutolusios įvairiais atstumais, todėl gravitacijos jėgų poveikis joms taip pat bus skirtingas. Tai leidžia daryti išvadą, kad unikalaus kūno svorio centro nėra. Ši išvada neturi praktinės naudos tol, kol nagrinėjamų kūnų matmenys yra daug mažesni, palyginti su žemės matmenimis. Todėl toliau kūnus nagrinėsime atsižvelgdami į unikalaus svorio centro egzistavimo koncepciją, paremtą prielaida, kad žemės gravitacijos jėgų laukas yra lygiagretus ir vientisas.

3.1. LYGIAGREČIŲJŲ JĖGŲ CENTRAS



75 pav. Lygiagrečiųjų jėgų sistemos

Nagrinėti pasirinksime lygiagrečiųjų jėgų sistemas, pavaizduotas (75 pav.). Laisvai pasirinktą tašką O (75a pav.) spinduliu-vektoriumi $\vec{r}_i$ sujungus su kurios nors jėgos $\vec{F}_i$ pridėties tašku, galima užrašyti tokią jėgos $\vec{F}_i$ momento apie tašką O išraišką:

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right)=\vec{r}_i\times\vec{F}_i\,. \tag{115}$$

Tačiau erdvinės jėgų sistemos atstojamosios momentas laisvai pasirinkto taško O atžvilgiu yra lygus sistemą sudarančių jėgų momentų apie tą patį tašką vektorinei sumai – *Varinjono* teorema (žr. 1.7.4 sk.). Todėl galima užrašyti, kad:

$$\vec{M}_O\left(\vec{R}\right)=\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right), \tag{116}$$

arba (žr. 75b pav.)

$$\vec{r}_c\times\vec{R}=\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\times\vec{F}_i\,, \tag{117}$$

kur $R=\sum_{i=1}^{n}F_i$ (*algebrinė suma*), nes visos jėgos yra lygiagrečios; i = 1, 2, …, n; n – sistemą sudarančių jėgų skaičius.

Išvedę papildomą vienetinį krypties vektorių $\vec{i}$ (76 pav.), lygiagretų su jėgų sistemos jėgomis, šią išraišką būtų galima užrašyti taip:

$$\vec{r}_c\times\sum_{i=1}^{n}F_i\cdot\vec{i}=\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\times F_i\cdot\vec{i} \tag{118}$$

arba

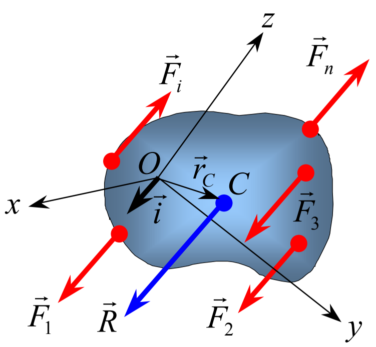
$$\vec{r}_c\cdot\sum_{i=1}^{n}F_i\times\vec{i}=\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\cdot F_i\times\vec{i}\,, \tag{119}$$

todėl

$$\vec{r}_c\cdot\sum_{i=1}^{n}F_i=\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\cdot F_i\,. \tag{120}$$

Gauname:

$$\vec{r}_c=\frac{\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\cdot F_i}{\sum_{i=1}^{n}F_i}\,. \tag{121}$$

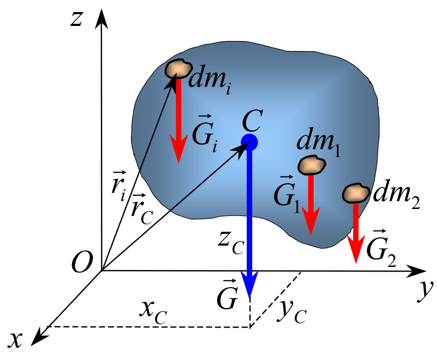


76 pav. Lygiagrečiųjų jėgų centras

Jėgų sistemos atstojamosios $\vec{R}$ pridėties taško C padėtį galima apibrėžti pagal įprastas Dekarto sistemos koordinates, pavyzdžiui, x_C, y_C, z_C. Todėl abi gautosios lygybės pusės yra projektuojamos į koordinačių ašis *x, y* ir *z*. Atsižvelgdami į tai, kad jėgų $\vec{F}_i$ pridėties taškų padėtis gali būti aprašyta koordinatėmis x_i, y_i, z_i, gauname:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}, \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}, \qquad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i \cdot F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}. \tag{122}$$

3.2. KŪNO SVORIO CENTRAS



77 pav. Kūno svorio centras

Norint matematiškai nustatyti masės m materialiojo kūno (77 pav.) svorio centro padėtį reikia suskaidyti jį į n masės dm_1, $dm_2, \ldots$, dm_n dalelių. Kadangi kūno sunkio jėga G yra lygi $\vec{G} = \vec{g} \cdot m$, tai atskirų dalelių sunkio jėgoms galima užrašyti tokias išraiškas:

$$\vec{G}_1 = \vec{g} \cdot dm_1, \quad \vec{G}_2 = \vec{g} \cdot dm_2, \quad \vec{G}_i = \vec{g} \cdot dm_i. \tag{123}$$

Todėl

$$\vec{G} = \sum_{i=1}^{n} \vec{g} \cdot dm_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{G}_i, \tag{124}$$

čia $i = 1, 2, \ldots, n$ – kūno dalelės; n – dalelių skaičius; g – kūno laisvojo kritimo pagreitis.

Iš 77 pav. matyti, jog kūno dalelių sunkio jėgos $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2, \ldots$, $\vec{G}_n$ sudaro lygiagrečiųjų jėgų sistemą, kurios atstojamoji jėga, lygi kūno sunkio jėgai $\vec{G}$, yra pridėta taške *C*. Taikome ankstesnę lygiagrečiųjų jėgų sistemos vektorinę išraišką (121) ir gauname:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \cdot G_i}{\sum_{i=1}^{n} G_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \cdot G_i}{G}. \tag{125}$$

Suprojektavus abi (125) lygybės puses į Dekarto koordinačių sistemos ašis *x, y* ir *z* gaunamos tokios išraiškos:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot G_i}{G}, \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot G_i}{G}, \qquad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i \cdot G_i}{G}. \tag{126}$$

Jeigu didinsime materialiųjų dalelių skaičių iki begalybės, tai kiekvienos dalelės masė artės prie nulio. Nykstamai mažų dydžių suma yra integralas, todėl kūno svorio centro koordinačių bendrosios išraiškos yra užrašomos taip:

$$\vec{r}_c = \frac{\int_V \vec{r}dG}{G}, \qquad x_c = \frac{\int_V xdG}{G}, \qquad y_c = \frac{\int_V ydG}{G}, \qquad z_c = \frac{\int_V zdG}{G}, \tag{127}$$

čia V – kūno tūris.

Atsižvelgdami į tai, kad tankis yra masė kūno tūrio vienete $\rho = \left[\frac{kg}{1m^3}\right]$, gauname, kad elementariosios dalelės masė dm_i yra lygi dalelės tankio ρ_i ir dalelės tūrio V_i sandaugai:

$$dm_i = \rho_i \cdot V_i. \tag{128}$$

Atitinkamai gauname, kad:

$$\vec{G}_i = \vec{g} \cdot dm_i = \vec{g} \cdot \rho_i \cdot V_i. \tag{129}$$

Bendruoju atveju, kai kūno dalelių tankis nėra vienodas, (125) išraiška užrašoma taip:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \cdot G_i}{\sum_{i=1}^{n} G_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \cdot \vec{g} \cdot \rho_i \cdot V_i}{\sum_{i=1}^{n} \vec{g} \cdot \rho_i \cdot V_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \cdot \rho_i \cdot V_i}{\sum_{i=1}^{n} \rho_i \cdot V_i}, \tag{130}$$

arba

$$x_c = \frac{\int x\rho dV}{\int \rho dV}, \qquad y_c = \frac{\int y\rho dV}{\int \rho dV}, \qquad z_c = \frac{\int z\rho dV}{\int \rho dV}. \tag{131}$$

Kai yra kietasis homogeninis kūnas, kurio visų elementariųjų dalelių tankiai ρ_i yra vienodi, gauname:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \cdot \rho \cdot V_i}{\sum_{i=1}^{n} \rho \cdot V_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \cdot V_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \cdot V_i}{V}. \tag{132}$$

Suprojektavę šią išraišką į Dekarto koordinačių sistemos ašis gauname išraiškas, pagal kurias randamas tūrio svorio centras:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot V_i}{V}, \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot V_i}{V}, \qquad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i \cdot V_i}{V}, \tag{133}$$

arba

$$x_c = \frac{\int x dV}{V}, \qquad y_c = \frac{\int y dV}{V}, \qquad z_c = \frac{\int z dV}{V}. \tag{134}$$

čia V – kūno tūris.

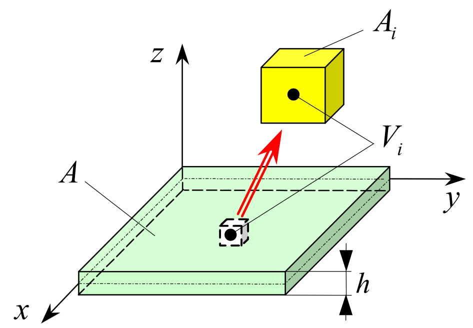
3.3. PLOKŠČIOS FIGŪROS SVORIO CENTRAS

Nagrinėsime ploną homogeninę plokštelę, kurios plotas yra A, o storis – h (78 pav.). Išskyrus elementarų plokštelės tūrį V_i, pagal anksčiau pateiktas išraiškas galima rasti visos plokštelės tūrio centro koordinates. Jeigu elementarusis tūris:

$$V_i = h \cdot A_i, \tag{135}$$

tai plokštelės tūris bus:

$$V = h \cdot A. \tag{136}$$



78 pav. Plokščios figūros svorio centras

Įrašius į anksčiau tūrio svorio centrui rasti taikytas (133) išraiškas V ir V_i reikšmes gaunamos plokščios figūros svorio centro koordinatės:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot h \cdot A_i}{h \cdot A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot A_i}{A}, \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot A_i}{A}, \qquad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i \cdot A_i}{A} = 0. \tag{137}$$

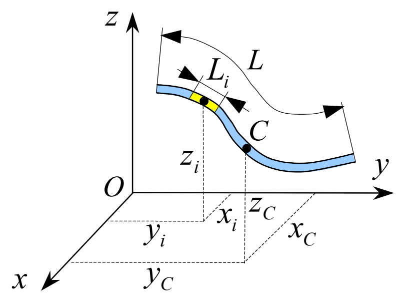
Integralinė forma:

$$x_c = \frac{\int x dA}{A}, \qquad y_c = \frac{\int y dA}{A}, \qquad z_c = \frac{\int z dA}{A} = 0, \tag{138}$$

čia A – plokštelės plotas.

3.4. LINIJOS PAVIDALO KŪNO SVORIO CENTRAS

Nagrinėjamas homogeninis pailgas, ilgio L ir pastovaus skerspjūvio S kūnas, pavyzdžiui, vielos gabalas (79 pav.).



79 pav. Plono strypo svorio centras

Tokio kūno elementarusis tūris V_i:

$$V_i = L_i \cdot S \,, \tag{139}$$

kur L_i – elemento ilgis; S – kūno skerspjūvio plotas.

Viso kūno tūrį V galima apskaičiuoti taip:

$$V = \sum V_i = L \cdot S = S \cdot \sum L_i \,. \tag{140}$$

Įrašius į anksčiau tūrio svorio centrui rasti taikytas (133) išraiškas V ir V_i reikšmes gaunamos išraiškos, taikomos plono strypo svorio centro koordinatėms rasti:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot S \cdot L_i}{S \cdot L} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot L_i}{L}, \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot L_i}{L}, \qquad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i \cdot L_i}{L}. \tag{141}$$

Integralinė forma:

$$x_c = \frac{\int x dL}{L}, \qquad y_c = \frac{\int y dL}{L}, \qquad z_c = \frac{\int z dL}{L}. \tag{142}$$

Pastabos:

- Paprastų simetriškų kūnų, figūrų ir linijų svorio centrai. Jei homogeninis kūnas turi simetrijos centrą, simetrijos plokštumą arba simetrijos ašį, tai jo svorio centras yra jo simetrijos centre, plokštumoje arba ašyje.
- Sudėtingų kūnų svorio centras. Ieškant sudėtingo kūno svorio centro, kūnas suskaidomas į dalis, kurių svorio centrų padėtys žinomos arba lengvai apskaičiuojamos. Paskui pasirenkama patogi koordinačių ašių sistema, apskaičiuojami visų dalių svoriai, nustatomi šių dalių svorio centrai ir tik tada apskaičiuojamas viso sudėtingo kūno svorio centras.

4. TRINTIS

Iki šiol aktyvios ir reakcijų jėgos paviršių kontakto vietose dažniausiai buvo nukreipiamos statmenai lietimosi paviršiams. Ši prielaida palyginti tiksliai nusako lygių paviršių tarpusavio sąveiką ir skaičiuojant leidžia gauti santykinai mažą paklaidą. Tačiau praktikoje pasitaiko nemažai uždavinių, kai nagrinėjant paviršių kontakto vietą tenka atsižvelgti ne tik į normalinių, bet ir į atsirandančių tangentinių jėgų poveikį. Paviršių kontakto vietose atsirandančios tangentinės jėgos yra trinties jėgos.

Trinties jėgos egzistuoja veikiant visiems realiems paviršiams, ypač mašinų mechanizmuose, nepriklausomai nuo to, kaip tiksliai jie yra surinkti bei sutepti. Kaskart esant tendencijai vienam paviršiui judėti kitu paviršiumi matome, kad trinties jėgų kryptis bus priešinga galimai judėjimo krypčiai. Kai kuriais atvejais mes stengiamės sumažinti trinties jėgų poveikį, kitais, atvirkščiai, efektyviau panaudoti trintį, pavyzdžiui, stabdžiuose arba diržinėse pavarose. Mechanizmai arba procesai, kuriuose trintis yra tokia maža, kad jos galima nepaisyti, yra vadinami *idealiaisiais*. Kai trinties nepaisyti negalima, procesas arba mechanizmas yra vadinamas *realiuoju*. Visais realiaisiais atvejais trinties jėgų poveikio rezultatas yra energijos praradimas šilumai išsiskiriant bei kontakto paviršių nusidėvėjimas.

4.1. SAUSOJO SLYDIMO TRINTIS

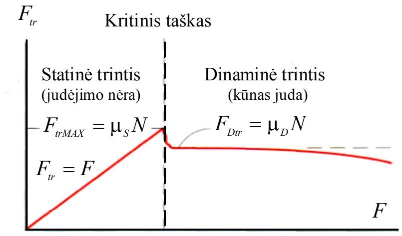
Sausojo slydimo trintis bus tada, kai du vienas kito atžvilgiu slystantys arba turintys tendenciją slysti paviršiai kontakto vietoje nėra sutepti. Trinties jėga sutampa su kontakto vietos liestine ir visada yra nukreipta priešinga judėjimo arba galimo judėjimo krypčiai. Sausojo slydimo trintis dar yra vadinama *Kulono* trintimi (*esminius principus remdamasis eksperimentais 1781 m. suformulavo Kulonas, vėliau 1831–1834 m. – Morin'as*). Nors sausosios trinties teorija iki šiol nėra galutinai suformuluota, toliau aprašytas sausojo slydimo analizinis modelis yra taikomas daugeliui praktikos uždavinių spręsti.

Slydimo trinties mechanizmas

Nagrinėsime masės m kietąjį kūną, esantį horizontaliame paviršiuje (80a pav.). Prie kūno pridedame horizontalią jėgą $\vec{F}$, kurios dydis tolygiai kinta nuo nulio iki reikšmės, pakankamos kad kūnas pradėtų judėti. Jėgos $\vec{F}$ kitimo diagrama pateikta 81 pav.

a) b)

80 pav. Slydimo trinties mechanizmas



81 pav. Jėgos $\vec{F}$ kitimo diagrama

Jeigu pridėjus pradinę jėgą $F \neq 0$ kūnas nepajudėjo, vadinasi, susilietimo paviršiuje veikia tokio pat didumo, bet priešingos krypties atsverianti jėga (80b pav.), kuri yra vadinama trinties jėga:

$$\vec{F}_{tr} = -\vec{F}.$$

Tolygiai didinant pridėtą jėgą $\vec{F}$, didės ir trinties jėga $\vec{F}_{tr}$ (80b pav. ir 81 pav.). Taip gaunama tokia jėgos $\vec{F}$ reikšmė, kai dar truputį ją padidinus, kūnas pradės judėti, t. y. trinties jėga $\vec{F}_{tr}$ pasieks savo maksimalią reikšmę F_{trMAX} ir daugiau nebegalės atsverti jėgos $\vec{F}$ poveikio. Tol, kol veikiamas jėgos $\vec{F}$ kūnas yra ramybės būsenos, slydimo trinties jėga $\vec{F}_{tr}$ yra vadinama statine slydimo trinties jėga.

Veikiant sunkio jėgai $\vec{G}$ (80b pav.), kūno paviršiaus susilietimo su plokštuma vietoje veiks normalinė reakcija $\vec{N}$. Kai trinties jėga turės maksimalią reikšmę F_{trMAX}, jėgų $\vec{N}$ ir $\vec{F}_{trMAX}$ atstojamoji bus lygi:

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_{trMAX}. \tag{143}$$

Eksperimentais nustatyta, kad statinė slydimo trinties jėga veikia kūnų lietimosi plokštumoje ir yra nukreipta priešingai kūno slydimo krypčiai. Jos reikšmė nepriklauso nuo kūnų lietimosi paviršiaus ploto ir yra proporcinga normalinei reakcijai. Todėl galima rašyti, kad:

$$F_{trMAX} = \mu_S N, \tag{144}$$

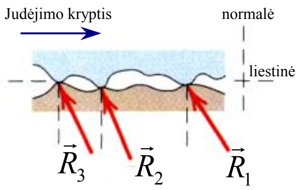
kur μ_S – statinės trinties koeficientas, kurio dydis priklauso nuo besitrinančių kūnų medžiagos ir jų fizinės būklės. Reikia atkreipti dėmesį į tai, kad ši lygtis nusako tik kritinę arba maksimalią statinės slydimo trinties jėgos reikšmę F_{trMAX} (81 pav.) ir netinka nors kiek mažesnėms statinės slydimo trinties jėgos reikšmėms, nes šiais atvejais:

$$F_{tr} < \mu_S N.$$

Iš (80b pav.) matyti, kad

$$tg\alpha = \frac{F_{trMAX}}{N} = \frac{\mu_S N}{N} = \mu_S, \quad (145)$$

kur α – statinės trinties kampas, nusakantis atstojamosios $\vec{R}$ kryptį.



82 pav. Reakcijos realiųjų paviršių kontakto vietose

Nagrinėdami realiųjų paviršių (82 pav.) sąveiką matome, kad reakcijų $\vec{R}_i$ kryptys ir atitinkamai kampo α (80 pav.) dydis priklauso nuo kontakto paviršių šiurkštumo bei geometrinių savybių. Atsižvelgiant į tai, kad

$$tg\alpha = \mu_S, \quad (146)$$

galima daryti išvadą, jog trinties koeficientas įvertina kontaktuojančių paviršių poros šiurkštumą bei geometrines abiejų kontūrų savybes.

Kai kūnas pradeda judėti yra kalbama apie dinaminę trintį, o slydimo trinties jėga yra vadinama dinamine slydimo trinties jėga (81 pav.). Dinaminė slydimo trinties jėga $\vec{F}_{Dtr}$ yra mažesnė už maksimalią statinės trinties jėgą. Yra nustatyta, kad $\vec{F}_{Dtr}$ veikia besitrinančių kūnų lietimosi plokštumoje priešinga slydimui kryptimi ir yra proporcinga normalinei reakcijai:

$$F_{Dtr} = \mu_D N, \quad (147)$$

kur μ_D – dinaminės trinties koeficientas. Šis koeficientas priklauso nuo judėjimo greičio, kontakto paviršių apdirbimo tikslumo ir yra mažesnis už statinį trinties koeficientą.

Galimi sausojo slydimo trinties atvejai (žr. 81 pav.):

1. $F < (F_{trMAX} = \mu_S N)$ – veikiančios jėgos $\vec{F}$ reikšmė yra mažesnė negu trinties jėgos maksimali reikšmė F_{trMAX}. Šiuo atveju laikoma, kad kūnas yra ramybės būsenos, dėl trinties jėgos įtakos;
2. $F = (F_{trMAX} = \mu_S N)$ – veikiančios jėgos $\vec{F}$ reikšmė yra lygi trinties jėgos maksimaliai reikšmei F_{trMAX}. Kūnas yra ribinės pusiausvyros būsenos, nežymiai padidėjus jėgai $\vec{F}$, kūnas pradės judėti;

3. $F > \left(F_{trMAX} = \mu_S N\right)$ – veikiančios jėgos $\vec{F}$ reikšmė yra didesnė negu trinties jėgos maksimali reikšmė F_{trMAX} (81 pav.). Kontakto paviršiai negali priešintis didesnei kaip F_{trMAX} jėgai, todėl kūnas juda. Šiuo atveju trinties jėga turi būti apskaičiuojama taip:

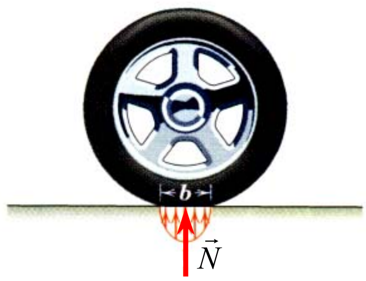
$$F_{Dtr} = \mu_D N .$$

Išnagrinėtasis analizinis slydimo trinties modelis gali būti taikomas visais sausojo slydimo atvejais. Tipinės trinties koeficientų reikšmės, pateiktos priede B, gali būti naudojamos akademiniams trinties uždaviniams spręsti. Realiems uždaviniams, norint kuo tiksliau įvertinti trinties įtaką ir rasti atitinkamą trinties koeficiento reikšmę, tenka atlikti natūrinius bandymus.

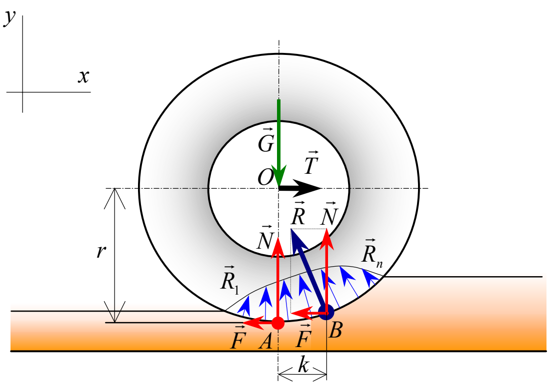
Tam, kad būtų sumažinta slydimo trinties įtaka, kontaktuojantys paviršiai (žr. 82 pav.) yra mechaniškai apdorojami – šlifuojami bei, kad būtų padidintas tarpelis tarp besitrinančių paviršių ir užpildyti nelygumai – įvairiais būdais sutepami.

4.2. RIEDĖJIMO TRINTIS

Pasipriešinimas, kuris atsiranda vienam kūnui riedant kito kūno paviršiumi, yra vadinamas riedėjimo trintimi. Nagrinėsime dviejų realių paviršių kontakto vietą (83–84 pav.).



83 pav. Pagrindo reakcijos kūnui esant pusiausviram



84 pav. Pagrindo reakcijos kūnui riedant

Iš 83 ir 84 pav. matyti, kad pusiausviro ir riedančio kūnų reakcijos kontakto vietoje yra skirtingos. Kai kūnas yra pusiausviras (83 pav.), pagrindo reakcijų atstojamosios $\vec{N}$ veikimo tiesė sutaps su sunkio jėgos $\vec{G}$ veikimo tiese, o jėgos $\vec{N}$ ir $\vec{G}$ bus vienodo dydžio. Kai kūnas rieda (84 pav.), pagrindo reakcijų atstojamosios jėgos $\vec{R}$ kryptis bei pridėties taškas bus kitokie.

84 pav. pavaizduota, kad veikiant traukos jėgai $\vec{T}$, riedančio kūno ir pagrindo deformuotų paviršių susilietimo plotelyje atsiranda reakcijos $\vec{R}_1, \vec{R}_2, ..., \vec{R}_n$, kurių atstojamoji $\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 + .., + \vec{R}_n$ bus pridėta taške *B*. Išskaidome atstojamąją jėgą $\vec{R}$ į dvi dedamąsias – vertikaliąją $\vec{N}$ ir horizontaliąją $\vec{F}$. Matome, kad normalinės reakcijos $\vec{N}$ veikimo tiesė nesutampa su sunkio jėgos $\vec{G}$ veikimo tiese.

Norėdami dedamąją $\vec{N}$ perkelti į tašką *A*, pagal Puanso teoremą turime pridėti papildomą jėgų porą $(\vec{N}, \vec{N}')$ su petimi *k*. Ši papildoma jėgų pora yra vadinama riedėjimo trinties jėgų pora, jos momento reikšmė lygi:

$$M(\vec{N}, \vec{N}') = k \cdot N . \tag{148}$$

Perkeliant jėgą $\vec{F}$ į tašką *A* matyti, kad papildomos jėgų poros $(\vec{F}, \vec{F}')$ petys bus daug mažesnis už jėgų poros $(\vec{N}, \vec{N}')$ petį *k*. Vadinasi, daug mažesnis bus ir šios jėgų poros momentas, todėl jo galima nepaisyti. Jėga $\vec{F}$ yra statinė slydimo trinties jėga $\vec{F}_{tr}$ (žr. 80b pav.):

$$\vec{F} = \vec{F}_{tr} .$$

Riedančio kūno pusiausvyros sąlygų analizė

Didinant traukos jėgą $\vec{T}$ didės ir slydimo trinties jėga $\vec{F}$ (84 pav.). Kūnas liks pusiausviras tol, kol jėga $\vec{F}$ atsvers traukos jėgos $\vec{T}$ poveikį:

$$T \le F , \quad \text{čia } F = F_{trMAX} = \mu_S N . \tag{149}$$

Kartu kūną veikia du momentai (84 pav.): traukos jėgos $\vec{T}$ momentas apie tašką *A* $M_A(\vec{T}) = r \cdot T$ ir riedėjimo trinties jėgų poros $(\vec{N}, \vec{N}')$ momentas $M(\vec{N}, \vec{N}') = k \cdot N$. Kūnas bus pusiausviras tol, kol traukos jėgos $\vec{T}$ momentas apie tašką *A* neviršys riedėjimo trinties jėgų poros $(\vec{N}, \vec{N}')$ momento maksimalios reikšmės:

$$M_A(\vec{T}) \le M(\vec{N}, \vec{N}'). \tag{150}$$

Remiantis eksperimentais nustatyti tokie riedėjimo trinties dėsniai:

1. Maksimalus riedėjimo trinties jėgų poros $(\vec{N}, \vec{N}')$ momentas nepriklauso nuo riedančio cilindro spindulio ilgio ir yra proporcingas normalinei reakcijai:

$$M(\vec{N}, \vec{N}') = k \cdot N , \tag{151}$$

   čia k – riedėjimo trinties koeficientas ir kartu riedėjimo trinties jėgų poros petys.
2. Riedėjimo trinties koeficientas *k* priklauso nuo riedančio cilindro ir riedėjimo paviršiaus medžiagų fizikinių charakteristikų.

LITERATŪRA

1. Paliūnas, V. Teorinė mechanika. Vilnius: Žuvėdra, 1997. 482 p.
2. Targas, S. Trumpas teorinės mechanikos kursas. Vilnius: Mintis, 1970. 476 p.
3. Hibbler, R. C. Engineering Mechanics: Statics and Dynamics. 6th ed. Macmillan Publishing Co. New York, 1992. 588 p.
4. Meriam, J. L.; Kraige, L. G. Engineering Mechanics, Statics. 4th ed. John Wiley& Sons, Inc. Canada, 1998. 526 p.
5. Яблонский, А. А.; Никифорова, В. М. Курс теоретической механики. Часть 1. Москва: Высшая школа, 1966. 438 с.
6. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики. Москва: Наука, 1968. 480 с.
7. Budrys, A. ir kt. Teorinė mechanika. Statika. Paskaitų konspektas. Vilnius, 1973. 212 p.

PRIEDAI

1 PRIEDAS. SI SISTEMOS MATAVIMO VIENETAI, NAUDOJAMI MECHANIKOJE

Dydis	vienetas	SI simboliai	žymėjimas
Ilgis	*metras*	m	*L, l, R, r, h, d*
Plotas	$metras^2$	m^2	A, S
Tūris	$metras^3$	m^3	V
Kampas	*laipsniai*	^{0}	α, β, γ
Kampas	*radianai*	–	α, β, γ
Masė	*kilogramas*	kg	m
Tankis	$kilogramas / metras^3$	$\frac{kg}{m^3}$	ρ
Jėga	*niutonas*	N	$\vec{F}$
Jėgos momentas	$niutonas \cdot metras$	$N \cdot m$	$M_O(\vec{F})$
Laikas	*sekundė*	s	t
Linijinis greitis	*metras / sekundė*	$\frac{m}{s}$	$\vec{V}$
Kampinis greitis	*radianas / sekundė*	$\frac{rad}{s} = s^{-1}$	ω
Linijinis pagreitis	*metras* / sekundė^2	$\frac{m}{s^2}$	$\vec{a}$
Kampinis pagreitis	*radianas / sekundė*^{2}	$\frac{rad}{s^2} = s^{-2}$	ε
Linijinis impulsas	$niutonas \cdot sekundė$	$N \cdot s$	$\vec{S}$
Kampinis impulsas	$niutonas \cdot metras \cdot$ sekundė	$N \cdot m \cdot s$	s
Masės inercijos momentas	$kilogramas \cdot metras^2$	$kg \cdot m^2$	I
Darbas, energija	*džaulis*	$J\,(= N \cdot m)$	A
Dažnis	*hercas*	$Hz\;(= \frac{1}{s})$	ν

2 PRIEDAS. TRINTIES KOEFICIENTŲ TIPINĖS REIKŠMĖS

Lentelėje pateiktos trinties koeficientų būdingos reikšmės esant įprastoms paviršių darbo sąlygoms. Tikslios trinties koeficientų reikšmės yra nustatomos natūrinių bandymų būdu. Todėl, priklausomai nuo kontaktuojančių paviršių mechaninio apdirbimo kokybės, švarumo, tepimo, prispaudimo bei judėjimo greičio, galimas 25–100 % ir didesnis išmatuotų ir lentelėje pateiktų trinties koeficientų reikšmių skirtumas.

Kontakto paviršiai	statinis, μ_S	dinaminis, μ_D
Plienas ir plienas (sausi)	0,6	0,4
Plienas ir plienas (sutepti)	0,1	0,05
Teflonas ir plienas	0,04	0,04
Plienas ir babitas (sausi)	0,4	0,3
Plienas ir babitas (sutepti)	0,1	0,07
Varis ir plienas (sausi)	0,5	0,4
Stabdžių kaladėlės ir geležis	0,4	0,3
Guma ir glotnus metalo paviršius	0,9	0,8
Varinis lynas ir geležinis skriemulys (sausi)	0,2	0,15
Kanapių lynas ir metalas	0,3	0,2
Metalas ir ledas	-	0,02

Edvard Michnevič, Leonid Syrus, Rimantas Belevičius

TEORINĖ MECHANIKA. STATIKA
Mokomoji knyga

Redagavo N. Žuvininkaitė

SL 136. 2003 10 30. 10,5 apsk. leid. l. Tiražas 1500 egz.
Leido Vilniaus Gedimino technikos universiteto leidykla „Technika“, Saulėtekio al. 11, LT-2040 Vilnius
Spausdino UAB „Sapnų sala“, S. Moniuškos g. 21–10, LT-2004 Vilnius