VILNIAUS GEDIMINO TECHNIKOS UNIVERSITETAS

TEORINĖS MECHANIKOS KATEDRA

Leonidas Syrus, Petras Baradokas, Edvard Michnevič, Algirdas Čiučelis

TEORINĖ MECHANIKA

KINEMATIKA

Mokomoji knyga

Vilnius „Technika“ 2005

UDK 531 (075.8)
Te 89

L. Syrus, P. Baradokas, E. Michnevič, A. Čiučelis. Teorinė mechanika. Kinematika. Mokomoji knyga. V.: Technika, 2005. 96 p.

Knygoje išdėstyta klasikinės mechanikos teorijos dalis – kinematika. Pateikta kinematikoje nagrinėjamų klausimų klasifikacija, išnagrinėti judančių objektų judėjimo apibrėžimo būdai, judėjimo lygčių sudarymo principai. Aprašytos judančių objektų kinematinės charakteristikos, pateikti jų sprendimo metodai.

Mokomoji knyga parašyta remiantis teorinės mechanikos kurso programa, patvirtinta VGTU mechanikos ir statybos specialybių pagrindinių studijų studentams. Rekomenduojama pagrindinių, vakarinių bei neakivaizdinių studijų studentams, siekiantiems savarankiškai susipažinti su kinematikos teorijos pagrindais.

Leidinį rekomendavo Fundamentinių mokslų fakulteto studijų komitetas

Recenzavo prof. habil. dr. J. Atkočiūnas ir doc. dr.V. Turla

VGTU leidyklos „Technika“ 801 mokomosios metodinės literatūros knyga

ISBN 9986-05-906-2
© L. Syrus, P. Baradokas, E. Michnevič, A. Čiučelis, 2005
© VGTU leidykla „Technika“, 2005

TURINYS

ĮVADAS 5

1. TAŠKO KINEMATIKA 6
1.1. Vektorinis judėjimo aprašymo būdas 6
1.2. Koordinatinis judėjimo aprašymo būdas 8
1.3. Natūralusis judėjimo aprašymo būdas 13
1.4. Ryšis tarp judėjimo apibrėžimo būdų 16

2. STANDŽIOJO KŪNO KINEMATIKA 17
2.1. Slenkamasis kūno judėjimas 18
2.2. Kūno sukimasis apie nejudamąją ašį 20
2.2.1. Sukamojo judėjimo dėsnis 20
2.2.2. Kūno sukimosi greitis 21
2.2.3. Kūno sukimosi pagreitis 21
2.2.4. Tolygus ir tolygiai kintantis sukimasis 22
2.2.5. Besisukančio kūno taškų greičiai ir pagreičiai 24
2.2.6. Besisukančio kūno kinematinių charakteristikų vektorinės priklausomybės 26
2.3. Plokščiasis kūno judėjimas 29
2.3.1. Plokščiojo judėjimo lygtys 30
2.3.2. Plokščiosios figūros taškų greičių vektorinė priklausomybė 33
2.3.3. Kūno taškų greičių analizinis skaičiavimas 33
2.3.4. Momentinis greičių centras 35
2.3.5. Taškų greičių skaičiavimas naudojant momentinį greičių centrą 37
2.3.6. Greičių planas 40
2.3.7. Taškų greičių skaičiavimas naudojant greičių planą 42
2.3.8. Plokščiosios figūros taškų pagreičiai 44
2.3.9. Taškų pagreičių skaičiavimas naudojant momentinį pagreičių centrą 46
2.3.10. Taškų pagreičių skaičiavimas naudojant pagreičių planą 48
2.4. Viename taške įtvirtinto kūno judėjimas 52
2.4.1. Kūno judėjimo lygtys 52
2.4.2. Kūno sferinio judėjimo kinematinės charakteristikos 53
2.4.3. Viename taške įtvirtinto kūno taškų greičiai ir pagreičiai 55
2.5. Laisvasis kūno judėjimas 57

3. SUDĖTINIS TAŠKO JUDĖJIMAS 59
3.1. Taško greičių sudėties teorema 60
3.2. Taško pagreičių sudėties teorema (Koriolio teorema) 62

4. SUDĖTINIS KŪNŲ JUDĖJIMAS 64
4.1. Slinkimų sudėtis 64
4.2. Sukimosi sudėtis 65

4.2.1. Sukimosi sudėtis, kai ašys lygiagrečios 65
4.2.2. Sukimosi sudėtis, kai sukimosi ašys susikerta 69
4.3. Slinkimo ir sukimosi sudėtis 70

5. KŪNŲ SISTEMOS KINEMATIKA 73
5.1. Kūnų sistemos ryšiai 74
5.2. Kūnų sistemos struktūra 74
5.3. Kūnų sistemos laisvumo laipsnis 75
5.4. Kinematinės analizės tikslai ir metodai 76
5.4.1. Judesio keitimas ir perdavimas 77
5.4.2. Sistemos grandžių ir taškų greičiai bei pagreičiai 82

LITERATŪRA 88

PRIEDAI 89
1 priedas. Pagrindinės kinematikos formulės 89

ĮVADAS

Kinematika yra mechanikos dalis, kurioje nagrinėjama materialiųjų objektų – standžiųjų kūnų judėjimo geometrija nepriklausomai nuo jų inertiškumo ir veikiančių jėgų. Nagrinėjant kūnų judėjimą, kinematika gali atsakyti į klausimą, kaip kūnas juda, kur yra konkrečiu laiko momentu.

Mechanikoje *judėjimu* laikomas kūnų padėties kitimas per laiką kitų kūnų atžvilgiu. Kūnų judėjimas nagrinėjamas trimatėje erdvėje, kurioje nustatoma vieta, iš kur stebimas judėjimas, t. y. imama *atskaitos sistema*. Jeigu visų kūno taškų koordinatės atskaitos sistemos atžvilgiu laikui bėgant nesikeičia, kūnas šios sistemos atžvilgiu nejuda. Jei kūno taškų koordinatės laikui bėgant kinta, vadinasi, kūnas juda šios sistemos atžvilgiu.

Laiko funkcijų visuma, apibrėžianti kūno padėtį erdvėje bet kuriuo laiko momentu, vadinama *judėjimo dėsniu.*

Judančio kūno pėdsakas erdvėje vadinamas *judėjimo trajektorija*. Trajektorija yra nenutrūkstama linija.

Laikas mechanikoje visada teigiamas, tolygiai kintantis dydis. Visose atskaitos sistemose laikas slenka vienodai. Kinematikos uždaviniuose laikas t yra nepriklausomas kintamasis (argumentas), todėl visos judėjimo charakteristikos (kūno padėtis, greitis ir pagreitis) gali būti nagrinėjamos kaip matematinės laiko funkcijos.

Kinematikoje vyrauja dviejų rūšių uždaviniai:

pirmajame kinematikos uždavinyje nustatomi kūno judėjimo dėsniai, t. y. kūno padėtį aprašančių laiko funkcijų visuma;

antrajame kinematikos uždavinyje, remiantis šiais judėjimo dėsniais, apskaičiuojamos viso kūno arba atskirų kūno taškų judėjimo kinematinės charakteristikos (trajektorijos, greičiai, pagreičiai ir t. t.).

Tais atvejais, kai kūno matmenų galima nepaisyti, kūnas pakeičiamas materialiuoju tašku. Taigi mechaninį judėjimą pradedame nagrinėti nuo taško kinematikos, vėliau pereinama prie standžiojo kūno ir kūnų sistemos kinematikos.

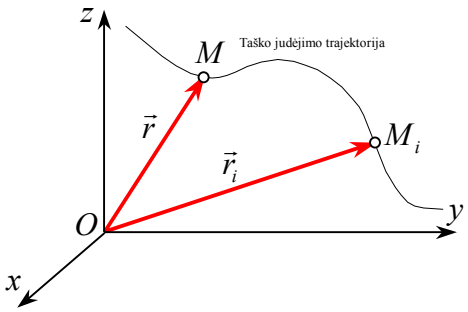
Kinematikoje taikoma SI vienetų sistema: ilgiai matuojami metrais, laikas – sekundėmis. Laikas skaičiuojamas nuo pradinio momento, kai $t = 0$ sekundžių.

1. TAŠKO KINEMATIKA

Taško judėjimo funkcijos matematiniu požiūriu gali būti sudarytos taikant vektorinį, koordinatinį arba natūralųjį judėjimo aprašymo būdą.

1.1. VEKTORINIS JUDĖJIMO APRAŠYMO BŪDAS

Judančio erdvėje taško padėtis nejudamosios atskaitos sistemos *Oxyz* atžvilgiu gali būti nustatyta pagal vektoriaus $\vec{r}$ padėtį (1 pav.).



1 pav. Taško padėties vektoriai

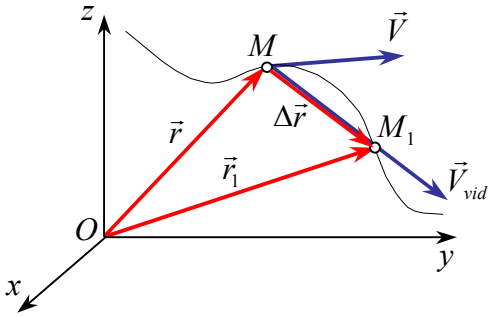
Laikui bėgant taškas keičia savo padėtį erdvėje, keičiasi padėties vektorius $\vec{r}$. Vektoriaus $\vec{r}$ kitimą išreiškę laiko funkcija, turėsime tokio pavidalo taško judėjimo dėsnį:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \tag{1}$$

Į funkciją (1) įrašę keletą konkrečių laiko t_i reikšmių, gausime laiko momentus, atitinkančius taško padėties vektorius $\vec{r}_i$. Sujungę šių vektorių galus sklandžiąja kreive, turėsime taško judėjimo trajektoriją. Funkcija (1) turi būti be trūkių, vienareikšmė ir du kartus diferencijuojama laiko atžvilgiu.

Vektorinis taško judėjimo aprašymo būdas taikomas teoriškai nagrinėjant taško kinematiką.

Apskaičiuosime taško kinematines charakteristikas – greitį ir pagreitį. Tarkime, kad taško padėties vektoriaus $\vec{r}$ funkcija $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Laiko momentu t taškas yra padėtyje M, kurią nusako vektorius $\vec{r}$ (2 pav.).



2 pav. Judančio taško greičiai

Praėjus laiko tarpui $\Delta t = (t_1 - t)$, taškas pereina į padėtį M_1, jo padėties vektorius $\vec{r}_1$. Matome, kad vektorius $\vec{r}$ gavo prieaugį $\Delta\vec{r}$, t. y.:

$$\vec{r}_1 = \vec{r} + \Delta\vec{r}.$$

Santykis vektoriaus prieaugio $\Delta\vec{r}$ su laiko tarpu Δt, per kurį įvyko šis prieaugis, rodo padėties vektoriaus kitimo vidutinį greitį $\vec{V}_{vid}$, kuris nukreiptas iš taško M į tašką M_1, t. y. judėjimo kryptimi (2 pav.):

$$\vec{V}_{vid} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Kuo mažesnis laiko tarpas Δt, tuo tikslesnė vidutinio greičio reikšmė ir tuo tiksliau ši charakteristika apibūdins taško judėjimą.

Taško greičiu laiko momentu t vadiname vektorinį dydį $\vec{V}$, prie kurio artėja vidutinis greitis $\vec{V}_{vid}$, kai laiko tarpas Δt artėja prie nulio:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{V}_{vid} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t},$$

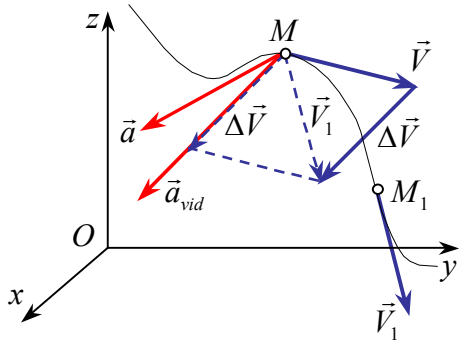
arba

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \qquad (2)$$

t. y. taško greičio vektorius tam tikru laiko momentu yra pirmoji padėties vektoriaus išvestinė laiko atžvilgiu, pridėtas taške M ir nukreiptas judėjimo kryptimi trajektorijos liestine.

Taško greitis nusako taško padėties vektoriaus kitimo tempą. Greičio dimensija – $\left[\frac{\text{ilgis}}{\text{laikas}}\right]$ arba $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$.

Pagreičiui nustatyti nagrinėsime dvi taško padėtis M ir M_1 (3 pav.)



3 pav. Judančio taško pagreičiai

Padėtyje M taškas turėjo greitį $\vec{V}$, kuris nukreiptas judėjimo kryptimi trajektorijos liestine. Praėjus laiko tarpui Δt, taškas pereina į padėtį M_1, jo greitis tampa $\vec{V}_1$.

Perkėlę greitį $\vec{V}_1$ į tašką *M*, matome, kad greitis $\vec{V}$ gavo prieaugį $\Delta\vec{V}$, t. y.

$$\vec{V}_1 = \vec{V} + \Delta\vec{V}.$$

Greičio prieaugio $\Delta\vec{V}$ santykis su laiko tarpu Δt, per kurį įvyko šis prieaugis, rodo greičio kitimą per šį laiko tarpą ir vadinamas vidutiniu pagreičiu $\vec{a}_{vid}$. Jis nukreiptas iš taško *M* vektoriumi $\Delta\vec{V}$ į trajektorijos vidų (3 pav.):

$$\vec{a}_{vid} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}.$$

Kuo mažesnis laiko tarpas Δt, tuo tikslesnė vidutinio pagreičio reikšmė ir tuo tiksliau ši charakteristika apibūdina taško judėjimą.

Taško pagreičiu laiko momentu *t* vadiname vektorinį dydį $\vec{a}$, prie kurio artėja vidutinis pagreitis $\vec{a}_{vid}$, kai laiko tarpas Δt artėja prie nulio:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_{vid} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t},$$

arba

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}.$$

Įvertinę tai, kad pirmoji padėties vektoriaus išvestinė $\frac{d\vec{r}}{dt}$ yra taško greitis $\vec{V}$, gauname

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \qquad (3)$$

t. y. taško pagreičio vektorius tam tikru laiko momentu yra greičio vektoriaus pirmoji išvestinė arba padėties vektoriaus antroji išvestinė laiko atžvilgiu. Taško pagreitis yra pridėtas prie judančio taško ir nukreiptas į trajektorijos vidų.

Pagreitis apibūdina greičio vektoriaus kitimą. Jo matas yra greičio pokytis per sekundę, o matavimo vienetas atitinka pagreitį tokio taško, kurio greitis kinta greičio vienetu per sekundę, t. y. $1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ (šį užrašą reikia skaityti taip: vienas metras per sekundę kas sekundę, o ne vienas metras per sekundę kvadrate). Pagreičio dimensija – $\left[\frac{\text{ilgis}}{\text{laikas}^2}\right]$, arba $\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]$.

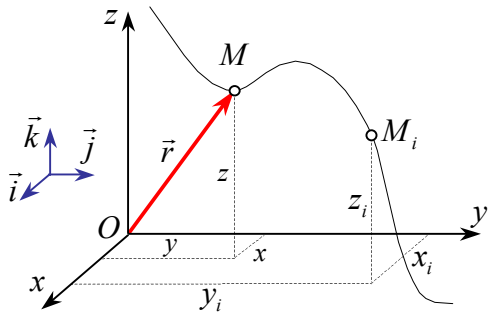
1.2. KOORDINATINIS JUDĖJIMO APRAŠYMO BŪDAS

Taško padėtis erdvėje bus apibrėžta, jei bus žinomos funkcijos:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases} \tag{4}$$

čia *x, y, z* – laiko atžvilgiu kintamosios taško koordinatės.

Norėdami rasti taško padėtį laiko momentu t_i, įrašysime šią laiko t_i reikšmę į formules (4) ir gausime taško koordinates x_i, y_i, z_i, pagal kurias pasirinktoje atskaitos sistemoje rasime taško padėtį M_i (4 pav.).



4 pav. Judančio taško koordinatės

Ieškant trajektorijos, reikia į taško judėjimo lygtis (4) įrašyti keletą laiko *t* reikšmių ir rasti taško *M* atitinkamas padėtis. Sujungę taškus *M* sklandžiąja kreive, gausime taško judėjimo trajektoriją. Matematinės priklausomybės (4) turi būti be trūkių, vienareikšmės ir diferencijuojamos laiko atžvilgiu.

Kai taškas juda plokštumoje, judėjimui aprašyti pakanka dviejų judėjimo lygčių:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases} \tag{4a}$$

Judėjimo lygtys (4) ir (4 a) kartu yra parametrinės (parametras yra laikas *t*) trajektorijos lygtys. Šiose lygtyse eliminavus parametrą *t*, galima gauti kanonines trajektorijos lygtis. Taško judesio analizei patogesnės yra parametrinės lygtys. Jos rodo taško padėtį ir judėjimo kryptį, ko nematyti iš kanoninių lygčių.

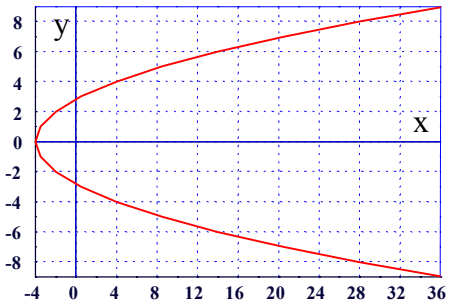
Pavyzdžiui, taško judėjimas plokštumoje aprašytas lygtimis:

$$\begin{cases} x = 2t^2 - 4, \\ y = 2t. \end{cases}$$

Kanoninė trajektorijos lygtis gaunama taip: iš antrosios lygties laiko reikšmę $t = \frac{y}{2}$ įrašę į pirmąją, gausime:

$$x = 0{,}5y^2 - 4\,.$$

Gautoji kanoninė trajektorijos lygtis atitinka parabolę (5 pav.).

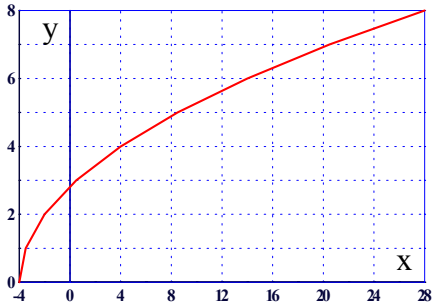


5 pav. Parabolė

Tačiau šį trajektorija (5 pav.) neatspindi taško tikrojo judėjimo. Skaičiuojant nuo pradinės reikšmės $t_0 = 0$, gaunamos tokios x ir y koordinatės:

$t_0 = 0$	$x_0 = -4$	$y_0 = 0$
$t_1 = 1s$	$x_1 = -2$	$y_1 = 2$
$t_2 = 2s$	$x_2 = 4$	$y_2 = 4$

Tikrasis taško judėjimo trajektorijos atvaizdas parodytas 6 pav.



6 pav. Taško judėjimo trajektorija

Matome, kad apatinė parabolės atšaka (5 pav.) nėra taško judėjimo trajektorija. Nustatysime taško kinematines charakteristikas, kai judėjimas pateiktas koordinatiniu būdu. Tegul taško judėjimas pateiktas erdvėje koordinatiniu būdu:

$$x = x(t),$$
$$y = y(t),$$
$$z = z(t).$$

Tarp taško M padėties aprašymo koordinatiniu ir vektoriniu būdu, remdamiesi vektorine algebra, gauname priklausomybę:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \tag{5}$$

Užrašysime pirmąją išvestinę:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}.$$

Pirmoji padėties vektoriaus išvestinė laiko atžvilgiu yra taško greitis $\vec{V}$. Taigi gavome

$$\vec{V} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}. \tag{6}$$

Greitis, kaip vektorius, gali būti išreikštas komponentėmis koordinačių ašių atžvilgiu:

$$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}. \tag{7}$$

Turime vektorinį dydį $\vec{V}$, pateiktą dviem būdais – (6) ir (7). Jeigu palyginsime koeficientus esant vienodiems ortams, gausime:

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{dx}{dt}, \\ V_y &= \frac{dy}{dt}, \\ V_z &= \frac{dz}{dt}. \end{aligned} \tag{8}$$

Galima padaryti išvadą: jeigu taško judėjimas pateiktas koordinatiniu būdu (4), tai, paėmę šių lygčių pirmąsias išvestines laiko atžvilgiu, gausime taško greičio vektoriaus projekcijas į koordinatines ašis. Greičio vektoriaus modulis randamas iš formulės:

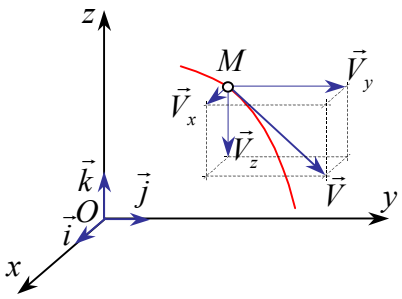
$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}.$$

Greičio vektoriaus krypties kosinusai randami iš formulių:

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{V_x}{V}, \\ \cos\beta &= \frac{V_y}{V}, \\ \cos\lambda &= \frac{V_z}{V}. \end{aligned}$$

čia α, β, γ – greičio vektoriaus kampai su atitinkamomis koordinačių ašimis.

Sprendimas yra teisingas, jeigu gautas pagal apskaičiuotas greičio projekcijas greičio vektorius bus nukreiptas pagal liestinę trajektorijai judėjimo kryptimi (7 pav.).



7 pav. Judančio taško greitis

Jeigu taškas juda plokštumoje, tai, parinkę koordinačių ašis šioje plokštumoje, turėsime dvi judėjimo lygtis, iš kurių rasime dvi greičio vektoriaus projekcijas.

Taško pagreitį gausime greičio vektorių (7) diferencijavę laiko atžvilgiu:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV_x}{dt}\vec{i} + \frac{dV_y}{dt}\vec{j} + \frac{dV_z}{dt}\vec{k}.$$

Įrašę greičio išraišką, (6), gausime:

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}. \qquad (9)$$

Pagreitis, kaip vektorinis dydis, gali būti išreikštas savo komponentėmis koordinačių ašių atžvilgiu:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}. \qquad (10)$$

Matome, kad tas pats vektorius $\vec{a}$ yra išskleistas dviem būdais – (9) ir (10). Palyginę koeficientus esant vienodiems ortams, turėsime

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \\ a_y &= \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \\ a_z &= \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned} \qquad (11)$$

Išvada. Kai taško judėjimas pateiktas koordinatiniu būdu, paėmę judėjimo dėsnio antrąsias išvestines laiko atžvilgiu, gauname taško pagreičio vektoriaus projekcijas. Pagreičio vektoriaus modulis apskaičiuojamas iš formulės:

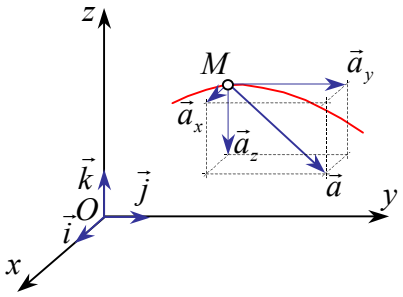
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Pagreičio vektoriaus krypties kosinusai randami iš formulių:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a},$$
$$\cos\beta = \frac{a_y}{a},$$
$$\cos\lambda = \frac{a_z}{a}.$$

čia α, β, γ – pagreičio vektoriaus kampai su atitinkamomis koordinačių ašimis.

Sprendimas yra teisingas, jeigu gautas pagal apskaičiuotas pagreičio projekcijas pagreičio vektorius bus nukreiptas į trajektorijos vidų (8 pav.).

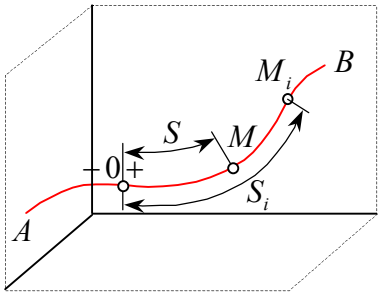


8 pav. Judančio taško pagreitis

Jeigu taškas juda plokštumoje, tai turėsime tik dvi pagreičio projekcijas, ir pagreičio vektorius bus šioje plokštumoje.

1.3. NATŪRALUSIS JUDĖJIMO APRAŠYMO BŪDAS

Kai iš anksto žinoma taško judėjimo trajektorija erdvėje, taško judėjimą patogu apibrėžti natūraliuoju būdu. Tegul taškas *M* juda trajektorija *AB* (9 pav.).



9 pav. Judančio taško natūraliosios koordinatės

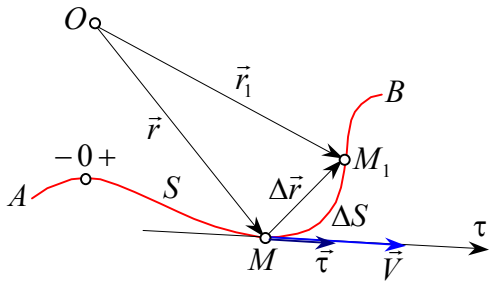
Trajektorijoje parenkame atskaitos pradžią O ir judesio kryptis (teigiama „+“ ir neigiama „–“). Taško M padėtį trajektorijoje nurodysime naudodamiesi lanko koordinate S. Taškui judant, jo lanko koordinatė S keičiasi. Taško padėtis trajektorijoje bus apibrėžta, jeigu turėsime laiko funkciją:

$$S = S(t). \tag{12}$$

Įrašę konkrečią fiksuotą laiko reikšmę t į (12) išraišką, gausime konkrečią lanko koordinatę S_i, kuri trajektorijoje nurodys taško M_i padėtį. Matematinė priklausomybė (12) turi būti be trūkių, vienareikšmė ir diferencijuojama funkcija.

Nustatysime taško kinematines charakteristikas, kai judėjimas pateiktas natūraliuoju būdu.

Taško greitis. Kai judėjimas apibrėžtas natūraliuoju būdu, greičiui skaičiuoti reikalinga taško trajektorija AB ir judėjimo lygtis $S = S(t)$ (10 pav.).



10 pav. Judančio taško greitis

Laiko momentu t taškas yra padėtyje M, o per laiko tarpą $\Delta t = t_1 - t$ taškas pasislenka lanku ΔS į padėtį M_1. Iš laisvai pasirinkto centro O išvedame padėties vektorių $\vec{r}$ ir apskaičiuojame taško M greitį laiko momentu t:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Padauginę greičio išraišką iš vienetinio santykio $\frac{dS}{dS}$, gauname:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dS}{dS} = \frac{dS}{dt}\frac{d\vec{r}}{dS}.$$

Kai laikotarpis Δt artėja prie nulio, tai ΔS ir $\Delta\vec{r}$ sutampa su liestine, o santykio ribos modulis lygus 1, nes $\frac{d\vec{r}}{dS} = \left|\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta S} = \frac{d\vec{r}}{dS} = 1\right|$. Taigi vektorinis dydis $\frac{d\vec{r}}{dS}$ yra interpretuojamas kaip liestinės vienetinis vektorius $\vec{\tau}$, kuris nurodo greičio V kryptį. Todėl galima užrašyti:

$$\vec{V} = \frac{dS}{dt}\vec{\tau}\,, \quad \text{arba} \quad \vec{V} = V\vec{\tau}\,.$$

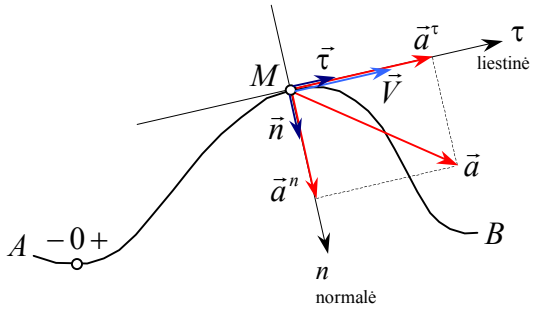
Gavome, kad greičio vektorius yra nukreiptas trajektorijos liestine taško judėjimo kryptimi:

$$\vec{V} = V\vec{\tau}\,, \tag{13}$$

o greičio modulis skaičiuojamas kaip koordinatės pirmoji išvestinė laiko atžvilgiu:

$$V = \frac{dS}{dt}.$$

Taško pagreitis priklauso nuo taško judėjimo greičio pokyčio, todėl trajektorijoje *AB* (11 pav.) rodysime judančio taško *M* greitį.



11 pav. Judančio taško pagreitis

Natūraliosios ašys *n* ir τ juda kartu su tašku *M*. Todėl ašių ortai $\vec{n}$ ir $\vec{\tau}$ yra kintamieji dydžiai, nes judant taškui kinta šių vektorių kryptis.

Pagreičio vektorius yra greičio vektoriaus išvestinė laiko atžvilgiu. Greitis:

$$\vec{V} = V\vec{\tau} = \frac{dS}{dt}\vec{\tau}\,,$$

todėl pagreitis

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}\vec{\tau} + \frac{dS}{dt}\frac{d\vec{\tau}}{dt}. \tag{14}$$

Matome, kad pagreičio vektoriaus išraiškoje yra dvi komponentės. Pirmąją komponentę $\frac{d^2S}{dt^2}\vec{\tau}$, nukreiptą liestinės kryptimi, vadinsime tangentiniu pagreičiu $\vec{a}^{\tau}$:

$$\vec{a}^{\tau} = \frac{d^2S}{dt^2}\vec{\tau} = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} = a^{\tau}\vec{\tau}. \tag{15}$$

Antroji komponentė $\vec{a} = \frac{dS}{dt}\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ nukreipta normalės kryptimi, nes, kaip žinoma iš matematikos, tangentinio orto išvestinė laiko atžvilgiu yra statmena tangentei. Šią komponentę vadinsime normaliniu pagreičiu $\vec{a}^n$. Apskaičiuosime šio pagreičio modulį. Pertvarkome antrąjį išraiškos (14) narį, padaugindami jį iš $\frac{dS}{dS}$:

$$\frac{dS}{dt}\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{dS}{dt}\frac{d\vec{\tau}}{dt}\frac{dS}{dS} = \frac{dS}{dt}\frac{dS}{dt}\frac{d\vec{\tau}}{dS} = V^2\frac{d\vec{\tau}}{dS}.$$

Kreivės kreivio vektorius $\frac{d\vec{\tau}}{dS} = \vec{k} = k\vec{n} = \frac{1}{\rho}\vec{n}$, čia ρ – trajektorijos kreivumo spindulys.

Todėl:

$$\vec{a}^n = \frac{V^2}{\rho}\vec{n} = a^n\vec{n}. \qquad (16)$$

Taško pagreitis:

$$\vec{a} = \vec{a}^\tau + \vec{a}^n. \qquad (17)$$

Pagreičio $\vec{a}$ modulis:

$$a = \sqrt{a^{\tau 2} + a^{n 2}}.$$

Pagreičio vektoriaus $\vec{a}$ kryptį nusako kampas φ tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{a}^\tau$:

$$tg\varphi = \frac{a^n}{a^\tau}.$$

Taško tangentinis pagreitis ir greitis yra nukreipti ta pačia tiese (liestine), todėl tangentinis pagreitis turi įtakos greičio moduliui: kai kryptys sutampa – didina, kai priešingos – mažina.

Normalinis pagreitis glaudžia greičio vektorių prie trajektorijos, t. y. keičia greičio vektoriaus kryptį.

1.4. RYŠIS TARP JUDĖJIMO APIBRĖŽIMO BŪDŲ

Tarp minėtųjų judėjimo aprašymo būdų yra matematinės priklausomybės. Taško padėties vektorių galima išreikšti jo komponentėmis, pavyzdžiui, 4 pav. matome, kad padėties vektoriaus projekcijos į koordinačių ašis *xyz* yra:

$$r_x = x; \quad r_y = y; \quad r_z = z.$$

Todėl galima užrašyti:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \qquad (18)$$

Turime ryšį tarp vektorinio ir koordinatinio judėjimo aprašymo būdų.

Rasime ryšį tarp koordinatinio ir natūralaus judėjimo aprašymo būdų. Jeigu judėjimas pateiktas koordinatiniu būdu, tai taško greičio modulis yra:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}.$$

Kai judėjimas aprašomas natūraliuoju būdu, turime:

$$V = \frac{dS}{dt}.$$

Palyginę greičius, aprašytus skirtingais būdais, gauname:

$$\frac{dS}{dt} = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}.$$

Iš to išplaukia:

$$dS = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}\,dt.$$

Suintegravę turėsime:

$$S = \int_0^t \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}\,dt. \qquad (19)$$

Taigi nustatėme ryšį tarp koordinatinio ir natūraliojo judėjimo aprašymo būdų.

Žinodami matematines priklausomybes tarp skirtingų judėjimo aprašymo būdų, galime pagal vieną pateiktą aprašymo būdą rasti parametrą arba parametrus, kurie taikomi kitam judėjimo aprašymo būdui.

2. STANDŽIOJO KŪNO KINEMATIKA

Kaip ir materialiojo taško atveju, standžiojo kūno kinematikos *pirmajame* uždavinyje nustatomas kūno judėjimo dėsnis, t. y. laiko funkcijos, rodančios kūno padėtį bet kuriuo laiko momentu.

Antrajame kinematikos uždavinyje, remiantis judėjimo dėsniu, nustatomos kūno ir bet kurio kūno taško kinematinės charakteristikos – judėjimo greitis ir pagreitis.

Iš esamų įvairių standžiojo kūno judėjimų nagrinėsime tokius atvejus:

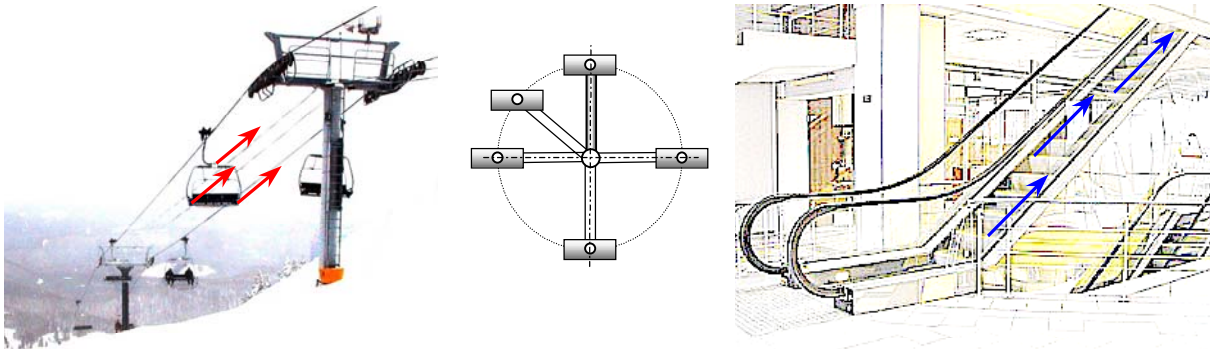
- slenkamąjį kūno judėjimą;
- kūno sukimąsi apie nejudamąją ašį;
- plokščiąjį kūno judėjimą;
- kūno judėjimą apie nejudamąjį tašką, arba sferinį judėjimą;
- laisvąjį kūno judėjimą.

Atsižvelgiant į kūno judėjimą, parenkami kūno padėtį erdvėje apibrėžiantys parametrai.

2.1. SLENKAMASIS KŪNO JUDĖJIMAS

Slenkamuoju vadinamas toks kūno judėjimas, kai tiesė, jungianti bet kuriuos du kūno taškus, juda lygiagrečiai.

Slenkamojo judėjimo pavyzdžiai – kabinos judėjimas kabamuoju kalnų keliu (12 a pav.), dviračio pedalo judėjimas (12 b pav.), eskalatoriaus laiptų judėjimas (12 c pav.) ir t. t.

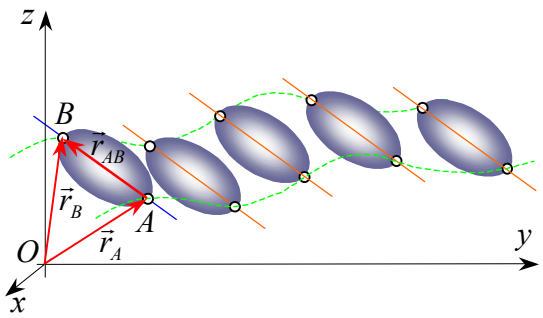


a) b) c)

12 pav. Slenkamojo judėjimo pavyzdžiai: a) – kabinos judėjimas kabamuoju kalnų keliu; b) – dviračio pedalo judėjimas; b) – eskalatoriaus laiptų judėjimas

Sudarysime kūno judėjimo lygtis. Tarkime, kad kūnas juda slenkamuoju judėjimu. Pagal apibrėžimą, bet kuri su kūnu susijusi tiesė juda lygiagrečiai.

Parodysime kūno, taip pat kūno taškus A ir B jungiančios tiesės judėjimą (13 pav.).



13 pav. Kūno slenkamasis judėjimas

Galima pasakyti, kad nuo atkarpos AB judėjimo priklauso kūno judėjimas. Jeigu žinosime atkarpos AB padėtį bet kuriuo laiko momentu, tai žinosime ir kūno padėtį tuo laiko momentu.

Atkarpos padėtį erdvėje lemia taškų A ir B padėtis. Šią padėtį nustato padėties vektoriai $\vec{r}_A$ ir $\vec{r}_B$. Taškus sujungiame vektoriumi $\vec{r}_{AB}$. Iš vektorių trikampio turime:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{AB}, \qquad (20)$$

čia $\vec{r}_{AB} = \text{const}$ – atstumas tarp taškų *A* ir *B* yra pastovus vektorius, nes nekinta nei jo dydis, nei kryptis.

Iš 13 pav. ir (20) matome, kad taško *B* trajektoriją yra tokia pati, kaip taško *A*, tik nutolusi pastoviu atstumu, lygiu vektoriui $\vec{r}_{AB}$. Taigi taškų *A* ir *B* trajektorijos yra vienodos.

Turėdami taško *A* judėjimo dėsnį $\vec{r}_A = \vec{r}_A(t)$, gauname:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A(t) + \vec{r}_{AB}, \tag{21}$$

čia $\vec{r}_{AB} = \text{const}$.

Vektorinė priklausomybė (21) yra kūno slenkamojo judėjimo vektorinė lygtis. Suprojektavę šią priklausomybę į Dekarto koordinačių ašis, gausime kūno judėjimo lygtis, išreikštas koordinatiniu būdu:

$$\begin{cases} x_B = x_A(t) + l_x, \\ y_B = y_A(t) + l_y, \\ z_B = z_A(t) + l_z, \end{cases}$$

čia l_x, l_y, l_z – vektoriaus $\vec{r}_{AB}$ projekcijos į *xyz* koordinačių ašis.

Taškų *A* ir *B* greičius rasime, diferencijuodami lygtį (21) laiko atžvilgiu:

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}_{AB}}{dt}. \tag{22}$$

Kadangi vektoriaus $\vec{r}_{AB}$ didumas ir kryptis nesikeičia, t. y. $\vec{r}_{AB} = \text{const}$, tai $\frac{d\vec{r}_{AB}}{dt} = 0$, todėl:

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt},$$

arba $$\vec{V}_B = \vec{V}_A.$$

Matome, kad kūno taškų *A* ir *B* greičiai yra vienodi. Dar kartą diferencijuodami gautą greičių lygtį, gauname pagreičių sąryšį:

$$\frac{d\vec{V}_B}{dt} = \frac{d\vec{V}_A}{dt},$$

arba

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A.$$

Vadinasi, kūno taškų pagreičiai taip pat yra vienodi.

Kadangi taškai *A* ir *B* buvo laisvai parinkti, galima padaryti tokias išvadas:

- slenkančiojo kūno visų taškų trajektorijos yra vienodos, o greičiai ir pagreičiai lygūs ir vienodai nukreipti;

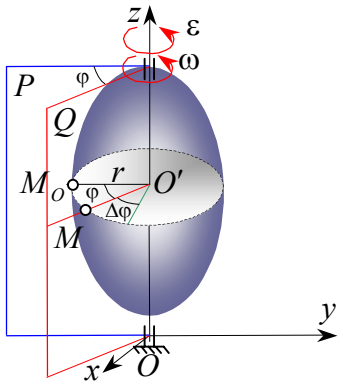
- kai kūnas slenka, pakanka nagrinėti tik vieno laisvai pasirinkto taško judėjimą, visi kiti kūno taškai judės kaip ir nagrinėjamasis taškas. Todėl kūno slenkamojo judėjimo uždavinys virsta vieno taško kinematikos uždaviniu.

2.2. KŪNO SUKIMASIS APIE NEJUDAMĄJĄ AŠĮ

Sukamuoju vadiname tokį kūno judėjimą, kai kūnui judant aibė taškų, esančių vienoje tiesėje, nejuda. Per šiuos taškus pravesta tiesė vadinama kūno sukimosi ašimi. Bet kuris kūno sukimosi ašyje negulintis taškas, judant kūnui, brėžia apskritimą, kurio spindulys lygus atstumui nuo taško iki sukimosi ašies. Apskritimo plokštuma yra statmena sukimosi ašiai (14 pav.).

2.2.1. SUKAMOJO JUDĖJIMO DĖSNIS

Nustatysime kūno sukimosi dėsnį. Pasirenkame atskaitos sistemą. *Oxyz*. Koordinačių ašį *Oz* pravedame per kūno sukimosi ašį. Per ašį *Oz* nubrėžiame dvi plokštumas: nejudamąją plokštumą *P* ir plokštumą *Q*, judančią kartu su kūnu. Matome, kad plokštuma *Q* pasisuks plokštumos *Q* atžvilgiu tiek, kiek kūnas pajudės apie ašį *Oz*.



14 pav. Kūno sukimasis apie ašį

Kampas φ tarp plokštumų vienareikšmiai nustato kūno padėtį. Todėl kampo φ kitimą aprašanti laiko funkcija

$$\varphi = \varphi(t) \tag{23}$$

ir yra ieškomas kūno sukimosi dėsnis. Kūno sukimasis, stebint iš ašies *z* galo, prieš laikrodžio rodyklę laikomas teigiamu, pagal laikrodžio rodyklę – neigiamu.

Priklausomybė (23) turi būti vienareikšmė, be trūkių ir du kartus diferencijuojama funkcija. Kampas φ matuojamas radianais [rad].

Priklausomybė (23) yra kūno sukamojo judėjimo lygtis, pagal kurią nustatomos kūno kinematinės charakteristikos.

2.2.2. KŪNO SUKIMOSI GREITIS

Tarkime, kad judėdamas kūnas per laiko tarpą Δt pasisuko kampu $\Delta\varphi$. Posūkio kampo pokyčio $\Delta\varphi$ santykis su laiko pokyčiu Δt rodo vidutinį posūkio kampo kitimo greitį ir vadinamas vidutiniu sukimosi greičiu. Jo reikšmė $\omega_{vid} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ tuo tikslesnė, kuo mažesnis bus laiko tarpas Δt, per kurį pakito kampas. Kūno tikruoju sukimosi greičiu vadinama riba, prie kurios artėja vidutinis sukimosi greitis ω_{vid}, kai Δt artėja prie nulio.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \omega_{vid} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}, \tag{24}$$

t. y. kūno sukimosi greitis yra sukimosi dėsnio pirmoji išvestinė laiko atžvilgiu.

Sukimosi greitis taip pat yra laiko funkcija $\omega = \omega(t)$. Įrašę konkrečią laiko reikšmę, rasime sukimosi greitį tuo laiko momentu. Apskaičiuota greičio reikšmė gali būti teigiama arba neigiama. Gautas „+“ arba „–“ ženklas rodo sukimosi kryptį: kai „+“ – kūnas sukasi prieš laikrodžio rodyklę, kai „–“ – pagal laikrodžio rodyklę. Sukimosi greitis taip pat vadinamas kampiniu greičiu, jo dimensija – $[\frac{rad}{s}]$, arba $[s^{-1}]$.

2.2.3. KŪNO SUKIMOSI PAGREITIS

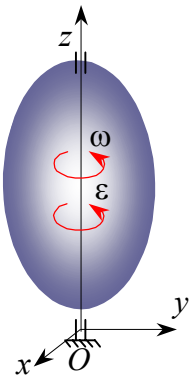
Tarkime, kad per laiko tarpą Δt kampinis greitis pakito dydžiu $\Delta\omega$. Kampinio greičio pokyčio $\Delta\omega$ santykis su laiko pokyčiu Δt rodo vidutinį kampinio greičio kitimą ir vadinamas vidutiniu sukimosi pagreičiu, kurio reikšmė $\varepsilon_{vid} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ tuo tikslesnė, kuo mažesnis laiko tarpas Δt. Kūno tikruoju sukimosi pagreičiu vadiname ribą, prie kurios artėja vidutinis kampinis (sukimosi) pagreitis ε_{vid}, kai Δt artėja prie nulio:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_{vid} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \tag{25}$$

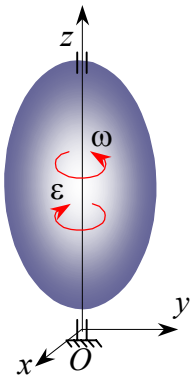
t. y. kūno kampinis pagreitis yra kampinio greičio pirmoji išvestinė arba sukimosi dėsnio antroji išvestinė pagal laiką.

Jeigu gautas kampinis pagreitis yra teigiamas, jis nukreipiamas prieš laikrodžio rodyklę (14 pav.). Kampinio pagreičio dimensija – $\left[\frac{rad}{sek^2}\right]$, arba $\left[s^{-2}\right]$.

Kai kampinio greičio ir pagreičio kryptys sutampa (15 a pav.), turime greitėjantį kūno sukimąsi, kai kryptys yra priešingos (15 b pav.), turime lėtėjantį sukimąsi.



a) greitėjantis sukimasis



b) lėtėjantis sukimasis

15 pav. Kūno sukimosi apie ašį atvejai

Kūno sukamojo judėjimo dėsnis bei kinematinės charakteristikos – kampinis greitis ω ir kampinis pagreitis ε yra kinematiniai rodikliai, bendri visam kūnui, nes visi besisukančio kūno taškai pasisuka vienodais kampais ir todėl turi vienodus kampinius greičius bei kampinius pagreičius.

2.2.4. TOLYGUS IR TOLYGIAI KINTANTIS SUKIMASIS

- Jei kūnui besisukant jo kampinis greitis yra pastovus $\omega = \text{const}$, tai kūno sukimasis yra tolygus. Rasime tolygaus sukimosi dėsnį.

Iš išraiškos (24) turime $d\varphi = \omega dt$. Tarę, kad pradiniu momentu, kai laikas $t = 0$, kampas $\varphi = 0$, ir suintegravę gausime:

$$\int_0^{\varphi} d\varphi = \int_0^{t} \omega dt = \omega \int_0^{t} dt,$$

nes $\omega = \text{const}$. Todėl:

$$\varphi = \omega t. \tag{26}$$

Iš išraiškos (26) matyti, kad kai kūnas sukasi tolygiai:

$$\omega = \frac{\varphi}{t}.$$

Atsižvelgdami į tai, kad tarp kūno pasisukimo kampo φ ir kūno padarytų apsisukimų skaičiaus n yra priklausomybė:

$$\varphi = 2\pi n,$$

čia 2π – vienas apsisukimas, išreikštas radianais; n – kūno apsisukimų skaičius. Gauname:

$$\omega = \frac{2\pi n}{t}, \tag{27}$$

čia laikas *t* matuojamas sekundėmis. Kampinio greičio dimensija: $\frac{rad}{s}$, arba s^{-1}.

Iš išraiškos (27) matyti skirtumas tarp kūno kampinio greičio $\omega = \frac{2\pi n}{t}$ ir kūno sukimosi dažnio $\nu = \frac{n}{t}$ – sukimosi dažnis yra apsisukimų skaičius per tam tikrą laiko tarpą *t*. Pavyzdžiui, jeigu kūnas per 1 min (60 s) apsisuka *n* kartų, galima užrašyti:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}.$$

- Jeigu besisukančio kūno kampinis pagreitis yra pastovus $\varepsilon = \text{const}$, tai sukimasis yra *tolygiai kintamas*.

Iš išraiškos (25) gauname $d\omega = \varepsilon dt$. Integruojant šią išraišką atitinkamose ribose:

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_{t_0=0}^{t} \varepsilon dt = \varepsilon \int_{t_0=0}^{t} dt,$$

čia $\varepsilon = \text{const}$, ω_0 – kūno kampinis greitis laiko momentu t_0, ω – kūno kampinis greitis laiko momentu *t*. Gauname:

$$\omega - \omega_0 = \varepsilon t,$$

todėl

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \tag{28}$$

čia $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$. Todėl:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon t$$

arba

$$d\varphi = \omega_0 dt + \varepsilon t dt.$$

Integruojame šią išraišką atitinkamose ribose:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_{t_0=0}^{t} \omega_0 dt + \int_{t_0=0}^{t} \varepsilon t dt = \omega_0 \int_{t_0=0}^{t} dt + \varepsilon \int_{t_0=0}^{t} t dt,$$

čia $\varepsilon = \text{const}$, $\omega_0 = \text{const}$, φ_0 – kūno pradinis posūkio kampas (spręsdami uždavinius, dažnai turime, kad $\varphi_0 = 0$). Gauname:

$$\varphi - \varphi_0 = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

todėl

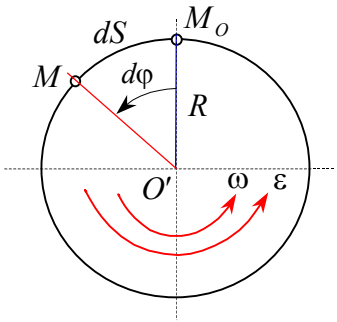
$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \tag{29}$$

Kūno sukimasis gali būti greitėjantis arba lėtėjantis, todėl kampinis pagreitis ε gali būti teigiamas arba neigiamas. Žemiau pateiktos 30 ir 31 išraiškos aprašo atitinkamai greitėjantį ir lėtėjantį sukimąsi:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \qquad \text{arba} \qquad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2}. \tag{30, 31}$$

2.2.5. BESISUKANČIO KŪNO TAŠKŲ GREIČIAI IR PAGREIČIAI

Besisukančio kūno bet kuris taškas, nesantis sukimosi ašyje, brėžia apskritimą plokštumoje, statmenoje sukimosi ašiai. Šio apskritimo spindulys lygus atstumui tarp taško ir sukimosi ašies (14, 16 pav.).



16 pav. Besisukančio apie ašį kūno kinematinės charakteristikos

Taikome natūralųjį judėjimo aprašymo būdą, taško M padėtį trajektorijoje galime nurodyti lanko koordinate:

$$dS = M_0 M\ .$$

Lanko koordinatė $S = \varphi \cdot R$ visiškai apibrėžia taško M padėtį trajektorijoje, nes taškas M pasislinks trajektorijoje tiek, kiek pasisuks kūnas. Padaliję abi lygybės puses iš dt ir atlikę nesudėtingus pertvarkymus, gauname:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} R = \frac{d\varphi}{dt} R.$$

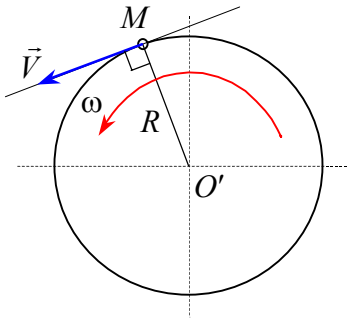
Turime natūralųjį taško judėjimo aprašymo būdą. Todėl galima teigti, kad lanko koordinatės pirmoji išvestinė laiko atžvilgiu yra taško greitis:

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} R\,,$$

arba

$$V = \omega R. \tag{32}$$

Taško greičio vektorius nukreiptas liestine trajektorijai (statmuo spinduliui) judėjimo kryptimi (17 pav.).



17 pav. Besisukančio kūno taško linijinis greitis

Kai judėjimas aprašytas natūraliu būdu, taško pagreitis išreiškiamas naudojant normalinį ir tangentinį pagreičius. Normalinis pagreitis randamas taip:

$$a^n = \frac{V^2}{\rho}.$$

Kadangi sukamojo judėjimo atveju trajektorijos kreivumo spindulys $\rho = R$, o greitis $V = \omega R$, gauname:

$$a^n = \frac{(\omega R)^2}{R},$$

arba

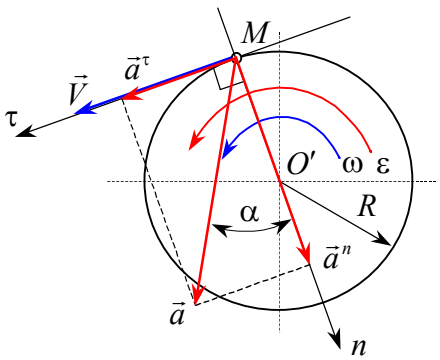
$$a^n = \omega^2 R. \qquad (33)$$

Normalinis pagreitis visada nukreiptas į trajektorijos kreivumo centrą (18 pav.). Tangentinis pagreitis yra greičio pirmoji išvestinė pagal laiką:

$$a^\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R,$$

arba

$$a^\tau = \varepsilon R. \qquad (34)$$



18 pav. Besisukančio kūno taško pagreičiai

Tangentinis pagreitis sutampa su trajektorijos liestine ir yra nukreipiamas pagal kampinį pagreitį ε. Taško M pagreičio didumas (modulis) randamas taip:

$$a = \sqrt{\left(a^{\tau}\right)^2 + \left(a^{n}\right)^2} = \sqrt{\left(\varepsilon R\right)^2 + \left(\omega^2 R\right)^2},$$

arba

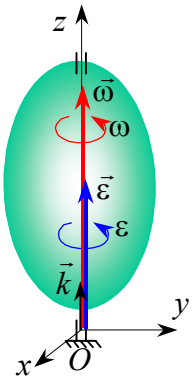
$$a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{35}$$

Pagreičio vektoriaus $\vec{a}$ kryptį nusako kampo su normale tangentas:

$$tg\,\alpha = \frac{a^{\tau}}{a^{n}} = \frac{\varepsilon R}{\omega^2 R} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

2.2.6. *BESISUKANČIO KŪNO KINEMATINIŲ CHARAKTERISTIKŲ VEKTORINĖS PRIKLAUSOMYBĖS*

Kūno sukimąsi apie nejudamąją ašį apbūdina sukimosi ašis, kampinis greitis, kampinis pagreitis ir sukimosi kryptis. Visas šias judesio charakteristikas galima pavaizduoti vektoriais.



19 pav. Besisukančio kūno kinematinės charakteristikos

Jeigu kūnas juda kampiniu greičiu ω apie nejudamąją ašį Oz (19 pav.), tai pridėję bet kuriame sukimosi ašies taške vektorių $\vec{\omega}$ taip, kad žiūrint iš jo galo sukimasis būtų nukreiptas prieš laikrodžio rodyklės kryptį, remdamiesi šiuo vektoriumi, galime apibūdinti kūno sukamojo judėjimo greitį.

Vektorius $\vec{\omega}$ visada sutampa su kūno sukimosi ašimi, vektoriaus $\vec{\omega}$ kryptis nusako kūno sukimosi kryptį, vektoriaus $\vec{\omega}$ modulis $|\vec{\omega}|$ yra kūno sukamojo judėjimo kampinio greičio reikšmė ω.

Sukimosi ašies Oz ortą pažymime raide $\vec{k}$ (19 pav.). Tada kampinio greičio vektorių galima išreikšti taip:

$$\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{k} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{k}.$$

Kampinio pagreičio vektorių apskaičiuosime, kaip kampinio greičio vektoriaus išvestinę laiko atžvilgiu:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \cdot \vec{k},$$

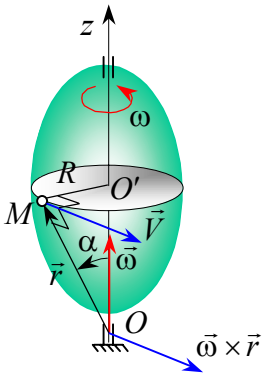
$$\left|\vec{\varepsilon}\right| = \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Jeigu kampinio pagreičio vektorius $\vec{\varepsilon}$ nukreiptas ta pačia kryptimi kaip ir kampinio greičio vektorius $\vec{\omega}$ (20a pav.), turime greitėjantį sukimąsi. Jeigu kampinis pagreitis nukreiptas priešinga kryptimi negu kampinio greičio vektorius (20 b pav.), gausime lėtėjantį sukimąsi.

a) greitėjantis sukimasis b) lėtėjantis sukimasis

20 pav. Kūno sukimasis apie ašį

Tarkime, kad kūnas kampiniu greičiu ω sukasi prieš laikrodžio rodyklę apie ašį *0z* (21 pav.).



21 pav. Besisukančio kūno taško linijinis greitis

Kūnui besisukant, taškas *M* brėžia apskritimą, kurio spindulys *R* lygus atstumui nuo taško *M* iki sukimosi ašies *z*. Taško *M* linijinis greitis $V = \omega R$ yra statmenas brėžiamo apskritimo

spinduliui ir nukreiptas kampinio greičio kryptimi. Iš trikampio $\Delta OO'M$ matome, kad atstumas $R = r\sin\alpha$, todėl taško M greitis:

$$V = \omega R = \omega r \sin\alpha.$$

Sukimosi ašyje iš laisvai pasirinkto taško O brėžiame kampinio greičio vektorių $\vec{\omega}$ ir taško M padėties vektorių $\vec{r}$. Iš analizinės matematikos žinoma, kad dviejų vektorių, šiuo atveju $\vec{\omega}$ ir $\vec{r}$, vektorinė sandauga $\vec{\omega}\times\vec{r}$ yra vektorius, nukreiptas statmenai vektorių $\vec{\omega}$ ir $\vec{r}$ sudaromai plokštumai taip, kad, žiūrint iš jo galo, pirmasis daugiklis $\vec{\omega}$ judėtų prie antrojo daugiklio $\vec{r}$ prieš laikrodžio rodyklės kryptį (21 pav.). Šio vektoriaus modulis:

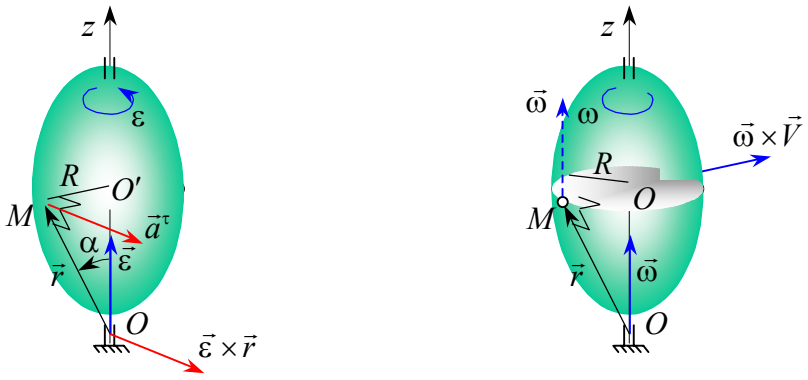
$$\left|\vec{\omega}\times\vec{r}\right| = \omega r \sin\alpha.$$

Matome, kad taško M greičio vektorius $\vec{V}$ ir vektorinės sandaugos $\vec{\omega}\times\vec{r}$ vektorius turi vienodus modulius $\omega r\sin\alpha$. Iš (21 pav.) matome, kad abu vektoriai yra statmeni trikampio $\Delta OO'M$ plokštumai ir nukreipti viena kryptimi, todėl šie vektoriai yra lygūs:

$$\vec{V} = \vec{\omega}\times\vec{r}. \qquad (36)$$

Išvada. Besisukančio kūno taško greičio vektorius yra lygus kampinio greičio ir taško padėties vektorių vektorinei sandaugai.

Tegul kūnas sukasi apie ašį $0z$ kampiniu greičiu ω ir kampiniu pagreičiu ε (22 a, b pav.).



a) taško tangentinis pagreitis b) taško normalinis pagreitis

22 pav. Taško pagreičiai

Priminsime, kad taško M normalinio a^n ir tangentinio a^{τ} pagreičių reikšmės randamos taikant anksčiau gautas formules:

$$a^n = \omega^2 R = \omega\omega R = \omega V \quad \text{ir} \quad a^{\tau} = \varepsilon R = \varepsilon r \sin\alpha.$$

Taško M greičio vektorius $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Taško pagreitis yra greičio vektoriaus išvestinė laiko atžvilgiu, todėl:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt},$$

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V}. \qquad (37)$$

Kadangi dviejų vektorių vektorinė sandauga yra vektorius, tai iš (37) matome, kad taško pagreičio vektorius $\vec{a}$ yra dviejų vektorių suma.

Vektorinės sandaugos $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ modulis lygus taško M tangentinio pagreičio a^{τ} moduliui:

$$\left|\vec{\varepsilon} \times \vec{r}\right| = \varepsilon r \sin\alpha = \varepsilon R = a^{\tau}.$$

Iš 22 a pav. matome, kad vektoriaus $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ ir taško M tangentinio pagreičio $\vec{a}^{\tau}$ vektoriaus kryptys yra vienodos, todėl:

$$\vec{\varepsilon} \times \vec{r} = \vec{a}^{\tau}. \qquad (38)$$

Vektorinės sandaugos $\vec{\omega} \times \vec{V}$ modulis lygus taško M normalinio pagreičio a^{n} moduliui:

$$\left|\vec{\omega} \times \vec{V}\right| = \omega r V \sin 90 = \omega V = a^{n},$$

čia $\vec{\omega} \perp \vec{V}$ (22 b pav.), todėl vektorius $\vec{\omega} \times \vec{V}$ nukreiptas į trajektorijos kreivumo centrą. Vektoriaus $\vec{\omega} \times \vec{V}$ ir taško M normalinio pagreičio $\vec{a}^{n}$ kryptys yra vienodos, todėl:

$$\vec{\omega} \times \vec{V} = \vec{a}^{n}. \qquad (39)$$

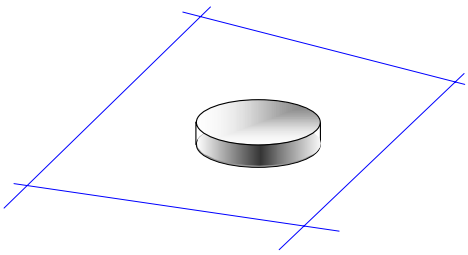
Gavome besisukančio kūno laisvai pasirinkto taško M pagreičio $\vec{a}$ vektorinę išraišką:

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V} = \vec{a}^{\tau} + \vec{a}^{n}. \qquad (40)$$

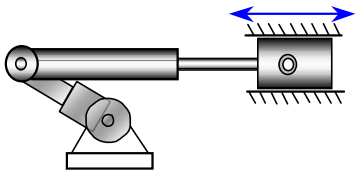
2.3. PLOKŠČIASIS KŪNO JUDĖJIMAS

Kūno judėjimas vadinamas plokščiuoju, kai kūnui judant visi jo taškai juda plokštumose, lygiagrečiose tam tikrai nejudančiai plokštumai. Pavyzdžiui: a) horizontaliu kelio ruožu lėtai riedantis automobilis gali judėti tiesiai, manevruoti arba stabdyti, tačiau visais šiais atvejais automobilio kėbulo bei ratų ašių taškai liks tame pačiame aukštyje kelio paviršiaus atžvilgiu, t. y. automobilio taškai judės plokštumose, lygiagrečiose kelio plokštumai; b) ledo paviršiumi slystančio skritulio (23 pav.) visų taškų atstumai iki ledo paviršiaus yra pastovūs, t. y.

skritulio taškai juda plokštumose, lygiagrečiose nejudamajai ledo plokštumai; c) variklio švaistiklinio mechanizmo (24 pav.) visi taškai taip pat juda lygiagrečiose plokštumose; ir t. t.



23 pav. Ledo paviršiumi slystantis skritulys

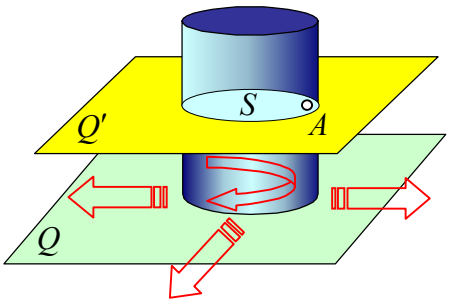


24 pav. Variklio švaistiklinis mechanizmas

2.3.1. PLOKŠČIOJO JUDĖJIMO LYGTYS

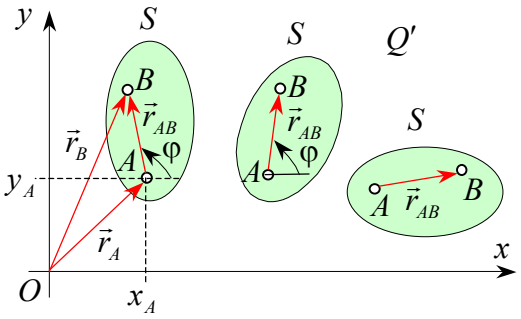
Nagrinėsime plokščiai judantį kietąjį kūną (25 pav.), atsižvelgdami į tai, kad kietajam kūnui judant atstumai tarp jo taškų nesikeičia.

Plokščiai judančio kūno pjūvio S taškai judės atitinkamoje plokštumoje Q' lygiagrečiai su tam tikra nejudančiąja plokštuma Q. Kadangi kūno ir pjūvio S judėjimai yra neatskiriami, o visi kiti kūno taškai taip pat judės plokštumose, lygiagrečiose su plokštuma Q, ir brėš trajektorijas, identiškas pjūvio S laisvai pasirinktojo taško A trajektorijai, tai, nagrinėjant plokščiai judančio kūno judėjimą, *pakanka nagrinėti tik laisvai pasirinktojo kūno pjūvio S judėjimą*.



25 pav. Kūno ir jo pjūvio S judėjimas

Pjūvio S judėjimą plokštumoje Q' vaizduoja kelios tarpinės pjūvio S padėtys (25, 26 pav.).



26 pav. Plokštumoje Q' judančio kūno pjūvis

26 pav. matome, kad plokščiai judančio kūno pjūvis gali keisti savo padėtį koordinačių ašių xy atžvilgiu bei suktis plokštumoje. Todėl, norint nustatyti pjūvio S padėtį laiko momentu t, reikia žinoti pjūvio taško, pavyzdžiui, A, padėtį laiko momentu t ir pjūvio pasisukimo apie šį tašką kampą φ. Kad įvertintume pjūvio S pasisukimą, laisvai parenkame pjūvio tašką B ir sujungiame taškus A ir B vektoriumi $\vec{r}_{AB}$. Kadangi nagrinėjamas absoliučiai kietas kūnas, tai vektorius $\vec{r}_{AB}$ visada bus pastovaus dydžio, tačiau kintamos krypties. Taškų A ir B padėtį atskaitos taško O atžvilgiu apibrėžiame vektoriais $\vec{r}_A$ ir $\vec{r}_B$. Iš vektorių sudaryto trikampio (26 pav.) matome, kad:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{AB}, \tag{41}$$

čia $\vec{r}_A = f_1(t)$ – taško A judėjimo dėsnis; $\vec{r}_B = f_2(t)$ – taško B judėjimo dėsnis; $\vec{r}_{AB} = f_2(t)$ – taškų A ir B sąryšio funkcija.

Matome, kad, žinant taškų A ir B judėjimo dėsnius, visada galima rasti taško A ir vektoriaus $\vec{r}_{AB}$ padėtį ir kartu pjūvio S bei visų kūno taškų padėtį bet kuriuo laiko momentu. Priklausomybė (41) yra kūno plokščiojo judėjimo vektorinė lygtis.

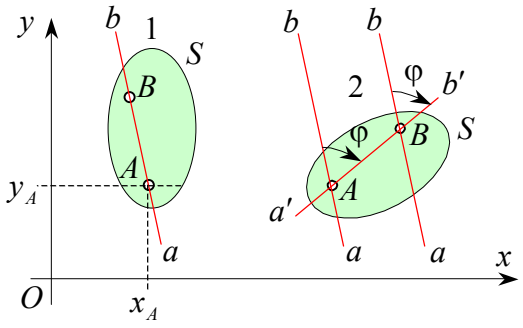
Vektoriaus $\vec{r}_{AB}$ padėtį taip pat galima nusakyti taško A koordinatėmis x_A ir y_A bei kampu φ su x ašimi (26 pav.).

Kūnui judant, dydžiai x_A, y_A ir φ kinta. Šių dydžių atitinkamos laiko funkcijos

$$x_A = f_1(t), \qquad y_A = f_2(t) \qquad \text{ir} \qquad \varphi = f_3(t)$$

yra plokščiai judančio kūno judėjimo dėsnis, užrašytas skaliarine forma.

Kaip bet koks sudėtinis judėjimas, plokščiasis judėjimas gali būti skaidomas į paprastus judėjimus. Nagrinėsime dvi laisvai pasirinktas judančio pjūvio S padėtis (27 pav.).



27 pav. Kūno pjūvio judėjimo analizė

Taško A ir tiesių ab bei $a'b'$ padėtys nusako pjūvio S padėtį pirmuoju ir antruoju laiko momentais (27 pav.). Matome, kad tiesės $a'b'$ padėtį galima rasti lygiagrečiai perkėlus tiesę ab į antrosios padėties taškus A arba B ir pasukus ją apie taškus A arba B kampu φ. Galima įsivaizduoti, kad iš pirmosios padėties į antrąją padėtį tiesė ab judėjo slenkamuoju judesiu, o paskui pasisuko kampu φ apie tašką A arba B. Taškas, apie kuri pasukama tiesė ab, vadinamas poliumi.

Išvada. Kūno plokščiasis judėjimas susideda iš slenkamojo judėjimo su laisvai pasirinktu poliumi ir sukimosi apie šį polių.

Slenkamajam judėjimui aprašyti pakanka žinoti poliaus judėjimo dėsnį, pavyzdžiui, poliaus A koordinates x_A ir y_A, o sukamajam judėjimui – posūkio apie polių A kampą φ. Todėl analizinės kūno plokščiojo judėjimo lygtys yra užrašomos taip:

$$x_A = f_1(t), \qquad y_A = f_2(t) \qquad \text{ir} \qquad \varphi = f_3(t). \tag{42}$$

Poliumi dažniausiai parenkamas taškas, kurio judėjimas lengvai apibrėžiamas. Iš kūno plokščiojo judėjimo lygčių (42) randamos poliaus linijinio greičio ir pagreičio projekcijos į xy koordinačių ašis, poliaus linijinio greičio bei pagreičio moduliai, taip pat kūno sukimosi kampinis greitis ir kampinis pagreitis:

$$V_{Ax} = \frac{dx_A}{dt}, \qquad a_{Ax} = \frac{dV_{Ax}}{dt} = \frac{d^2x_A}{dt^2},$$

$$V_{Ay} = \frac{dy_A}{dt}, \qquad a_{Ay} = \frac{dV_{Ay}}{dt} = \frac{d^2y_A}{dt^2},$$

$$V_A = \sqrt{V_{Ax}^2 + V_{Ay}^2}, \qquad a_A = \sqrt{a_{Ax}^2 + a_{Ay}^2}.$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \qquad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

Poliaus greičio vektoriaus kryptis randama taip:

$$\cos\alpha = \frac{V_{Ax}}{V_A}, \qquad \cos\beta = \frac{V_{Ay}}{V_A}.$$

Poliaus pagreičio vektoriaus kryptis randama taip:

$$\cos\alpha = \frac{a_{Ax}}{a_A}, \qquad \cos\beta = \frac{a_{Ay}}{a_A}.$$

Poliaus judėjimo lygtys $x_A = f_1(t)$, $y_A = f_2(t)$ ir atitinkamos linijinio greičio bei pagreičio išraiškos dažniausiai nesunkiai randamos, tačiau kūno sukimosi lygties $\varphi = f(t)$ sudarymas ir kinematinių sukimosi charakteristikų ω ir ε radimas yra gerokai sudėtingesnis. Todėl nagrinėjant plokščiai judančius kūnus yra taikomi diskretiniai (žingsniniai) skaičiavimo metodai, numatantys žingsninį kūno padėties kitimą. Šių metodų taikymas leidžia rasti judančio kūno bet kuriai padėčiai būdingas kinematinių charakteristikų reikšmes.

2.3.2. PLOKŠČIOSIOS FIGŪROS TAŠKŲ GREIČIŲ VEKTORINĖ PRIKLAUSOMYBĖ

Plokščiasis judėjimas gali būti nagrinėjamas kaip slenkamojo ir sukamojo judėjimų visuma. Žinome, kad kūno bet kurio taško, pavyzdžiui, B, padėtį apibrėžia tokia vektorinė lygtis:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{BA}.$$

Diferencijuodami šios lygybės abi puses pagal laiką, gauname:

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt},$$

arba

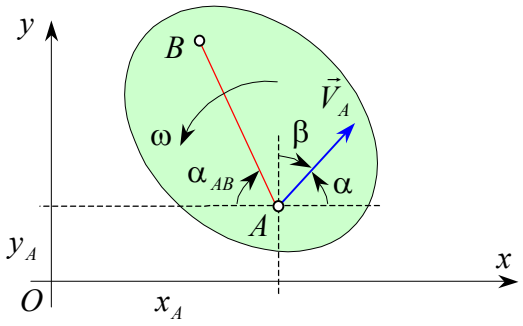
$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}, \tag{43}$$

čia $\vec{V}_B$ – taško B greičio vektorius; $\vec{V}_A$ – poliaus A greičio vektorius; $\vec{V}_{BA}$ – taško B apie polių A sukamojo judėjimo greičio vektorius;

Matome, kad plokščiai judančio kūno bet kurio taško B greitis yra lygus poliaus A slenkamojo ir taško B sukimosi apie polių A greičių vektorinei sumai. Todėl toliau, imdami šią vektorinę priklausomybę, nagrinėsime plokščiai judančio kūno taškų greičiams skaičiuoti taikomus analizinį, momentinių greičių centrų ir greičių plano metodus.

2.3.3. KŪNO TAŠKŲ GREIČIŲ ANALIZINIS SKAIČIAVIMAS

Tegul kūno pjūvis S juda plokštumoje xy (28 pav.).



28 pav. Plokščiai judančio kūno pjūvio judėjimo analizė

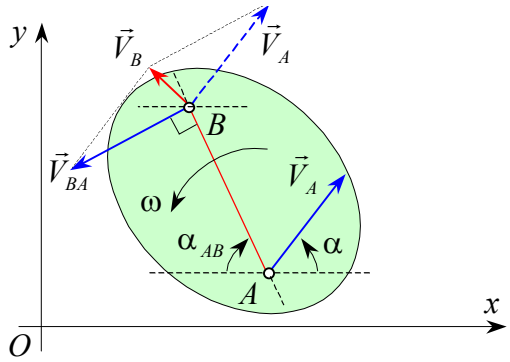
Poliaus A slenkamojo judėjimo greitis $\vec{V}_A$ ir padėtis randami iš slenkamojo judėjimo lygčių $x_A = f_1(t)$ ir $y_A = f_2(t)$, o kūno sukimosi kampinis greitis ω – iš kūno sukimosi lygties $\varphi = f_3(t)$.

Pavaizduosime poliaus A greitį $\vec{V}_A$ ir kūno sukimosi kampinį greitį ω schemoje (28 pav.). Norint rasti pjūvio bet kurio taško, pavyzdžiui, B, greitį, reikia žinoti šio taško padėtį poliaus A atžvilgiu, kitaip tariant, reikia žinoti atkarpos AB didumą ir padėties kampą α_{AB} nagrinėjamuoju laiko momentu.

Pagal (43), taško B greičio vektorius randamas taip:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}.$$

Šios priklausomybės visus vektorius pridėsime atitinkamuose kūno pjūvio taškuose (29 pav.).



29 pav. Plokščiai judančio kūno taškų greičiai

Projektuojame vektorinę priklausomybę $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$ į koordinatines ašis *x* ir *y*:

$$\begin{cases} V_{Bx} = V_A \cos\alpha_A - V_{BA} \sin\alpha_{AB}, \\ V_{By} = V_A \sin\alpha_A - V_{BA} \cos\alpha_{AB}. \end{cases}$$

Išsprendę gautąsias lygtys, randame greičio $\vec{V}_B$ projekcijų į *xy* koordinačių ašis reikšmes. Greičio $\vec{V}_B$ didumas (modulis) randamas taip:

$$V_B = \sqrt{V_{Bx}^2 + V_{By}^2}.$$

Vektoriaus $\vec{V}_B$ kryptį nusako kampai, sudaromi su atitinkamomis koordinačių ašimis:

$$\cos\alpha = \frac{V_{Bx}}{V_B}, \qquad \cos\beta = \frac{V_{By}}{V_B}.$$

Projektuojant vektorinę priklausomybę $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$ į tiesę *AB* (29 pav.), vektoriaus $\vec{V}_{BA}$ projekcija į šią tiesę yra lygi nuliui, nes $\vec{V}_{BA} \perp AB$. Todėl gauname, kad vektorių $\vec{V}_A$ ir $\vec{V}_B$ projekcijos į tiesę *AB* yra lygios:

$$\left[\vec{V}_B\right]_{AB} = \left[\vec{V}_A\right]_{AB}. \qquad (44)$$

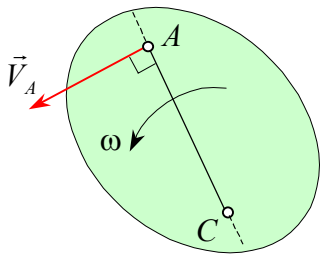
Greičių projekcijų teorema bus tokia: dviejų plokščiosios figūros taškų greičių projekcijos į tiesę, jungiančią šiuos du taškus, yra lygios.

2.3.4. MOMENTINIS GREIČIŲ CENTRAS

Momentiniu greičių centru vadinamas toks plokščiai judančio kūno pjūvio plokštumos taškas, kurio greitis nagrinėjamuoju laiko momentu yra lygus nuliui (svarbu pastebėti, kad kūnas apie tokį tašką gali tik suktis).

Judant plokščiajai figūrai savo plokštumoje, kiekvienas figūros taškas, be abejo, juda tam tikru greičiu. Jeigu bet kurių dviejų taškų greičiai nėra lygiagretūs ir lygūs (šiuo atveju turėsime slenkamąjį judėjimą), tai plokščiojoje figūroje yra taškas, kurio greitis šiuo laiko momentu yra lygus nuliui. Toks taškas vadinamas *momentiniu greičių centru*.

Panagrinėsime, kaip rasti momentinio greičio centro padėtį. Žinome, kad plokščiosios figūros judėjimo lygtys yra $x_A = f_1(t)$, $y_A = f_2(t)$ ir $\varphi = f_3(t)$, pagal kurias žinomais metodais randame poliaus A greitį $\vec{V}_A$ ir plokščiosios figūros sukamojo judėjimo kampinį greitį ω (30 pav.).



30 pav. Momentinis greičių centras

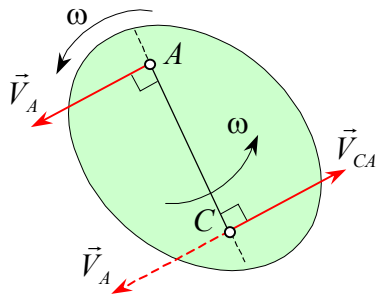
Pasuksime greičio vektorių $\vec{V}_A$ apie tašką A stačiuoju kampu kampinio greičio ω kryptimi ir atidėsime nuo taško A atkarpą:

$$AC = \frac{V_A}{\omega}.$$

Taškas C ir yra figūros momentinis greičių centras. Įsitikinsime, kad jo greitis lygus nuliui. Žinome, kad bet kokių plokščiosios figūros taškų greičiai turi tam tikrą vektorinę priklausomybę. Imant kaip polių tašką A, užrašysime taško C greičio vektorinę išraišką:

$$\vec{V}_C = \vec{V}_A + \vec{V}_{CA}.$$

Vykstant sukamajam taško C judėjimui apie polių A, taško C greitis lygus kampinio greičio ω ir atstumo nuo taško C iki poliaus A sandaugai, t. y. $V_{CA} = \omega \cdot CA$, ir nukreiptas kampinio greičio kryptimi statmenai atkarpai CA (31 pav.).



31 pav. Momentinio greičių centro greitis

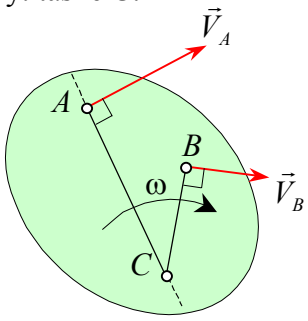
Atstumas $AC = CA = \frac{V_A}{\omega}$. Įrašysime atkarpos CA išraišką į greičio $\vec{V}_{CA}$ reikšmę ir gausime:

$$V_{CA} = \omega \cdot CA = \omega \cdot \frac{V_A}{\omega} = V_A.$$

Matome, kad taško C sukamojo judėjimo apie polių A greičio $\vec{V}_{CA}$ reikšmė lygi poliaus A greičiui ir šis greičio vektorius nukreiptas kampinio greičio kryptimi, t. y. priešingai poliaus greičiui. Jų geometrinė suma lygi nuliui. Taigi taško C greitis lygus nuliui, t. y. $\vec{V}_C = 0$. Iš to išplaukia, kad taškas C yra figūros momentinis greičių centras.

Galime pažymėti, kad taško A greičio vektorius yra statmenas atkarpai iki momentinio greičio centro. Bet taip pat galima pasakyti, kad momentinis greičių centras guli ant statmens, kuris pravestas iš taško statmenai greičiui.

Vadinasi, jeigu turėsime plokščiosios figūros bet kokių dviejų taškų A ir B greičių reikšmes $\vec{V}_A$ ir $\vec{V}_B$ (32 pav.), galėsime teigti, kad figūros momentinis greičių centras bus statmenų taškų greičiams susikirtime, t. y. taške C.



32 pav. Kūno taškų greičiai

Įrodysime, kad taško C greitis lygus nuliui. Pradžioje tarsime, kad taškas C turi tam tikrą greitį. Žinome, kad plokščiosios figūros bet kokių dviejų taškų greičių projekcijos į tiesę, pravestą per šiuos taškus, yra lygios. Suprojektuosime taškų A ir C greičius į tiesę AC:

$$\left[\vec{V}_A\right]_{AC} = \left[\vec{V}_C\right]_{AC}.$$

Bet taško A greitis yra statmenas atkarpai AC, ir jo projekcija į tiesę AC yra lygi nuliui, t. y. $\left[\vec{V}_A\right]_{AC} = 0$. Taško C greičio projekcija į tiesę AC taip pat turi būti lygi nuliui, t. y. $\left[\vec{V}_B\right]_{AC} = 0$. Greičio vektoriaus $\vec{V}_C$ projekcija į tiesę AC lygi nuliui, kai greičio vektorius bus statmenas tiesei AC arba lygus nuliui, t. y.

$$1.\ \vec{V}_C \perp AC;$$

$$2.\ V_C = 0.$$

Nagrinėdami taškų B ir C greičių priklausomybes, taip pat galime padaryti išvadas, kad taško C greičio vektorius turi būti statmenas tiesei BC, arba šis greitis lygus nuliui, t. y.

$$1.\ \vec{V}_C \perp BC;$$

$$2.\ V_C = 0.$$

Bet tas pats greičio vektorius $\vec{V}_C$ negali būti statmenas dviem susikertančioms tiesėms AC ir BC. Darome išvadą, kad taško C greitis yra lygus nuliui, t. y. $V_C = 0$. Iš čia išplaukia, kad taškas C yra plokščiosios figūros momentinis greičių centras.

2.3.5. TAŠKŲ GREIČIŲ SKAIČIAVIMAS NAUDOJANT MOMENTINĮ GREIČIŲ CENTRĄ

Parašysime bet kokio plokščiosios figūros taško B greičio vektorinę išraišką, pasirinkdami poliumi momentinį greičių centrą C.

$$\vec{V}_B = \vec{V}_C + \vec{V}_{BC}.$$

Tačiau momentinio greičio centro C greitis lygus nuliui. Tada išplaukia išvada, kad taško B absoliutusis greitis $\vec{V}_B$ lygus greičiui, kurį taškas B turės besisukdamas apie polių C, t. y.

$$\vec{V}_B = \vec{V}_{BC}.$$

Sukimosi greitis skaičiuojamas kaip kampinio greičio ir atstumo iki sukimosi ašies sandauga. Taigi $V_{BC} = \omega \cdot BC$ arba, įvertinant, kad $V_B = V_{BC}$, gauname, kad absoliutusis taško B greitis lygus figūros kampinio greičio ir atstumo iki momentinio greičio centro sandaugai, t. y.

$$V_{BC} = \omega \cdot BC\ .$$

Bet kuriam kitam plokščiosios figūros taškui A turėsime tą patį:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_C + \vec{V}_{AC} = \vec{V}_{AC} \quad \text{ir} \quad V_A = \omega \cdot AC\,.$$

Parašysime greičių santykį: $\dfrac{V_B}{V_A} = \dfrac{\omega \cdot BC}{\omega \cdot AC} = \dfrac{BC}{AC}$. Iš čia gausime:

$$\frac{V_B}{BC} = \frac{V_A}{AC}. \tag{45}$$

Galima daryti išvadą: plokščiajame judėjime taškų linijiniai greičiai proporcingi atstumams iki plokščiosios figūros momentinio greičio centro.

Taškų atstumus iki greičio centro galima apskaičiuoti analiziškai arba, kai brėžinys nubraižytas laikantis mastelio, tiesiog išmatuoti liniuote brėžinyje. Išmatuotą atkarpos ilgį padauginę iš mastelio, gausime tikrąjį atstumą.

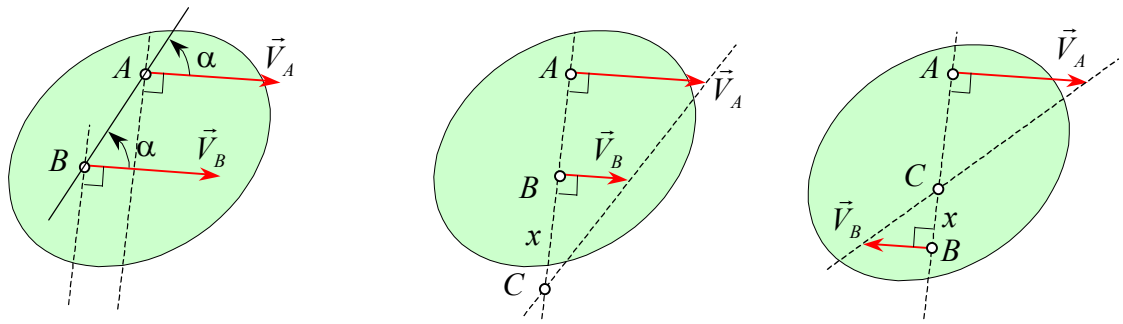
Figūros sukimosi apie momentinį greičio centrą kampinis greitis gali būti rastas, jeigu žinomą taško greitį $\vec{V}_A$ padalysime iš atstumo iki momentinio greičių centro AC, t. y.

$$\omega = \frac{V_A}{AC}.$$

Kampinis greitis bus nukreiptas taško linijinio greičio kryptimi (32 pav.). Tada bet kurio kito plokščiosios figūros taško linijinis greitis gali būti rastas kaip jau žinomo figūros kampinio greičio ω ir atstumo nuo šio taško iki momentinio greičių centro sandauga, t. y. $V_B = \omega \cdot BC,$ ir nukreiptas statmenai šiai atkarpai kampinio greičio kryptimi.

Remiantis momentinio greičių centro sąvoka ir taškų greičių santykiais, nagrinėsime momentinių greičių centrų radimą atskirais atvejais.

Tegul plokščiosios figūros du taškai turi lygiagrečius greičius (33 a pav.).



a) b) c)

33 pav. Momentinio greičių centro padėtis

Praveskime per taškus A ir B statmenis greičiams. Šie statmenys bus lygiagretūs. Darome išvadą, kad momentinis greičių centras bus begalybėje.

Per taškus A ir B pravesime tiesę ir užrašysime plokščiosios figūros dviejų taškų greičių projekcijų į šią tiesę lygybę:

$$V_B \cos\alpha = V_A \cos\alpha ,$$

iš kurios gausime, kad:

$$V_B = V_A .$$

Iš čia išplaukia išvada: kai plokščioji figūra juda savo plokštumoje ir dviejų bet kokių taškų greičiai yra lygiagretūs, tai šie greičiai turi būti lygūs. Bet jeigu taškų greičių vektoriai lygūs, turime slenkamąjį judėjimą. Plokščiosios figūros judėjimą šiuo atveju galima pavadinti momentiniu slenkamuoju judėjimu.

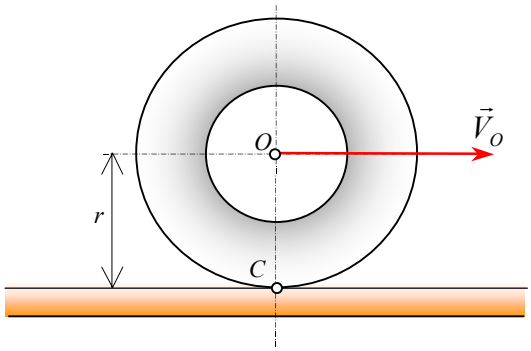
Galima padaryti išvadą: kai turime plokščiosios figūros momentinį slenkamąjį judėjimą, tai visų šios figūros taškų greičiai šiuo laiko momentu yra lygūs ir lygiagretūs.

Jeigu taškų A ir B greičiai yra lygiagretūs ir taškai guli viename statmenyje taškų greičiams, tai gali būti tokie atvejai: taškų greičiai nukreipti viena (33 b pav.) arba priešinga kryptimi (33 c pav.).

Išvedę taškuose A ir B statmenis taškų greičiams matome, kad statmenys susilieja ir negalima rasti statmenų susikirtimo vietos. Tačiau žinome, kad taškų greičiai proporcingi atstumams iki momentinio greičių centro. Todėl, paėmus nežinomą atkarpą x pateiktai schemai (33 b pav.), galima užrašyti: $\frac{V_A}{AB + x} = \frac{V_B}{x}$, o 33 c pav. pateiktai schemai: $\frac{V_A}{AB - x} = \frac{V_B}{x}$.

Žinodami taškų greičių reikšmes V_A ir V_B, taip pat atstumą AB tarp taškų, randami atstumai nuo taškų iki momentinių greičių centro bei momentinio greičių centro padėtis.

Tuo atveju, jeigu plokščioji figūra judėjimo metu kontaktuoja su nejudamu paviršiumi ir neslysta, kontakto vieta yra plokščiosios figūros momentinis greičių centras. Pavyzdžiui, automobilio ratas rieda keliu (34 pav.).



34 pav. Riedančio kūno momentinis greičių centras

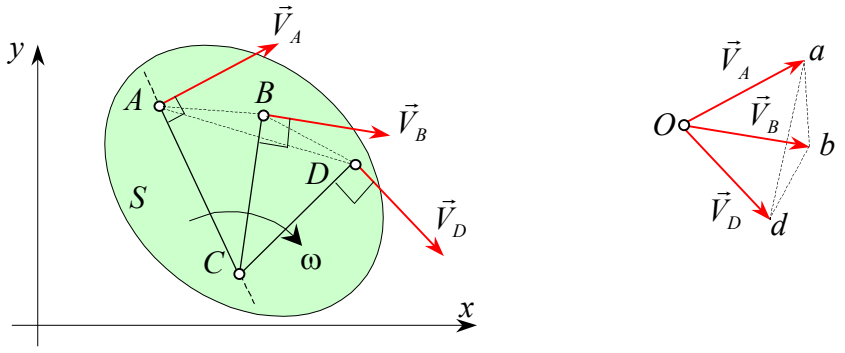
Šiuo atveju taškas C kontakto vietoje yra rato momentinis greičių centras.

Išvados:

- kūno kampinis greitis kiekvienu momentu lygus pjūvio *S* bet kurio taško greičiui, padalytam iš to taško atstumo iki momentinio greičių centro, ir bus nukreiptas taško linijinio greičio kryptimi;
- kūno bet kurio taško greičiui rasti reikia pjūvio *S* kampinį greitį padauginti iš to taško atstumo iki momentinio greičių centro. Taško linijinio greičio vektorius yra statmenas atkarpai iki momentinio greičių centro ir nukreiptas kampinio greičio kryptimi.

2.3.6. GREIČIŲ PLANAS

Tegul kūno pjūvis *S* juda plokštumoje *xy* (35 a pav.)



a) b)

35 pav. Greičių planas

Žinome, kad taškų *A*, *B*, *D* greičiai proporcingi atstumams iki momentinio greičio centro *C*, statmeni šiems atstumams ir nukreipti figūros kampinio greičio kryptimi, t. y.

$$\frac{V_A}{AC} = \frac{V_B}{BC} = \frac{V_D}{DC} = \omega.$$

Taip pat žinome, kad bet kurių dviejų taškų, pavyzdžiui, *A* ir *B* greičiai susiję vektorine priklausomybe:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}.$$

Nubraižysime šią priklausomybę, įvertindami greičių mastelį μ_V (35 b pav.). Schemoje atkarpa $Oa = \frac{V_A}{\mu_V}$, atkarpa $Ob = \frac{V_B}{\mu_V}$. Iš schemos išplaukia, kad $\overrightarrow{Ob} = \overrightarrow{Oa} + \overrightarrow{ab}$ ir atkarpa $\overrightarrow{ab}$ atvaizduoja greitį $\vec{V}_{BA}$ tuo pačiu masteliu, t. y. $ab = \frac{V_{BA}}{\mu_V}$.

Taško *B* sukimosi apie polių *A* greitis $\vec{V}_{BA}$ statmenas atkarpai *AB*. Galima daryti išvadą, kad ir atkarpa $\overrightarrow{ab}$ statmena atkarpai *AB*.

Taškų *B* ir *D* greičiai susiję analogiška vektorine priklausomybe:

$$\vec{V}_D = \vec{V}_B + \vec{V}_{DB}.$$

Vektorius pavaizdavę grafiškai, turėsime $\overrightarrow{Od} = \overrightarrow{Ob} + \overrightarrow{bd}$. Kaip ir anksčiau, atkarpa $\overrightarrow{bd}$ statmena atkarpai *BD*.

Įvertinant taškų *A* ir *D* greičių vektorinę priklausomybę

$$\vec{V}_D = \vec{V}_A + \vec{V}_{DA},$$

taip pat galima padaryti išvadą, kad schemos atkarpa $\overrightarrow{ad}$ statmena pjūvio figūros atkarpai *AD*.

Gauname, kad trikampio *abd* kraštinės yra statmenos trikampio *ABD* atitinkamoms kraštinėms. Tokiu atveju šie trikampiai yra panašūs.

O jeigu figūros (trikampiai) panašios, tai atitinkamos kraštinės yra proporcingos:

$$\frac{ab}{AB} = \frac{bd}{BD} = \frac{ad}{AD}.$$

Įvertinant tai, kad vardiklyje yra atitinkamo taško sukimosi apie polių greitis, gautą išraišką galima parašyti taip:

$$\frac{V_{AB}}{AB} = \frac{V_{BD}}{BD} = \frac{V_{AD}}{AD}.$$

Bet kurio taško sukimosi apie polių greičio santykis su atkarpos ilgiu iki poliaus yra pjūvio kampinis greitis:

$$\omega = \frac{V_{AB}}{AB} = \frac{V_{BD}}{BD} = \frac{V_{AD}}{AD}. \qquad (42)$$

Grafinis pjūvio taškų greičių vaizdavimas (35 b pav.) vadinamas greičių planu. Greičių planas turi pradžios tašką *O*, spindulius *Oa*, *Ob*, *Od* ir viršūnes – taškus *a*, *b*, *d*.

Greičių plane spindulių ilgiai – tai atitinkamų taškų absoliutieji greičiai greičių plano masteliu μ_V.

Atkarpos *ab*, *bd*, *ad*, jungiančios greičių plano viršūnes, yra atitinkamų taškų sukimosi apie polių greičiai.

Greičių planas pasižymi tokiomis savybėmis:

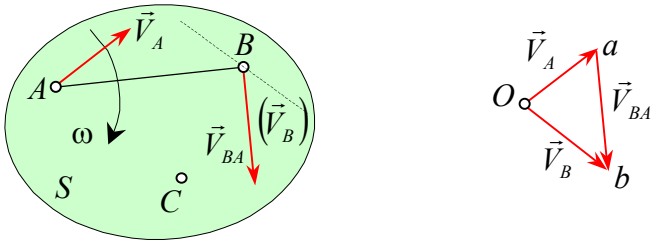
1. Greičių plano geometrinė figūra proporcinga pjūvio taškų geometrinei figūrai ir pasukta 90° kampinio greičio kryptimi;

2. Kūno pjūvio *S* bet kurio taško (*A*, *B*, *D*) greitį pasirinktu masteliu vaizduoja atitinkamas spindulys (*Oa*, *Ob*, *Od*);

3. Kūno pjūvio bet kurių dviejų taškų sukamojo judėjimo greitis (V_{BA}, V_{BD}, V_{AD}) vaizduojamas greičių plano atkarpomis tarp atitinkamų greičio planų viršūnių (*ba*, *bd*, *ad*).

2.3.7. TAŠKŲ GREIČIŲ SKAIČIAVIMAS NAUDOJANT GREIČIŲ PLANĄ

Kūno pjūvio S taškų greičių planui nubraižyti reikia žinoti vieno taško greičio dydį ir kryptį bei kitų taškų greičio kryptis (36 a pav.).



a) b)

36 pav. Greičių planas

Tarkime, kad žinomas taško A greičio didumas ir kryptis bei taško B greičio kryptis. Norėdami nubraižyti greičių planą, parašome taškų A ir B greičių vektorinę priklausomybę:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}.$$

Pasirenkame greičių mastelį μ_V ir plano pradžios tašką O (36 b pav.). Per tašką O brėžiame tiesę, lygiagrečią su vektoriumi $\vec{V}_A$, ir atidedame atkarpą $Oa = \dfrac{V_A}{\mu_V}$.

Per tašką a brėžiame tiesę ab, lygiagrečią su vektoriumi $\vec{V}_{BA}$, o per tašką O – tiesę Ob, lygiagrečią su vektoriumi $\vec{V}_B$. Šių tiesių susikirtimo taškas b yra vektorių $\vec{V}_B$ ir $\vec{V}_{BA}$ viršūnės. Iš greičių plano pradžios pravestas į tašką b spindulys Ob atvaizduoja taško B absoliutųjį greitį

$$V_B = Ob \cdot \mu_V.$$

Taško B greitis nukreiptas iš greičio plano pradžios O į viršūnę b. Galime figūros taške B parodyti taško greitį $\vec{V}_B$ (37 a pav.).

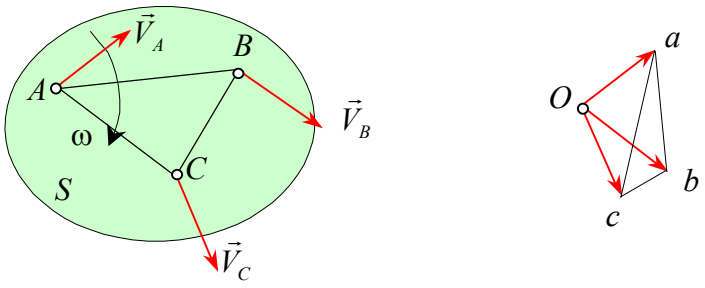
Greičio plano atkarpa ab yra taško B sukimosi apie polių A greitis $\vec{V}_{BA}$, jo modulis lygus:

$$V_{BA} = ab \cdot \mu_V.$$

Greičių plane greitis $\vec{V}_{BA}$ nukreiptas į tašką b. Pridėjus figūros ABC taške B greitį $\vec{V}_{BA}$, galima rasti kampinio greičio ω kryptį. Kampinio greičio reikšmė apskaičiuojama iš formulės:

$$\omega = \frac{V_{BA}}{AB}.$$

Analogiškai randamas kito figūros taško C greitis. Greičių plane (37 b pav.) turime figūros taškų A ir B greičių vektorių grafinį vaizdą.



a) b)

37 pav. Greičių planas

Taškų B ir C greičių vektorinė priklausomybė:

$$\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{CB}. \tag{46}$$

Žinomas poliaus B greitis ir taško C padėtis. Todėl žinoma ir greičio $\vec{V}_{CB}$ padėtis. Parašysime taško C greičio vektorinę priklausomybę imdami poliumi tašką A:

$$\vec{V}_C = \vec{V}_A + \vec{V}_{CA}. \tag{47}$$

Vektorinę priklausomybę (46) perneškime į greičių planą. Tam reikės prie taško B greičio pridėti greitį $\vec{V}_{CB}$, kuris yra statmenas atkarpai BC. Tam greičio plane iš taško b brėžiame tiesę, kuri statmena atkarpai BC. Ant šitos linijos turi būti taškas c.

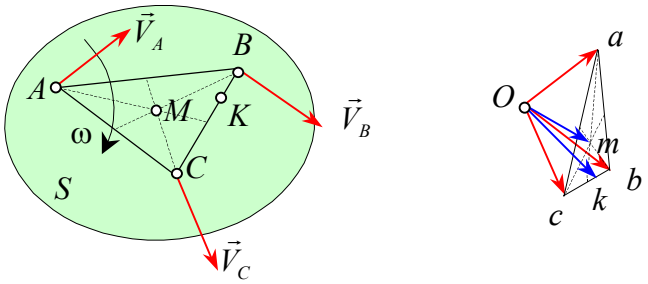
Perneškime vektorinę priklausomybę (47) į greičių planą. Tam iš taško a brėžiame tiesę, kuri yra statmena atkarpai AC. Ant šitos linijos taip pat turi būti taškas c.

Dviejų tiesių susikirtime gauname tašką c, į kurį iš greičių plano pradžios brėžiame spindulį Oc. Padauginę atkarpos Oc reikšmę iš greičio plano mastelio μ_V, gauname taško C greitį:

$$V_C = Oc \cdot \mu_V.$$

Galime pernešti iš greičio plano taško c greičio vektorių į figūros tašką C (37 a pav.). Remdamiesi greičių plano savybėmis, nustatysime bet kurio plokščiosios figūros ABC taško greitį, pavyzdžiui, figūros ABC masės centro M greitį.

Prieš tai turi būti nubraižytas figūros taškų greičių planas (38 a pav.)



a) b)

38 pav. Greičių planas

Kadangi trikampiai *ABC* ir *abc* panašūs, taško *M* padėtį atitinka greičių plano taškas *m*. Sujungę taškus *O* ir *m*, gauname taško *M* greitį, kuris nukreiptas iš greičio plano pradžios *O* į viršūnę *m* ir lygus:

$$V_M = Om \cdot \mu_V .$$

Jeigu taškas *K* yra atkarpoje *BC* ir $BK = \frac{1}{3}BC$, tai greičių plane taškas *k* taip pat bus atkarpoje *bc* ir $bk = \frac{1}{3}bc$. Taško *K* greitis:

$$V_K = Ok \cdot \mu_V .$$

2.3.8. PLOKŠČIOSIOS FIGŪROS TAŠKŲ PAGREIČIAI

Prisiminsime, kad plokščiai judančio kūno taškų linijiniai greičiai susiję vektorine priklausomybe:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA},$$

t. y. bet kurio taško greitis susideda iš greičio, kurį taškas turės, vykstant slenkamajam judėjimui, kartu su laisvai pasirinktu poliumi *A*, prie kurio pridedamas greitis, kurį taškas turės sukdamasis apie šį polių.

Diferencijuodami laiko atžvilgiu greičio vektorinę išraišką, gauname:

$$\frac{d\vec{V}_B}{dt} = \frac{d\vec{V}_A}{dt} + \frac{d\vec{V}_{BA}}{dt},$$

arba

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}.$$

Galima padaryti išvadą, kad plokščiosios figūros bet kurio taško *B* pagreitis susideda iš pagreičio, kurį taškas turės, vykstant slenkamajam judėjimui, kartu su laisvai pasirinktu

poliumi A, prie kurio pridedamas pagreitis, įgytas taškui sukantis apie šį polių. Vykstant sukamajam judėjimui, taško absoliutusis pagreitis susideda iš normalinio ir tangentinio pagreičių. Tada galima užrašyti, kad

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{\tau}_{BA} + \vec{a}^{n}_{BA}. \tag{48}$$

Gavome kūno taškų pagreičių vektorinę priklausomybę.

Formulėje (48):

$$a^{n}_{BA} = \omega^2 AB,$$

$$a^{\tau}_{BA} = \varepsilon AB.$$

Apskaičiuosime reikalingus dydžius. Plokščiai judančiam kūnui turime:

$$\begin{cases} x_A = f_1(t), \\ y_A = f_2(t), \\ \varphi = f_3(t). \end{cases}$$

Pirmą kartą diferencijuodami lygtis, gauname:

$$V_{Ax} = \frac{dx_A}{dt}, \quad V_{Ay} = \frac{dy_A}{dt}, \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Dar kartą diferencijavę, turėsime:

$$a_{Ax} = \frac{dV_{Ax}}{dt}, \quad a_{Ay} = \frac{dV_{Ay}}{dt}, \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt},$$

čia a_{Ax}, a_{Ay} – poliaus pagreičio projekcijos į koordinačių ašis.

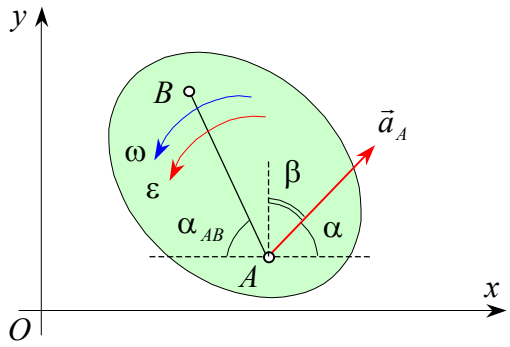
Poliaus pagreičio modulis

$$a_A = \sqrt{a^2_{Ax} + a^2_{Ay}}$$

ir krypties kosinusai

$$\cos\alpha = \frac{a_{Ax}}{a_A}, \quad \cos\beta = \frac{a_{Ay}}{a_A}.$$

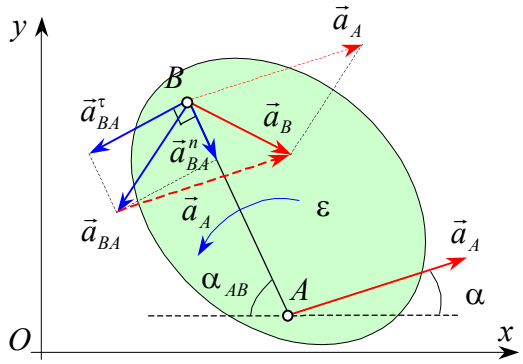
Parodysime schemoje poliaus A pagreitį $\vec{a}_A$ ir kūno kinematines charakteristikas – kampinį greitį ω ir kampinį pagreitį ε (39 pav.)



39 pav. Plokščiai judančio kūno taškų pagreičiai

Žinodami kūno kampinį greitį ir pagreitį, galime rasti taško B normalinį ir tangentinį pagreičius, jam sukantis apie polių A.

Normalinis pagreitis $a_{BA}^{n} = \omega^2 AB$ nukreiptas nuo taško B į polių A. Tangentinis pagreitis $a_{BA}^{\tau} = \varepsilon AB$ nukreiptas statmenai atkarpai AB kampinio pagreičio ε kryptimi (40 pav.).



40 pav. Plokščiai judančio kūno taškų pagreičiai

Projektuojame vektorinę lygtį $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{n} + \vec{a}_{BA}^{\tau}$ į koordinačių ašis:

$$\begin{cases} a_{Bx} = a_A \cos\alpha + a_{BA}^{n} \cos\alpha_{AB} - a_{BA}^{\tau} \sin\alpha_{AB}, \\ a_{By} = a_A \sin\alpha - a_{BA}^{n} \sin\alpha_{AB} - a_{BA}^{\tau} \cos\alpha_{AB}. \end{cases}$$

Pagreičio $\vec{a}_B$ modulis:

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2}$$

ir krypties kosinusai:

$$\cos\alpha_B = \frac{a_{Bx}}{a_B}, \quad \cos\beta_B = \frac{a_{By}}{a_B}.$$

2.3.9. TAŠKŲ PAGREIČIŲ SKAIČIAVIMAS NAUDOJANT MOMENTINĮ PAGREIČIŲ CENTRĄ

Momentiniu pagreičių centru vadinamas toks plokščiai judančio kūno pjūvio plokštumos taškas C, kurio pagreitis tam tikru laiko momentu lygus nuliui.

Taško C padėčiai rasti turi būti žinomi kūno kampinis greitis ω, kampinis pagreitis ε ir vieno taško A pagreitis $\vec{a}_A$.

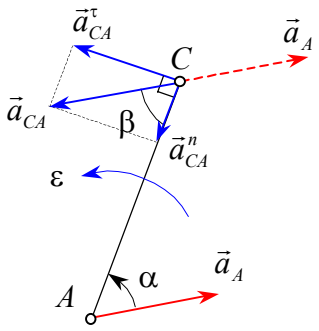
Taško C pagreičiui galima parašyti:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_{CA}.$$

Bet momentinio pagreičio centro pagreitis $a_C = 0$. Tada gauname:

$$\vec{a}_A + \vec{a}_{CA} = 0. \tag{49}$$

Iš (49) lygties išplaukia, kad $\vec{a}_A = -\vec{a}_{CA}$, t. y. pagreičiai $\vec{a}_A$ ir $\vec{a}_{CA}$ yra vienodo dydžio, lygiagretūs ir priešingai nukreipti. Šią sąlygą pavaizduojame grafiškai (41 pav.).



41 pav. Plokščiai judančio kūno taškų pagreičiai

Iš 41 pav. matyti, kad

$$a_A = a_{CA} = \sqrt{\left(a^n_{CA}\right)^2 + \left(a^{\tau}_{CA}\right)^2} = AC\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} \tag{50}$$

ir

$$\alpha = \beta = arctg\frac{a^{\tau}_{CA}}{a^n_{CA}} = arctg\frac{\varepsilon}{\omega^2}. \tag{51}$$

Iš (50) sąlygos apskaičiuojame atkarpos AC ilgį:

$$AC = \frac{a_A}{\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}},$$

o iš (51) – atkarpos AC posvyrio kampą $\alpha = arctg\frac{\varepsilon}{\omega^2}$.

Kampas α turi būti atidėtas ε kryptimi.

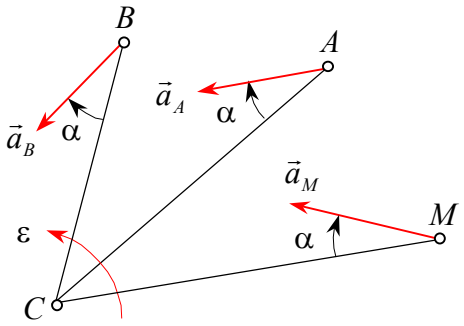
Kai žinomas taško atstumas iki pagreičių centro, o nežinomas pagreičio modulis, formulę (50) taikome moduliui apskaičiuoti, pvz.:

$$a_M = MC\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}, \tag{50}$$

čia MC – taško M atstumas iki pagreičių centro. Vektoriaus $\vec{a}_M$ kampas su atkarpa MC visada tas pats $\alpha = arctg\frac{\varepsilon}{\omega^2}$.

Iš sąlygos (50) išplaukia, kad plokščiosios figūros taškų pagreičiai yra proporcingi atstumams iki momentinio pagreičių centro.

Iš sąlygos (51) turime – taškų pagreičiai pasukti nuo atkarpų, jungiančių taškus su momentiniu pagreičių centru, prieš ε kryptį vienodu kampu (42 pav.)



42 pav. Plokščiai judančio kūno taškų pagreičiai

Taškų pagreičių moduliai:

$$a_A = CA\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2},$$

$$a_B = CB\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2},$$

$$a_M = CM\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}.$$

Paėmę pagreičių santykius, gauname:

$$\frac{a_M}{CM} = \frac{a_A}{CA} = \frac{a_B}{CB}.$$

t. y. plokščiosios figūros taškų pagreičiai proporcingi atstumams iki momentinio pagreičių centro. Be to, 42 pav. matome, kad visų taškų pagreičių vektoriai sudaro su atkarpomis iki momentinio pagreičio centro vienodus kampus, kurių reikšmės skaičiuojamos pagal vieną formulę ir kurie nukreipti prieš kampinio pagreičio ε kryptį.

2.3.10. TAŠKŲ PAGREIČIŲ SKAIČIAVIMAS NAUDOJANT PAGREIČIŲ PLANĄ

Žinome, kad, vykstant plokščiajam judėjimui, bet kurių plokščiosios figūros dviejų taškų pagreičiai yra susiję vektorine priklausomybe:

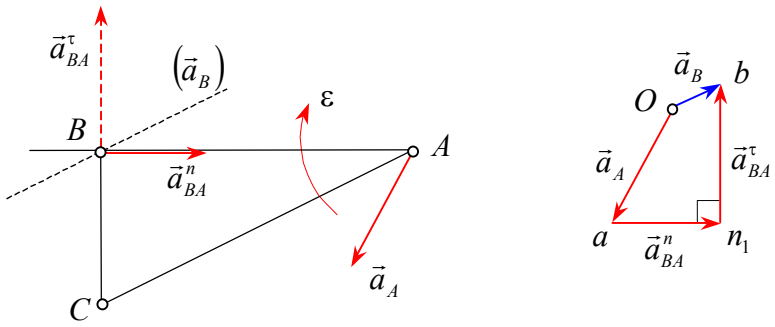
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{\tau}_{BA} + \vec{a}^{n}_{BA}, \qquad (52)$$

čia $\vec{a}_A$ – pjūvio poliaus A pagreitis, kuris būna žinomas arba lengvai randamas;

$\vec{a}^{n}_{BA}$ – taško B sukimosi apie polių A normalinis pagreitis, kuris visada nukreiptas iš taško B į polių A;

$\vec{a}^{\tau}_{BA}$ – taško B sukimosi apie polių A tangentinis pagreitis, nukreiptas statmenai atkarpai AB kampinio pagreičio kryptimi.

Nagrinėsime taško B pagreičio skaičiavimą grafiniu būdu.



a) b)

43 pav. Plokščiai judančio kūno taškų pagreičių planas

Tarkime, kad žinome plokščiosios figūros ABC (43 a pav.) taško A pagreitį $\vec{a}_A$, figūros sukimosi kampinį greitį ω ir taško B pagreičio $\vec{a}_B$ veikimo liniją. Paanalizuokime vektorinės priklausomybės (52) narius. Taško B sukimosi apie polių A normalinis pagreitis randamas iš formulės:

$$\vec{a}^{n}_{BA} = \omega^2 AB.$$

Šis pagreitis nukreiptas nuo taško B į polių A.

Taip pat žinome, kad taško B tangentinis pagreitis $\vec{a}^{\tau}_{BA}$ nukreiptas statmenai normaliniam pagreičiui. Parinkę pagreičio mastelį μ_a, iš laisvai pasirinktojo poliaus O (43 b pav.) atidedame atkarpą $Oa = \dfrac{a_A}{\mu_a}$, lygiagrečią su taško A pagreičiu $\vec{a}_A$. Iš taško a pagreičio $\vec{a}^{n}_{BA}$ kryptimi atidedame atkarpą $an_1 = \dfrac{a^{n}_{BA}}{\mu_a}$. Iš taško n_1 brėžiame tiesę, statmeną atkarpai an_1, t. y. tangentinio pagreičio $\vec{a}^{\tau}_{BA}$ kryptimi. Toliau iš taško O brėžiame tiesę, lygiagrečią su pagreičio $\vec{a}_B$ veikimo linija. Šių tiesių susikirtimo vieta – taškas b. Iš taško O pravedame vektorių $\overrightarrow{Ob}$.

Galime užrašyti, kad

$$\overrightarrow{Ob} = \overrightarrow{Oa} + \overrightarrow{an_1} + \overrightarrow{n_1 b}.$$

Palyginę šią atkarpų vektorinę priklausomybę su pagreičių vektorine priklausomybe (52), galime daryti išvadą, kad atkarpa $\overrightarrow{Ob}$ yra taško B pagreitis atitinkamu pagreičių masteliu, t. y.

$$a_B = Ob \cdot \mu_a.$$

Atkarpa $\overrightarrow{n_1 b}$ – tai taško B tangentinis pagreitis $a^{\tau}_{BA} = n_1 b \cdot \mu_a$, nukreiptas į tašką b. Pagreičių grafikas, parodytas 43 b pav., vadinamas *pagreičių planu*.

Pjūvio kampinis pagreitis gali būti rastas remiantis pagreičio planu iš formulės:

$$\varepsilon = \frac{a^{\tau}_{BA}}{AB} = \frac{n_1 b \cdot \mu_a}{AB}.$$

Atkarpos $n_1 b$ ilgis iš pagreičių plano išmatuojamas liniuote. Kampinio pagreičio kryptis nustatoma pagal tangentinio pagreičio a^{τ}_{BA} kryptį.

Kai taškas B juda apie polių A, o taškų pagreičiai susiję vektorine priklausomybe (52), tangentinis pagreitis a^{τ}_{BA} nukreiptas iš normalinio pagreičio a^{n}_{BA} vektoriaus galo į taško B pagreičio a_B vektoriaus galą. Pagreičių plane tangentinis pagreitis a^{τ}_{BA} atvaizduotas atkarpa $\overrightarrow{n_1 b}$ ir nukreiptas iš taško n_1 į tašką b.

Pridėję tangentinį pagreitį $\vec{a}^{\tau}_{BA}$ figūros taške B ir įvertinę pagreičių plane jo kryptį, pagal tangentinį pagreitį galime nustatyti ir pjūvio kampinio pagreičio kryptį.

Jeigu žinosime pjūvio dviejų bet kokių taškų pagreičius, pavyzdžiui, $\vec{a}_A$ ir $\vec{a}_B$, tai galėsime rasti bet kokio taško C, kuris neguli ant tiesės AB, pagreitį (44 a pav.).

Parašysime vektorines taškų pagreičių priklausomybes

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}^{n}_{CA} + \vec{a}^{\tau}_{CA}$$

ir

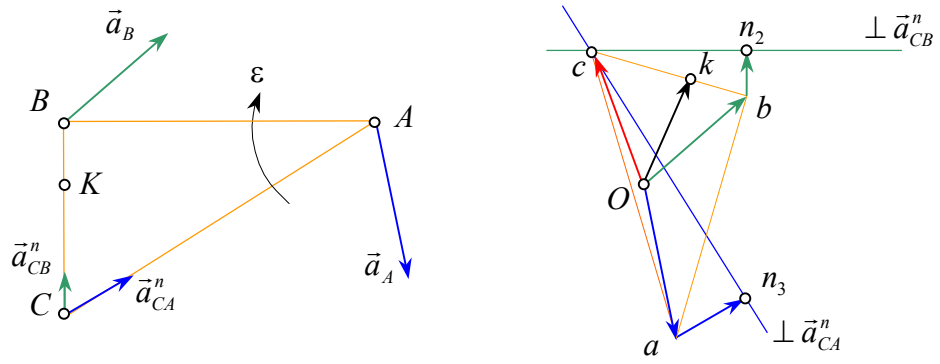
$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}^{n}_{CB} + \vec{a}^{\tau}_{CB}.$$

Randame normalinius pagreičius:

$$a^{n}_{CA} = \omega^2 AC,$$

$$a^{n}_{CB} = \omega^2 BC.$$

Šių pagreičių kryptys yra žinomos – jie nukreipti iš taško C į savo polius, t. y. $\vec{a}^{n}_{CA}$ – į polių A, o $\vec{a}^{n}_{CB}$ – į polių B. Tangentiniai pagreičiai nukreipti statmenai savo normaliniams pagreičiams.



44 pav. Plokščiai judančio kūno taškų pagreičių planas

Pagreičių plane (44 b pav.) iš taško a atidedame normalinio pagreičio $\vec{a}^n_{CA}$ kryptimi atkarpą $an_3 = \dfrac{a^n_{CA}}{\mu_a}$ ir iš taško n_3 pravedame statmeną tiesę, kuri yra lygiagreti su tangentiniu pagreičiu $\vec{a}^\tau_{CA}$. Iš taško b pagreičių plane atidedame normalinio pagreičio $\vec{a}^n_{CB}$ kryptimi atkarpą $bn_2 = \dfrac{a^n_{CB}}{\mu_a}$ ir iš taško n_2 brėžiame statmeną tiesę, kuri yra lygiagreti su tangentiniu pagreičiu $\vec{a}^\tau_{CB}$. Tiesės susikerta taške c. Iš pagreičių plano pradžios O brėžiame tiesę Oc, kurį vaizduoja taško C absoliutųjį pagreitį, t. y.

$$a_C = Oc \cdot \mu_a .$$

Jeigu pagreičių plane sujungsime taškus a, b ir c, galėsime padaryti išvadą, kad gautoji geometrinė figūra (šiuo atveju – trikampis) yra panaši į turimą figūrą ABC (taip pat trikampį).

Užrašysime trikampių panašumo sąlygas:

$$\frac{ab}{AB} = \frac{bc}{BC} = \frac{ac}{AC}.$$

Iš čia išplaukia, kad šios panašios figūros atitinkamos kraštinės yra proporcingos. Taigi bet kurio plokščiosios figūros taško pagreitį galima rasti pagreičių plane nubrėžus panašią figūrą ir šios figūros atitinkamą tašką sujungus su plano poliumi.

Spindulio dydis ir kryptis nurodys tam tikro taško pagreitį pagreičio plano masteliu.

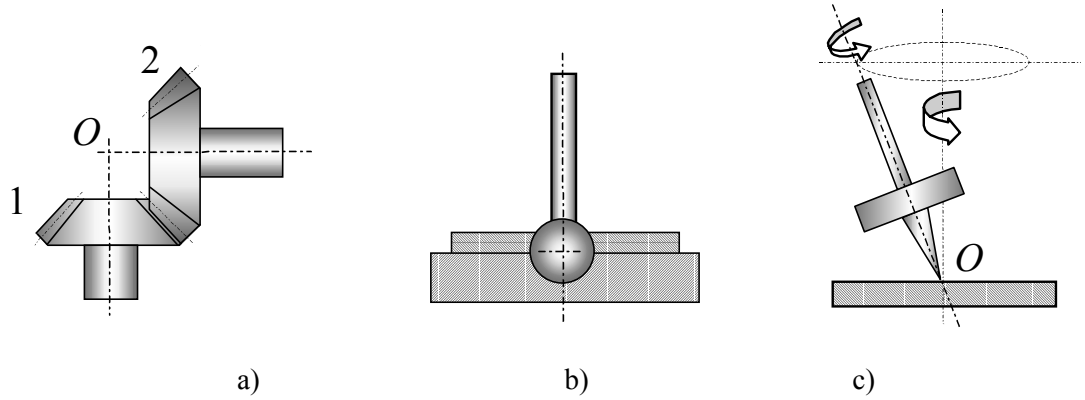
Pavyzdžiui, taškas K yra tiesėje BC ir $BK = \dfrac{1}{3}BC$. Pagreičių plane taškas k yra tiesėje bc ir $bk = \dfrac{1}{3}bc$. Todėl taško K pagreitis:

$$a_K = Ok \cdot \mu_a .$$

2.4. VIENAME TAŠKE ĮTVIRTINTO KŪNO JUDĖJIMAS

Viename taške įtvirtinto judančio kūno kiekvieno taško atstumas nuo įtvirtinimo taško nekinta, o taškai brėžia trajektorijas, kurios yra išsidėsčiuosios koncentrinėse sferose. Todėl kūno judėjimas apie nejudamąjį tašką vadinamas *sferiniu*.

Prie sferinio judėjimo galima priskirti kūginio krumpliaračio judėjimą, kai krumpliaratis 2 apibėga krumpliaratį 1 (45 a pav.), prie nepaslankaus rutulinio lanksto pritvirtintos svirties judėjimą (45 b pav.). Sferiniu judesiu juda įsuktas vilkelis (45 c pav.).



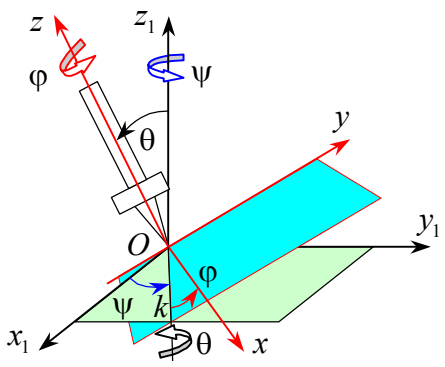
45 pav. Sferinio judėjimo pavyzdžiai

2.4.1. KŪNO JUDĖJIMO LYGTYS

Nagrinėsime įsukto vilkelio judėjimą. Besisukantis apie nejudamąjį tašką kūnas turi tris laisvumo laipsnius (žr. 5.3 sk.). Kūno padėčiai apibrėžti reikalingi trys nepriklausomi kintamieji. Teorinėje mechanikoje kūno padėčiai apibrėžti naudojami Oilerio kampai.

Kūno sferiniam judėjimui aprašyti parinksime dvi atskaitos sistemas: viena – $Ox_1y_1z_1$ – nejudamoji, kita – $Oxyz$ – susijusi su judančiu kūnu (46 pav.).

Judamosios atskaitos sistemos plokštuma x_1Oy_1 kerta nejudamosios atskaitos sistemos plokštumą xOy linija OK. Ši linija vadinama mazgų linija. Kampas ψ (psi) tarp Ox_1 ašies ir mazgų linijos OK vadinamas precesijos kampu. Kampas φ (fi) tarp mazgų linijos OK ir judamosios Ox ašies vadinamas savojo sukimosi kampu. Kampas θ (teta) tarp nejudamosios ašies Oz_1 ir judamosios Oz ašies vadinamas nutacijos kampu. Kampai paimti iš astronomijos ir pavadinti mokslininko Oilerio vardu – Oilerio kampais.



46 pav. Sferinis judėjimas

Oilerio kampai nustato judančios atskaitos sistemos ir judančio kūno padėtį nejudamosios atskaitos sistemos atžvilgiu. Kūno judėjimo metu Oilerio kampai kinta. Šių kampų priklausomybės nuo laiko vadinamos kūno sferinio judėjimo lygtimis.

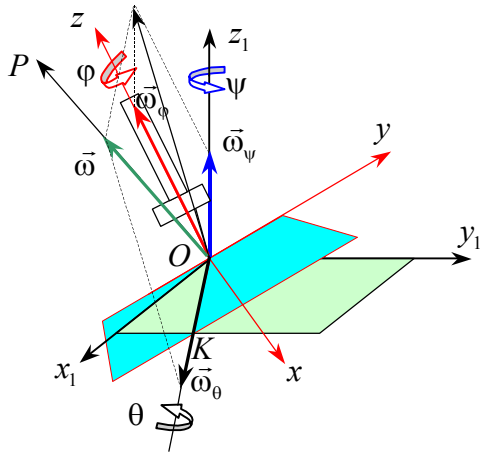
$$\begin{cases} \psi = f_1(t), \\ \varphi = f_2(t), \\ \theta = f_3(t). \end{cases} \tag{54}$$

Turėdami kūno judėjimo lygtis, kitaip tariant, turėdami Oilerio kampų priklausomybes nuo laiko, galime rasti šių kampų reikšmes tam tikru laiko momentu ir nustatyti kūno padėtį nejudamosios atskaitos sistemos atžvilgiu.

2.4.2. KŪNO SFERINIO JUDĖJIMO KINEMATINĖS CHARAKTERISTIKOS

Kūno sferinį judėjimą aprašo Oilerio kampai:

$$\begin{cases} \psi = f_1(t), \\ \varphi = f_2(t), \\ \theta = f_3(t). \end{cases}$$



47 pav. Sferinio judėjimo kampiniai greičiai

Šių funkcijų pirmosios išvestinės laiko atžvilgiu yra atitinkami kampiniai greičiai:

$$\begin{aligned} \omega_\psi &= \frac{d\psi}{dt}, \\ \omega_\varphi &= \frac{d\varphi}{dt}, \\ \omega_\theta &= \frac{d\theta}{dt}, \end{aligned} \tag{55}$$

čia ω_ψ – precesijos kampinis greitis, vektorius $\vec{\omega}_\psi$ nukreiptas Oz_1 ašimi; ω_φ – savojo sukimosi kampinis greitis, vektorius $\vec{\omega}_\varphi$ nukreiptas *Oz* ašimi; ω_θ – nutacijos kampinis greitis, vektorius $\vec{\omega}_\theta$ nukreiptas mazgų linija *Ok* (47 pav.)

Galima teigti, kad sferinį judėjimą tam tikru laiko momentu galima įsivaizduoti kaip trijų sukimųsi su precesijos, savojo sukimosi ir nutacijos kampiniais greičiais sumą. Sudėjus išvardytus kampinių greičių vektorius, turėsime kūno suminį momentinį kampinį greitį:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\psi + \vec{\omega}_\varphi + \vec{\omega}_\theta . \tag{56}$$

Taigi kūno sferinis judėjimas kiekvienu laiko momentu gali būti traktuojamas kaip momentinis sukamasis kampiniu greičiu $\vec{\omega}$ apie momentinę sukimosi ašį *OP*, kuri eina per nejudamąjį tašką *O*. Formulė (56) rodo kokybinę kūno sferinio judesio vaizdą, tačiau nei vektoriaus $\vec{\omega}$ modulio, nei krypties iš šios formulės nerasime.

Vektoriaus $\vec{\omega}$ moduliui ir krypčiai apskaičiuoti suprojektuosime formulę (56) į judamąją koordinačių sistemą *Oxyz*. Iš (47 pav.) matyti:

$$\begin{cases} \omega_x = \omega_\psi \sin\theta \sin\varphi + \omega_\theta \cos\varphi, \\ \omega_y = \omega_\psi \sin\theta \cos\varphi - \omega_\theta \sin\varphi, \\ \omega_z = \omega_\varphi + \omega_\theta \cos\theta, \end{cases} \tag{57}$$

čia $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – vektoriaus $\vec{\omega}$ projekcijos *Oxyz* ašyse.

Vektoriaus $\vec{\omega}$ modulis:

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} . \tag{58}$$

Vektoriaus $\vec{\omega}$ krypties kosinusai:

$$\cos\alpha = \frac{\omega_x}{\omega}, \quad \cos\beta = \frac{\omega_y}{\omega}, \quad \cos\gamma = \frac{\omega_z}{\omega}, \tag{59}$$

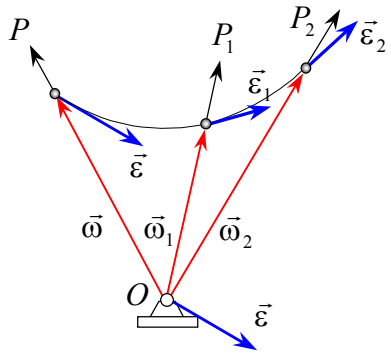
formulėse (59) α, β, γ – vektoriaus $\vec{\omega}$ (momentinės sukimosi ašies *OP*) kampai su *Ox*, *Oy ir Oz* ašimis.

Analogiškai galima rasti vektoriaus $\vec{\omega}$ projekcijas ir nejudamosiose koordinačių ašyse $Ox_1 y_1 z_1$.

Kūno kampinis pagreitis $\vec{\varepsilon}$ – tai vektorius, apibūdinantis kampinio greičio vektoriaus $\vec{\omega}$ modulio ir krypties kitimą. Bendruoju atveju turime:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Laikui bėgant kinta kampinio greičio vektoriaus $\vec{\omega}$ dydis ir kryptis, o šio vektoriaus galas erdvėje brėžia kreivę *AD* – vektoriaus $\vec{\omega}$ hodografą – trajektoriją (48 pav.).



48 pav. Sferinio judėjimo kampinis pagreitis

Iš matematikos žinome, kad kampinio greičio vektoriaus išvestinė, t. y. kampinio pagreičio vektorius $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ pridėtas vektoriaus $\vec{\omega}$ gale ir nukreiptas liestine trajektorijai. Mechanikoje kampinio pagreičio vektorius $\vec{\varepsilon}$ lygiagrečiai perkeliamas į nejudamąjį tašką *O* (48 pav.).

Vektoriai $\vec{\omega}$ ir $\vec{\varepsilon}$ neguli vienoje ašyje, kaip kūno sukimosi apie nejudamąją ašį atveju, nes vektorius $\vec{\varepsilon}$ rodo ne tik modulio, bet ir vektoriaus $\vec{\omega}$ krypties kitimą.

Kai žinomos kampinio greičio $\vec{\omega}$ projekcijos į judamosios koordinačių sistemos ašis ω_x, ω_y, ω_z, kampinio pagreičio projekcijos apskaičiuojamos iš formulių:

$$\varepsilon_x = \frac{d\omega_x}{dt}, \qquad \varepsilon_y = \frac{d\omega_y}{dt}, \qquad \varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt}. \tag{60}$$

Apskaičiavus projekcijas, pagal žinomas formules lengva rasti pagreičio $\vec{\varepsilon}$ modulį ir krypties kosinusus.

2.4.3. VIENAME TAŠKE ĮTVIRTINTO KŪNO TAŠKŲ GREIČIAI IR PAGREIČIAI

Įvertinant tai, kad kūno sferinį judėjimą galima traktuoti kaip sukamąjį judėjimą apie momentinę sukimosi ašį *OP* su momentiniu kampiniu greičiu $\vec{\omega}$, bet kurio taško *M* linijinio greičio vektorius (49 pav.) gali būti išreikštas formule:

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \tag{61}$$

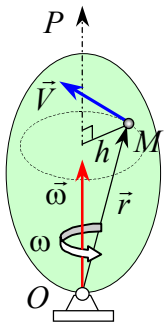
Greičio modulis:

$$V = \left|\vec{\omega} \times \vec{r}\right| = \omega \cdot r \cdot \sin\left(\vec{\omega}, \vec{r}\right) = \omega \cdot h, \tag{62}$$

čia ω – kūno momentinio kampinio greičio modulis; *h* – taško *M* atstumas iki momentinės sukimosi ašies.

Greičio vektorius $\vec{V}$ nukreiptas kūno sukimosi kryptimi statmenai spinduliui *h*.

Formule (62) ne visada patogu naudotis, nes įeinantis į ją dydis *h*, laikui bėgant, kinta. Rasime kitą formulę, pagal kurią galima apskaičiuoti taško *M* greičio vektorių $\vec{V}$.



49 pav. Taško greitis, vykstant sferiniam judėjimui

Vektorinę sandaugą (61) galima išreikšti abiejų vektorių komponentėmis į judamąsias koordinačių ašis:

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

Iš čia gausime:

$$\begin{aligned} V_x &= \omega_y z - \omega_z y, \\ V_y &= \omega_z x - \omega_x z, \\ V_z &= \omega_x y - \omega_y x. \end{aligned} \tag{63}$$

Formulėse (63) *x*, *y*, *z* – taško *M* koordinatės judamojoje atskaitos sistemoje *Oxyz*. Turint greičio projekcijas, pagal analogiškas formules (58) ir (59) lengva rasti greičio $\vec{V}$ modulį ir krypties kosinusus.

Dabar rasime taško *M* pagreitį. Taško *M* pagreitį gauname diferencijuodami greičio išraišką $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ laiko atžvilgiu:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V}$$

arba

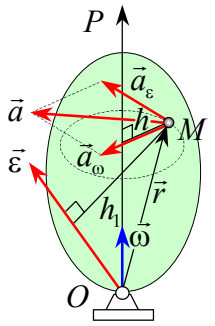
$$\vec{a} = \vec{a}_\varepsilon + \vec{a}_\omega. \tag{64}$$

Sandauga $\vec{\varepsilon} \times \vec{r} = \vec{a}_\varepsilon$ vadinama sukamuoju pagreičiu, sandauga $\vec{\omega} \times \vec{V} = \vec{a}_\omega$ – įcentriniu pagreičiu (50 pav.). Sukamasis taško *M* pagreitis $\vec{a}_\varepsilon$ pridėtas taške *M* ir nukreiptas statmenai trumpiausiam atstumui *h* iki kampinio pagreičio vektoriaus $\vec{\varepsilon}$. Sukamojo pagreičio modulis:

$$a_\varepsilon = \left|\vec{\varepsilon} \times \vec{r}\right| = \varepsilon \cdot r \cdot \sin\left(\vec{\varepsilon}, \vec{r}\right) = \varepsilon \cdot h_1. \tag{65}$$

Įcentrinis taško M pagreitis $\vec{a}_\omega$ pridėtas taške M ir nukreiptas statmenai momentinei sukimosi ašiai OP. Jo modulis:

$$a_\omega = \left|\vec{\omega}\times\vec{V}\right| = \omega\cdot V\cdot\sin\left(90^O\right) = \omega\cdot V = \omega^2\cdot h. \tag{66}$$



50 pav. Taško pagreitis, vykstant sferiniam judėjimui

Absoliutusis taško M sferinio judėjimo pagreitis bendruoju atveju gali būti rastas pagal formulę:

$$a = \sqrt{a_\varepsilon^2 + a_\omega^2 + 2a_\varepsilon a_\omega\cos\left(\vec{a}_\varepsilon, \vec{a}_\omega\right)}. \tag{67}$$

Formulėmis (72), (73) ir (74) ne visada galima naudotis: lankų atveju dydžiai h, h_1 ir kampas $\left(a_\varepsilon, a_\omega\right)$ yra kintamieji ir nežinomi.

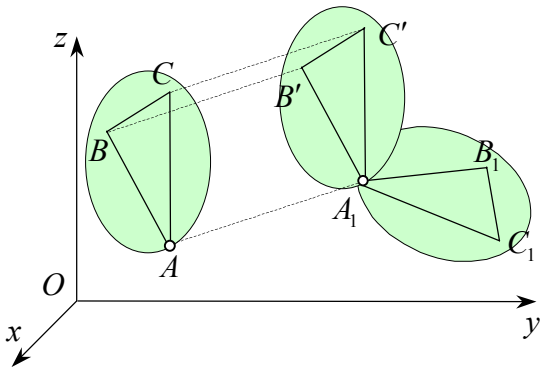
Sukamojo ir įcentrinio pagreičio vektorines sandaugos $\vec{\varepsilon}\times\vec{r}$ ir $\vec{\omega}\times\vec{V}$ suprojektavę į koordinačių ašis, gausime:

$$\begin{aligned} a_{\varepsilon x} &= \varepsilon_y z - \varepsilon_z y, & a_{\omega x} &= \omega_y V_z - \omega_z V_y, \\ a_{\varepsilon y} &= \varepsilon_z x - \varepsilon_x z, & a_{\omega y} &= \omega_z V_x - \omega_x V_z, \\ a_{\varepsilon z} &= \varepsilon_x y - \varepsilon_y x. & a_{\omega z} &= \omega_x V_y - \omega_y V_x. \end{aligned} \tag{68}$$

2.5. LAISVASIS KŪNO JUDĖJIMAS

Nesuvaržytas erdvėje judantis kūnas turi 6 laisvumo laipsnius (žr. 5.3 sk.). Todėl kūno padėčiai apibrėžti reikia 6 nepriklausomų kintamųjų. Kūno padėtis erdvėje gali būti nustatoma trimis taškais, nesančiais vienoje tiesėje, kurie sujungti su nagrinėjamuoju kūnu sudaro trikampį ABC (51 pav.).

Kaip matyti iš schemos (51 pav.), kūną iš padėties ABC galima perkelti į padėtį $A_1B_1C_1$ dviem etapais: slenkamuoju judesiu į padėtį $A'B'C'$, o paskui sferiniu, pasukant apie tašką A į padėtį $A_1B_1C_1$.



51 pav. Laisvasis judėjimas

Slenkamajam judėjimui apibrėžti turime žinoti taško *A* (poliaus) judėjimo lygtis:

$$\begin{aligned} x_A &= f_1(t), \\ y_A &= f_2(t), \\ z_A &= f_3(t). \end{aligned} \tag{69}$$

Sferinį judėjimą apie polių *A* nurodo Oilerio kampai:

$$\begin{aligned} \psi &= f_4(t), \\ \varphi &= f_5(t), \\ \theta &= f_6(t). \end{aligned} \tag{70}$$

Lygtys (69) ir (70) išreiškia laisvai judančio kūno judėjimo dėsnį. Bet kurio kūno taško *M* greitis susideda iš poliaus slenkamojo greičio $\vec{V}_A$ ir taško M sferinio judėjimo greičio $\vec{V}_{MA}$:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA},$$

arba

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}. \tag{71}$$

Analogišką formulę turėsime taško *M* pagreičiui:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA},$$

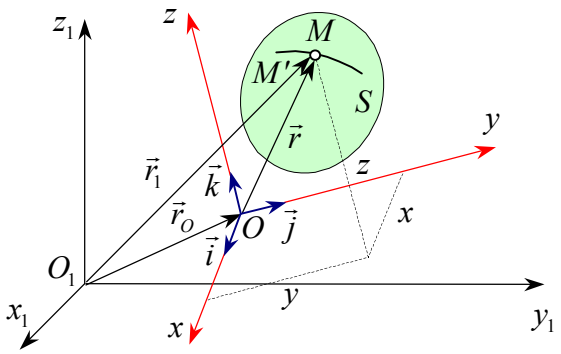
arba

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V}_{MA}, \tag{72}$$

čia $\vec{\omega}$ – kampinis greitis, kuriuo kūnas sukasi apie momentinę ašį, einančią per polių *A*; $\vec{r}$ – taško *M* padėties vektorius poliaus atžvilgiu; $\vec{\varepsilon}$ – kampinis pagreitis; $\vec{V}_{MA}$ – taško *M* sferinio judėjimo apie polių *A* greitis.

3. SUDĖTINIS TAŠKO JUDĖJIMAS

Ankstesniuose skyriuose tyrinėjome materialiojo taško judėjimą nejudančioje aplinkoje. Tačiau dažnai susiduriame su taško judėjimu judančio kūno paviršiumi S (52 pav.). Šiuo atveju turime du judesius – paviršiaus S judėjimą ir taško judėjimą šiuo paviršiumi. Tokiam sudėtiniam judesiui nagrinėti naudojamos dvi atskaitos sistemos: sistema $Ox_1y_1z_1$ laikoma sąlyginai nejudamąja, o sistema $Oxyz$ yra nekintamai susijusi su judančiu paviršiumi S.



52 pav. Sudėtinis taško judėjimas

Taško M judėjimas judamosios atskaitos sistemos $Oxyz$ atžvilgiu vadinamas *reliatyviuoju.* Jo padėtį šios sistemos atžvilgiu nusako vektorius $\vec{r}$. Taško M trajektorija, greitis ir pagreitis sistemos $Oxyz$ atžvilgiu vadinami reliatyviais ir žymimi $\vec{V}_r$, $\vec{a}_r$.

Paviršiaus S judėjimą nejudamosios sistemos $Ox_1y_1z_1$ atžvilgiu vadiname *keliamuoju*. Paviršiaus S taško M', šiuo laiko momentu sutampančio su nagrinėjamuoju tašku M, greitis ir pagreitis nejudamosios sistemos atžvilgiu vadinamas taško M keliamuoju greičiu bei pagreičiu, ir žymimi $\vec{V}_k$, $\vec{a}_k$. Taško M padėtį rodo vektorius $\vec{r}_1$.

Taško M judėjimas nejudamosios atskaitos sistemos $Ox_1y_1z_1$ atžvilgiu vadinamas *absoliučiuoju* judėjimu. Jo trajektorija, greitis ir pagreitis vadinami absoliučiaisiais $\vec{V}_a$ ir $\vec{a}_a$. Taško M padėtį, vykstant absoliučiajam judėjimui, rodo vektorius $\vec{r}_1$ (52 pav.).

Iš vektorinio trikampio turime:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_O + \vec{r}.$$

Vektorių $\vec{r}$ galima išreikšti reliatyvaus judesio koordinatėmis:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Įrašę šią priklausomybę į ankstesnę formulę, gausime:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_O + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \qquad (73)$$

Priklausomybė (73) įvertina visus judėjimus – ir judamosios atskaitos sistemos pradžios padėtį – $\vec{r}_O$, ir koordinačių ašių *Ox*, *Oy*, *Oz* padėties pokyčius – ortai $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, ir taško *M* judėjimą judamosios atskaitos sistemos atžvilgiu – taško koordinatės *x*, *y*, *z*. Todėl priklausomybę (73) galima pavadinti taško sudėtinio judėjimo dėsniu.

Sprendžiant sudėtinio taško judėjimo kinematikos uždavinius, žinant taško reliatyvųjį ir keliamąjį judėjimą, ieškome absoliučiojo judėjimo, absoliučiojo greičio ir absoliučiojo pagreičio.

Praktikoje gali būti kelios judamosios atskaitos sistemos. Šiuo atveju sudėtinio taško judėjimo lygtis turi įvertinti visų atskaitos sistemų judėjimus.

3.1. TAŠKO GREIČIŲ SUDĖTIES TEOREMA

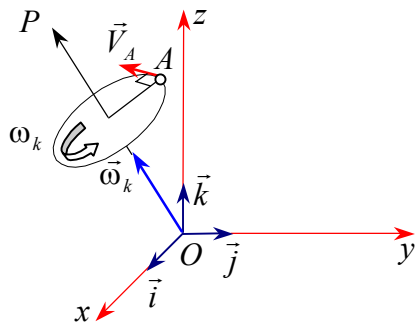
Diferencijuodami padėties vektoriaus $\vec{r}_1$ išraišką (73) laiko atžvilgiu, gausime taško *M* absoliutųjį greitį:

$$\vec{V}_a = \frac{d\vec{r}_O}{dt} + \left(x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt} \right) + \left(\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \right). \qquad (74)$$

Lygtyje (74) $\frac{d\vec{r}_O}{dt} = \vec{V}_O$ – paviršiaus *S* taško *O* greitis, o $\frac{dx}{dt} = V_x$, $\frac{dy}{dt} = V_y$, $\frac{dz}{dt} = V_z$ – taško *M* reliatyviojo judesio greičio projekcijos, nes tik reliatyviajame judesyje taško *M* koordinatės *x*, *y*, *z* yra kintamosios.

Nagrinėjant kūno sferinį judėjimą, buvo parodyta, kad kūno judėjimą apie nejudamąjį tašką galima įsivaizduoti kaip sukamąjį judėjimą apie momentinę sukimosi ašį su momentiniu kampiniu greičiu.

Todėl atskaitos sistemos *Oxyz* judėjimą apie atskaitos pradžią *O* galima laikyti momentiniu sukamuoju keliamuoju judėjimu su momentiniu keliamuoju kampiniu greičiu $\vec{\omega}_k$ apie momentinę sukimosi ašį *OP* (53 pav.).



53 pav. Keliamasis taško judėjimas

Iš matematikos žinoma, kad orto išvestinė laiko atžvilgiu yra šio orto galo *A* linijinis greitis, t. y.:

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{V}_A .$$

Taip pat žinoma, kad šis greitis gali būti išreikštas vektorine sandauga $\vec{V}_A = \vec{\omega}_k \times \vec{k}$. Tada turėsime:

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{V}_A = \vec{\omega}_k \times \vec{k}, \quad \text{arba} \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega}_k \times \vec{k} .$$

Įvertinant, kad atskaitos sistema *Oxyz* juda vienodu momentiniu kampiniu greičiu $\vec{\omega}_k$ apie momentinę sukimosi ašį *OP*, gauname:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{i}}{dt} &= \vec{\omega}_k \times \vec{i}, \\ \frac{d\vec{j}}{dt} &= \vec{\omega}_k \times \vec{j}, \\ \frac{d\vec{k}}{dt} &= \vec{\omega}_k \times \vec{k}. \end{aligned} \tag{75}$$

Įrašę šias reikšmes į (74) ir sutvarkę narius, gauname absoliučiojo greičio išraišką:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_O + \vec{\omega}_k \times \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) + \left(V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}\right),$$

arba

$$\vec{V}_a = \vec{V}_O + \left(\vec{\omega}_k \times \vec{r}\right) + \vec{V}_r . \tag{76}$$

Pirmieji du išraiškos (76) dešiniosios pusės nariai yra judančio paviršiaus taško M' greitis:

$$\vec{V}_{M'} = \vec{V}_O + \vec{V}_{M'O} . \tag{76}$$

Kaip buvo apibrėžta anksčiau, taško M' greitis nejudamosios atskaitos sistemos atžvilgiu yra nagrinėjamojo taško *M* keliamasis greitis. Todėl gauname:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_k + \vec{V}_r . \tag{77}$$

Lygybė (56) išreiškia greičių sudėties teoremą: *taško absoliutusis greitis yra lygus keliamojo ir reliatyviojo greičių vektorinei sumai*.

Absoliučiojo greičio modulis randamas iš formulės

$$V_a = \sqrt{V_k^2 + V_r^2 + 2V_k V_r \cos\left(\vec{V}_k, \vec{V}_r\right)}. \tag{78}$$

3.2. TAŠKO PAGREIČIŲ SUDĖTIES TEOREMA (KORIOLIO TEOREMA)

Absoliučiajam taško pagreičiui apskaičiuoti pasinaudosime formule (74):

$$\vec{V}_a = \frac{d\vec{r}_O}{dt} + \left(x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt} \right) + \left(\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \right).$$

Diferencijuodami šią išraišką laiko atžvilgiu, gausime:

$$\begin{aligned} \vec{a}_a = \frac{d\vec{V}_a}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_O}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt}\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d\vec{k}}{dt} \right) + \left(x\frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\vec{k}}{dt^2} \right) + \\ + \left(\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \right) + \left(\frac{dx}{dt}\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d\vec{k}}{dt} \right). \end{aligned} \tag{79}$$

Formulėje (79):

$$\frac{d^2\vec{i}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}_k \times \vec{i}\right) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{i} + \vec{\omega}_k \times \frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\varepsilon} \times \vec{i} + \vec{\omega}_k \times \left(\vec{\omega}_k \times \vec{i}\right),$$

$$\frac{d^2\vec{j}}{dt^2} = \vec{\varepsilon} \times \vec{j} + \vec{\omega}_k \times \left(\vec{\omega}_k \times \vec{j}\right),$$

$$\frac{d^2\vec{k}}{dt^2} = \vec{\varepsilon} \times \vec{k} + \vec{\omega}_k \times \left(\vec{\omega}_k \times \vec{k}\right).$$

Sutvarkome išraiškos (79) narius:

1) $\frac{d^2\vec{r}_O}{dt^2} = \vec{a}_O$ – poliaus O pagreitis;

2) $\frac{dx}{dt}\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega} \times \left(\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \right) = \vec{\omega}_k \times \vec{V}_r;$

3) $$\begin{aligned} x\frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\vec{k}}{dt^2} &= \left(\vec{\varepsilon} \times \vec{i} + \vec{\omega}_k \times \left(\vec{\omega}_k \times \vec{i}\right)\right)x + \left(\vec{\varepsilon} \times \vec{j} + \vec{\omega}_k \times \left(\vec{\omega}_k \times \vec{j}\right)\right)y + \\ &+ \left(\vec{\varepsilon} \times \vec{k} + \vec{\omega}_k \times \left(\vec{\omega}_k \times \vec{k}\right)\right)z = \vec{\varepsilon} \times \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) + \\ &+ \vec{\omega}_k \times \left(\vec{\omega}_k \times \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)\right) = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega}_k \times \left(\vec{\omega}_k \times \vec{r}\right); \end{aligned}$$

4) $\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = a_{rx}\vec{i} + a_{ry}\vec{j} + a_{rz}\vec{k} = \vec{a}_r.$

Įrašę šias išraiškas į formulę (79), gauname:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega}_k \times (\vec{\omega}_k \times \vec{r}) + \vec{a}_r + 2(\vec{\omega}_k \times \vec{V}_r).$$

Trys pirmieji dešiniosios pusės nariai išreiškia laisvai judančio kūno paviršiaus S taško M' pagreitį, t. y. keliamąjį pagreitį $\vec{a}_k$:

$$\vec{a}_k = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega}_k \times (\vec{\omega}_k \times \vec{r}) = \vec{a}_O + \vec{a}_{M'O},$$

$$\vec{a}_{M'O} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega}_k \times (\vec{\omega}_k \times \vec{r}) = \vec{a}^{\varepsilon}_{M'O} + \vec{a}^{\omega}_{M'O},$$

čia $\vec{a}_{M'O}$ – taško M' sukimosi apie momentinę sukimosi ašį, praeinančią per polių O, pagreitis; $\vec{a}_r$ – taško M reliatyviojo judėjimo pagreitis; $2(\vec{\omega}_k \times \vec{V}_r) = \vec{a}_c$ – Koriolio pagreitis.

Gauname:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_k + \vec{a}_r + \vec{a}_c. \tag{80}$$

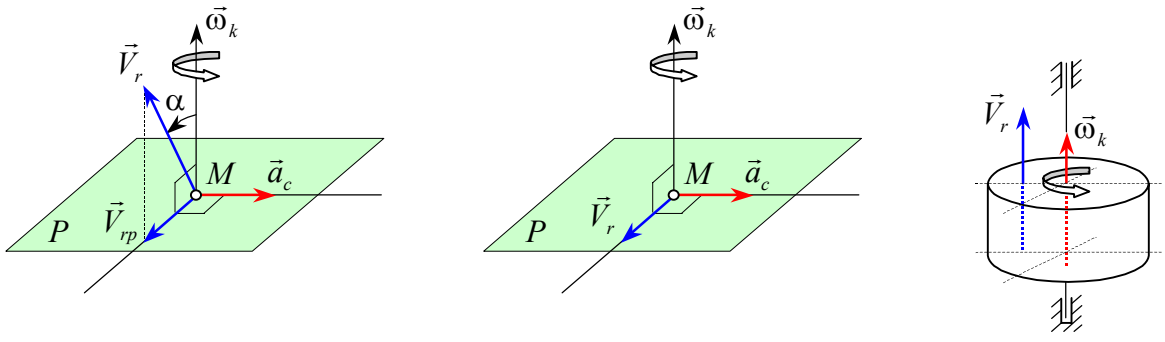
Ši lygybė išreiškia pagreičių sudėties teoremą (Koriolio teoremą): *absoliutusis taško pagreitis yra lygus keliamojo, reliatyviojo ir Koriolio pagreičių vektorinei sumai*.

Koriolio pagreičio modulis

$$a_c = |2(\vec{\omega}_k \times \vec{V}_r)| = 2\omega_k V_r \sin(\vec{\omega}_k, \vec{V}_r). \tag{81}$$

Vektorius $\vec{a}_c$ nukreiptas taip, kaip ir vektorius $\vec{\omega}_k \times \vec{V}_r$, t. y. statmenai plokštumai, kurią sudaro vektoriai $\vec{\omega}_k$ ir $\vec{V}_r$, į tą pusę, iš kurios žiūrint vektorius $\vec{\omega}_k$ sutapdinamas su $\vec{V}_r$ trumpiausiu keliu: pasukant pirmąjį vektorių prieš laikrodžio rodyklę (54 a pav.).

Vektoriaus $\vec{a}_c$ kryptį galima rasti, suprojektavus $\vec{V}_r$ į plokštumą P, statmeną $\vec{\omega}_k$, ir pasukus šią projekciją stačiuoju kampu $\vec{\omega}_k$ kryptimi (54 b pav.).



a) b) c)

54 pav. Koriolio pagreitis

Kai keliamasis judėjimas yra plokščiasis, kampas tarp vektorių $(\vec{\omega}_k, \vec{V}_r) = 90^0$, Koriolio pagreičio modulis:

$$a_c = 2\omega_k V_r .$$

Koriolio pagreitis yra lygus nuliui dviem atvejais:
1) kai keliamasis judėjimas yra slenkamasis, t. y. kai $\vec{\omega}_k = 0$;
2) kai vektoriai $\vec{\omega}_k$ ir $\vec{V}_r$ yra lygiagretūs, t. y. kai kampas $(\vec{\omega}_k, \vec{V}_r) = 0^0$ (54 c pav.).
Formaliai Koriolio pagreitis $\vec{a}_c = 0$ ir kai $\vec{V}_r = 0$, t. y. kai nėra sudėtinio judėjimo.

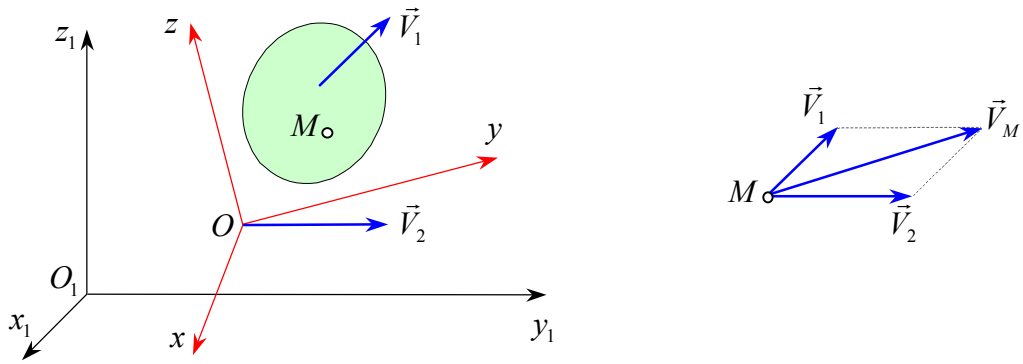
4. SUDĖTINIS KŪNŲ JUDĖJIMAS

Sudėtiniu kietojo kūno judėjimu vadinamas jo judėjimas nejudamosios sistemos atžvilgiu, sudarytas iš reliatyviojo ir keliamojo judėjimų. Nustatyta, kad laisvojo kūno judėjimas susideda iš slenkamojo judėjimo su laisvai pasirinktu poliumi ir sferinio judėjimo apie šį polių. Slenkamąjį kūno judėjimą galime laikyti keliamuoju, o sferinį – reliatyviuoju. Visos kūno judėjimo kinematinės charakteristikos nejudamosios sistemos atžvilgiu yra išreiškiamos reliatyviojo ir keliamojo judėjimų charakteristikomis.

Išnagrinėsime pagrindinius sudėtinio judėjimo atvejus ir kūno taškų greičių skaičiavimą. Priklausomai nuo to, koks bus reliatyvusis kūno judėjimas ir koks judamųjų koordinačių sistemos judėjimas, teks spręsti tokius uždavinius:

- slinkimų sudėtį;
- sukimosi sudėtį;
- slinkimo ir sukimosi sudėtį.

4.1. SLINKIMŲ SUDĖTIS



a) b)

55 pav. Sudėtinis judėjimas

Tarkime, kad kietasis kūnas judamosios sistemos atžvilgiu slenka greičiu $\vec{V}_1$, o ši nejudamosios sistemos atžvilgiu slenka greičiu $\vec{V}_2$ (55 a pav.). Kūno bet kurio taško M absoliutusis greitis, remiantis greičių sudėties teorema, randamas geometriškai sumuojant keliamąjį ir reliatyvųjį greičius:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_r + \vec{V}_k .$$

Tačiau mūsų atveju $\vec{V}_r = \vec{V}_1$, o $\vec{V}_k = \vec{V}_2$. Tada gauname, kad

$$\vec{V}_M = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 .$$

Kūnui slenkant, visi jo taškai brėžia vienodas trajektorijas, turi vienodus greičius ir pagreičius. Taigi ir bet kurio kūno taško greitis bus $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$, o absoliutusis kūno judėjimas bus slinkimas.

Išvada. Sudėję du slenkamuosius judėjimus, absoliutųjį judėjimą gauname taip pat slinkimą, kurio greitis yra lygus turimų slenkamųjų greičių geometrinei sumai (55 b pav.).

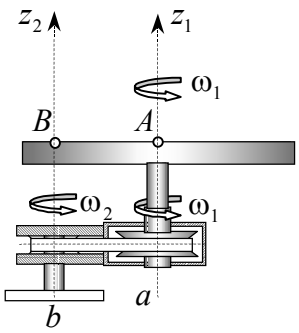
4.2. SUKIMOSI SUDĖTIS

Tarkime, kad kūnas judamosios sistemos atžvilgiu sukasi apie ašį kampiniu greičiu ω_1, o ši nejudamosios sistemos atžvilgiu sukasi kampiniu greičiu ω_2. Panagrinėsime tokius atvejus:

- kai sukimosi ašys lygiagrečios;
- kai sukimosi ašys susikerta.

4.2.1. SUKIMOSI SUDĖTIS, KAI AŠYS LYGIAGREČIOS

Tarkime, kūnas sukasi kampiniu greičiu ω_1 apie ašį Az_1, kuri įtvirtinta alkūnėje *ab*; tai būtų reliatyvusis kūno judėjimas (56 pav.). Be to, alkūnė *ab* sukasi kampiniu greičiu ω_2 apie ašį Bz_2 – tai būtų keliamasis judėjimas.



56 pav. Sukimosi sudėtis

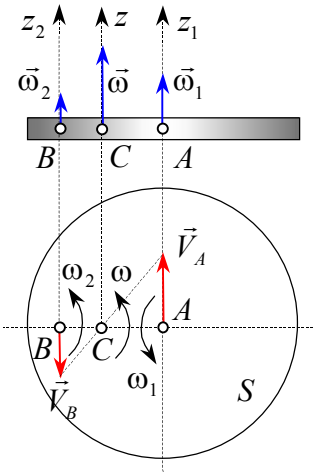
Matome, kad kūno judėjimas plokštumos, kuri yra statmena sukimosi ašims, atžvilgiu yra plokščiasis. Čia galimi tokie atvejai:

a) sukimosi kryptys vienodos

Judančiame kūne taškas *A* sukasi tiktai apie ašį Bz_2 kampiniu greičiu ω_2 ir turi greitį $\vec{V}_A$, kuris nukreiptas kampinio greičio ω_2 kryptimi statmenai sukimosi atkarpai *AB* (57 pav.), ir jo reikšmė:

$$V_A = \omega_2 AB.$$

Kūno taškas B sukasi apie ašį Az_1 kampiniu greičiu ω_1 ir turi greitį $V_B = \omega_1 AB$, kuris nukreiptas kampinio greičio ω_1 kryptimi statmenai atkarpai AB.



57 pav. Sudėtinio kūno judėjimo greičiai

Iš čia išplaukia, kad vektoriai $\vec{V}_A$ ir $\vec{V}_B$ yra lygiagretūs (abu statmeni atkarpai AB) ir nukreipti priešinga kryptimi. Kūno pjūvio S taškas C yra momentinis greičių centras $\left(\vec{V}_C = 0\right)$, todėl ašis Cz, praeinanti per tašką C statmenai kūno plokštumai, yra momentinė sukimosi ašis, kuri taip pat lygiagreti su sukimosi ašimis Az_1 ir Bz_2. Kūno kampinis greitis randamas žinomo taško greitį padalijus iš atstumo iki momentinio greičių centro:

$$\omega = \frac{V_A}{AC} = \frac{V_B}{BC}.$$

Iš čia

$$\omega = \frac{V_A + V_B}{AC + BC} = \frac{V_A + V_B}{AB}.$$

Įvertinę, kad $V_A = \omega_2 AB$ ir $V_B = \omega_1 AB$, gauname:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 \tag{82}$$

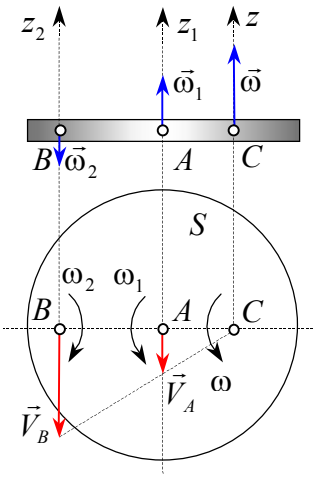
ir

$$\frac{\omega}{AB} = \frac{\omega_1}{BC} = \frac{\omega_2}{AC}. \tag{83}$$

Taigi, sudėję du vienodos krypties sukimus apie lygiagrečias ašis, absoliutųjį judėjimą gauname sukimąsi apie momentinę sukimosi ašį, lygiagrečią turimoms, kampiniu greičiu ω, kuris yra lygus kampinių greičių ω_1 ir ω_2 sumai (82) ir yra tos pačios krypties kaip ω_1 ir ω_2. Momentinė sukimosi ašis dalija atstumą tarp šių sukimosi ašių į dvi dalis, atvirkščiai proporcingas kampiniams greičiams ω_1 ir ω_2 (83).

b) sukimasis vyksta priešingomis kryptimis

Nagrinėsime kūno pjūvio S judėjimą. Imame $\omega_1 > \omega_2$, rasime taškų A ir B greičių reikšmes $V_A = \omega_2 AB$ bei $V_B = \omega_1 AB$. Šie greičiai yra lygiagretūs, nes abu statmeni atkarpai AB ir nukreipti viena kryptimi (58 pav.).



58 pav. Sudėtinio kūno judėjimo greičiai

Momentinė sukimosi ašis praeina per momentinį greičių centrą C. Sukimosi kampinis greitis:

$$\omega = \frac{V_A}{AC} = \frac{V_B}{BC},$$

arba

$$\omega = \frac{V_B - V_A}{BC - AC} = \frac{V_B - V_A}{AB}.$$

Įvertinę greičių $\vec{V}_A$ ir $\vec{V}_B$ reikšmes, turėsime:

$$\omega = \omega_1 - \omega_2 \tag{84}$$

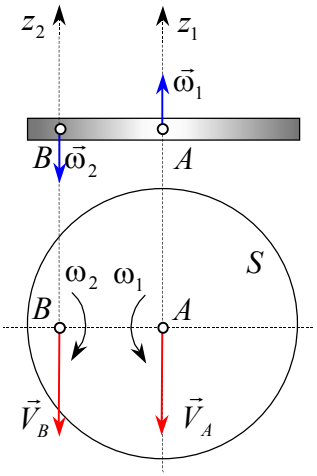
ir

$$\frac{\omega}{AB} = \frac{\omega_1}{BC} = \frac{\omega_2}{AC}. \tag{85}$$

Taigi, sudėję du priešingų krypčių sukimus apie lygiagrečias ašis, absoliutųjį judėjimą gauname sukimąsi apie momentinę sukimosi ašį, lygiagrečią turimoms, kampiniu greičiu ω, kuris yra lygus kampinių greičių ω_1 ir ω_2 skirtumui (84) ir nukreiptas didesniojo kampinio greičio kryptimi. Momentinė sukimosi ašis dalija atstumą tarp šių sukimosi ašių į dvi dalis, išoriniu būdu atvirkščiai proporcingai kampiniams greičiams ω_1 ir ω_2 (85).

c) sukimosi pora

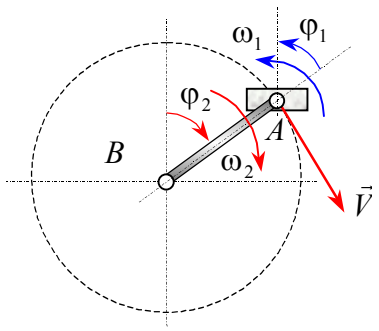
Jeigu sukimasis vyksta apie lygiagrečias ašis priešingomis kryptimis ir sukimosi kampiniai greičiai ω_1 ir ω_2 yra lygūs, tai toks kūno sukimosi atvejis vadinamas sukimosi pora. Šiuo atveju kampinių greičių ω_1 ir ω_2 vektoriai sudaro kampinių greičių porą (59 pav.).



59 pav. Kampinių greičių pora

Be to, turėsime $V_A = \omega_2 AB$, $V_B = \omega_1 AB$ ir jeigu $\omega_1 = \omega_2$, tai $\vec{V}_A = \vec{V}_B$. Bet jeigu plokščiosios figūros dviejų taškų greičiai yra lygūs, lygiagretūs ir vienos krypties, tai momentinis greičių centras yra begalybėje, pats kūnas turi momentinį slenkamąjį judėjimą. Šiuo atveju visi kūno taškai turi vienodus greičius $V = \omega_1 AB$, kurie nukreipti statmenai plokštumai, praeinančiai per kampinio greičio vektorius $\vec{\omega}_1$ ir $\vec{\omega}_2$.

Kitaip sakant, sukimosi pora ekvivalentinė momentiniam slenkamajam judėjimui su greičiu $\vec{V}$, kuris lygus sukamųjų judėjimų kampinių greičių poros momentui.



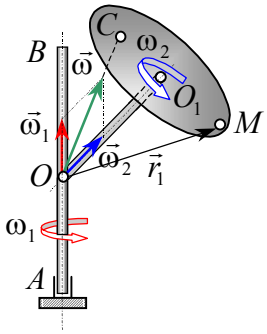
60 pav. Kampinių greičių pora

Tokio judėjimo pavyzdys (60 pav.) yra dviračio pedalo slenkamasis judėjimas atžvilgiu dviračio rėmo, kuris yra dviejų judėjimų suma: reliatyviojo pedalo sukimosi apie ašį A, kuri įtvirtinta alkūnėje BA, ir keliamojo alkūnės sukimosi apie ašį B. Šio sukimosi kampiniai

greičiai ω_1 ir ω_2 yra lygūs, nes alkūnes AB atžvilgiu pedalo posūkio kampas φ_1 lygus alkūnės posūkio kampui φ_2. Pedalo slenkamojo judėjimo greitis $V = \omega_2 AB$.

4.2.2. SUKIMOSI SUDĖTIS, KAI SUKIMOSI AŠYS SUSIKERTA

Vertikalioji ašis sukasi kampiniu greičiu $\vec{\omega}_1$ (61 pav.). Prie jos tam tikru kampu pritvirtinta ašis OO_1, ant kurios užmautas skriemulys sukasi kampiniu greičiu $\vec{\omega}_2$. Reikia rasti skriemulio absoliutųjį judėjimą.



61 pav. Sukimosi ašių susikirtimas

Išnagrinėkime skriemulio bet kurio taško M judėjimą. Keliamuoju judėjimu laikysime sukimąsi kampiniu greičiu ω_1, o reliatyviuoju – sukimąsi kampiniu greičiu ω_2. Taško padėtį abiem atvejais nustatys spindulys – vektorius $\vec{r}$, todėl:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_k + \vec{V}_r = (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}) + (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}) = (\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_1) \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Vadinasi, taškas M ir skriemulys suksis kampiniu greičiu $\vec{\omega}$, kuris lygus šių kampinių greičių $\vec{\omega}_1$ ir $\vec{\omega}_2$ geometrinei sumai:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2.$$

Momentinės sukimosi ašies padėtį nustatysime nubrėžę tiesę per tašką O ir skriemulio tašką C, kurio greitis tuo momentu lygus nuliui, t. y. $\vec{V}_C = 0$, kai $\vec{\omega} \times \vec{r} = 0$.

Ši sąlyga išpildoma, kai $\vec{\omega}$ ir $\vec{r}$ sutampa. Taigi momentinė sukimosi ašis sutampa su lygiagretainio, sudaryto iš kampinių greičių vektorių $\vec{\omega}_1$ ir $\vec{\omega}_2$, įstrižaine. Sudėję du sukimusis apie susikertančias ašis, taip pat gauname sukimąsi kampiniu greičiu $\vec{\omega}$, kuris yra lygus kampinių greičių $\vec{\omega}_1$ ir $\vec{\omega}_2$ geometrinei sumai apie momentinę sukimosi ašį, sutampančią su lygiagretainio, sudaryto iš šių kapinių greičių vektorių $\vec{\omega}_1$ ir $\vec{\omega}_2$, įstrižaine.

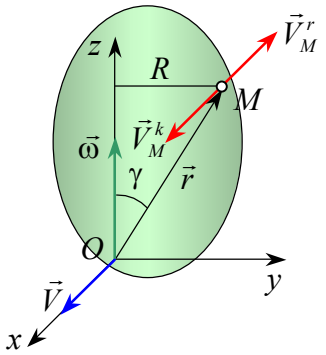
4.3. SLINKIMO IR SUKIMOSI SUDĖTIS

Tarkime, kad kietasis kūnas judamosios sistemos atžvilgiu sukasi kampiniu greičiu $\vec{\omega}$, o ši nejudamosios sistemos atžvilgiu slenka greičiu $\vec{V}$. Reikia nustatyti absoliutųjį kūno judėjimą. Galimi atvejai:

- sukimosi ašis su slinkimo kryptimi sudaro statųjį kampą;
- sukimosi ašis sutampa su slinkimo kryptimi;
- sukimosi ašis su slinkimo kryptimi sudaro bet kokį kampą.

a) kūnas slenka ir sukasi, kai sukimosi ašis su slinkimo kryptimi sudaro statųjį kampą.

Tarkime, kūnas sukasi kampiniu greičiu $\vec{\omega}$ apie koordinačių sistemos *Oxyz* ašį *z*, o koordinačių sistema slenka *x* ašies linkme greičiu $\vec{V}$ (62 pav.). Reikia nustatyti absoliutųjį kūno judėjimą.



62 pav. Sukimasis slenkant

Išnagrinėsime kūno bet kurio taško *M* judėjimą. Taško *M* absoliutusis greitis:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_M^k + \vec{V}_M^r,$$

čia $\vec{V}_M^k = \vec{V}$, o $\vec{V}_M^r = (\vec{\omega} \times \vec{r})$.

Vadinasi:

$$\vec{V}_M = \vec{V} + (\vec{\omega} \times \vec{r}).$$

Taško *M* greitis bus lygus nuliui, jei keliamojo ir reliatyviojo judėjimo greičiai bus lygūs, bet priešingų krypčių.

Kad būtų išpildyta ši sąlyga, vektorius $\vec{V}_M^r$ turi būti statmenas *yOz* plokštumai. Taigi taškas *M* turi būti *yOz* plokštumoje. Tik tuo atveju

$$\vec{V} - (\vec{\omega} \times \vec{r}) = 0,$$

arba

$$V - \omega \cdot r = 0,$$

nes $|\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega r \sin\gamma = \omega R$.

Iš čia randame taško *M*, kurio greitis lygus nuliui, atstumą nuo sukimosi ašies:

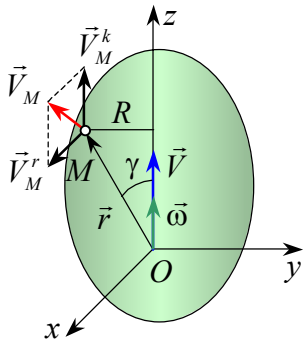
$$R = \frac{V}{\omega} = y_M .$$

Šis rezultatas neapriboja z_M reikšmės $(x_M = 0)$, todėl visų taškų, esančių tiesėje, lygiagrečioje su *z* ašimi ir einančioje per tašką *M*, greičiai bus lygūs nuliui. Šie taškai sudaro momentinę kūno sukimosi ašį.

Sudėję sukimąsi ir slinkimą statmenai sukimosi ašiai, absoliutųjį judėjimą gauname apie momentinę sukimosi ašį, lygiagrečią su turima ašimi ir nutolusią nuo jos atstumu $R = \frac{V}{\omega}$.

b) kūnas slenka ir sukasi, kai sukimosi ašis sutampa su slinkimo kryptimi

Tarkime, kad kūnas sukasi apie koordinačių sistemos *Oxyz* ašį *z* kampiniu greičiu $\vec{\omega}$ ir, be to, slenka šia ašimi (63 pav.) greičiu $\vec{V}$.



63 pav. Sukimasis slenkant

Toks judėjimas vadinamas sraigtiniu ir apibūdinamas sraigtinio judėjimo parametru:

$$\rho = \frac{V}{\omega} .$$

Jeigu kampinio greičio $\vec{\omega}$ ir slinkimo greičio $\vec{V}$ vektoriai yra vienos krypties, tai kūnas, kildamas į viršų, sukasi prieš laikrodžio rodyklę (žiūrint iš teigiamos *z* ašies galo). Toks judėjimas vadinamas dešininiu sraigtiniu judėjimu. Priešingu atveju, kai vektorių kryptys nesutampa kūnui kylant į viršų, jis sukasi pagal laikrodžio rodyklę – kairiniu sraigtiniu judėjimu.

Nustatysime bet kurio kūno taško *M* judėjimą. Taško *M* absoliutusis greitis:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_M^k + \vec{V}_M^r ,$$

Slinkimą laikysime keliamuoju, sukimąsi – reliatyviuoju judėjimu, todėl $\vec{V}_M^k = \vec{V}$, o $\vec{V}_M^r = (\vec{\omega} \times \vec{r})$. Kadangi keliamasis greitis $\vec{V}_M^k = \vec{V}$ ir reliatyvusis $V_M^r = |\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega r \sin\gamma = \omega R$ greičiai yra vienas kitam statmeni, tai

$$V_M = \sqrt{V^2 + \left|\vec{\omega} \times \vec{r}\right|^2} = \sqrt{V^2 + (\omega R)^2} = \omega.\sqrt{\rho^2 + R^2}.$$

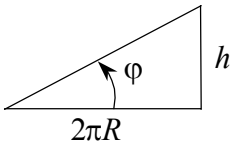
Jeigu sraigtinio judėjimo parametras $\rho = \text{const}$, tai, kūnui apsisukus vieną kartą apie savo ašį, jis pakyla aukščiu *h*. Kadangi $\rho = \frac{V}{\omega} = \frac{dS}{d\varphi}$, tai:

$$\int_0^S dS = \rho \int_0^{2\pi} d\varphi$$

ir

$$h = 2\pi\rho. \tag{86}$$

Dydis *h* vadinamas sraigtinės linijos žingsniu. Išvynioję sraigtinę liniją, gausime tiesę, kylančią kampu φ (64 pav.).



64 pav. Išvyniotos sraigtinės linijos schema

Kampas φ vadinamas kilimo kampu ir $tg\,\varphi = \frac{h}{2\pi R}$. Taigi

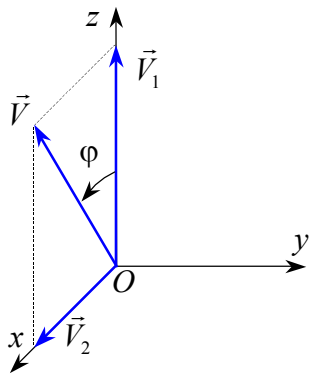
$$h = 2\pi R tg\,\varphi. \tag{87}$$

Palyginę lygtis (86) ir (87) matome, kad parametrą ρ galima išreikšti taip:

$$\rho = R tg\,\varphi. \tag{88}$$

c) kūnas slenka ir sukasi, kai sukimosi ašis su slinkimo kryptimi sudaro bet kokį kampą

Tarkime, kad kūnas sukasi kampiniu greičiu $\vec{\omega}$ ir slenka greičiu $\vec{V}$, kurio kryptis sudaro su sukimosi ašimi kampą φ (65 pav.). Keliamojo judėjimo greičio vektorių $\vec{V}$ išskaidome į du vektorius: $\vec{V}_1$, sutampantį su sukimosi ašimi $\left(V_1 = V\cos\varphi\right)$, ir $\vec{V}_2$, statmeną sukimosi ašiai $\left(V_2 = V\sin\varphi\right)$.



65 pav. Sukimasis slenkant

Išnagrinėsime kūno judėjimą, nepaisydami jo slinkimo ašies *z* linkme greičiu $\vec{V}_1$. Sudėję kūno sukimąsi kampiniu greičiu ω ir slinkimą statmenai sukimosi ašiai greičiu $\vec{V}_2$, absoliutųjį greitį gauname sukimąsi kampiniu greičiu apie momentinę sukimosi ašį, lygiagrečią su turimąja ir nutolusią nuo jos atstumu:

$$R = \frac{V_2}{\omega} = \frac{V \sin\varphi}{\omega}.$$

Be to, kūnas dar slenka išilgai momentinės sukimosi ašies greičiu $\vec{V}_1$. Taigi, sudėję kūno sukimąsi apie momentinę ašį kampiniu greičiu ω ir slinkimą išilgai momentinės ašies greičiu $\vec{V}_1$, gausime momentinį sraigtinį judėjimą, kurio parametras yra:

$$\rho = \frac{V_1}{\omega} = \frac{V \cos\varphi}{\omega}.$$

5. KŪNŲ SISTEMOS KINEMATIKA

Pažodžiui iš graikų kalbos sistema reiškia visumą, sudarytą iš dalių. Mechaninės sistemos struktūros požiūriu yra labai įvairios. Pavyzdžiui, saulės sistema, skysčio srautas, automobilis, kabamasis tiltas, strypinė metalinė konstrukcija. Esant tokiai įvairovei, sunku rasti bendrą tikslų mechaninės sistemos apibūdinimą. Srautų mechanikoje sistemą galima apibrėžti, kaip materialiųjų taškų visumą; mašinoms, mechanizmams ir inžinerinėms konstrukcijoms geriau tinka tarpusavyje susijusių mechaninių elementų (grandžių) visuma arba trumpiau – kūnų sistema. Toliau bus nagrinėjamos kaip tik tokios sistemos, todėl laikysimės šio apibrėžimo.

Taikomojoje mechanikoje susiduriame su dviem mechaninių sistemų atvejais: statiškomis ir dinamiškomis sistemomis. Statiškas sistemas sudaro konstrukcijos, dinamiškas – mechanizmai ir mašinos.

Statišką sistemą (konstrukciją) sudarantys elementai tarpusavyje sujungti standžiai ir negali judėti vienas kito atžvilgiu. Projektuojant tokias sistemas, skaičiuojamas elementų stiprumas ir visos konstrukcijos formos stabilumas. Šiuos klausimus nagrinėja konstrukcijų elementų mechanika ir statybinė mechanika.

Teorinėje mechanikoje bei mechanizmų ir mašinų teorijoje susiduriame su dinamiškomis sistemomis. Kadangi mašinos sudarytos iš mechanizmų, tolesnio tyrimo objektu pasirinktas mechanizmas. Terminai: kūnų sistema, mašina, mechanizmas bus suprantami kaip sinonimai.

5.1. KŪNŲ SISTEMOS RYŠIAI

Ryšių sąvoką jau sutikome statikoje, nagrinėdami suvaržytų kūnų pusiausvyrą. Statikoje ryšiais galima panaikinti bet kokį kūno ar kūnų sistemos judrumą. Sakoma, kad statiška sistema turi nulinį judrumo laipsnį. Statiškų sistemų ryšius sudaro konstrukcijų atramos ir sistemos elementų jungtys.

Dinamiškoje sistemoje suvaržymai turi kryptingą pobūdį: ryšiais valdomas sistemos judėjimas, nustatomas reikiamas judėjimo režimas. Kitaip tariant, ryšiais suformuojamas ir valdomas sistemos judėjimas. Plačiau teoriniu aspektu apie sistemų ryšius kalbama analizinėje mechanikoje.

Sistemos ryšiai realizuojami techninėmis priemonėmis – pasirenkant sistemą sudarančių elementų (grandžių) formą ir jungiant jas į kinematines poras. Sujungus tarpusavyje kinematines poras, gauname kinematines grandines. Taip suformuojama visos sistemos struktūra ir gaunamas reikiamas judesys.

5.2. KŪNŲ SISTEMOS STRUKTŪRA

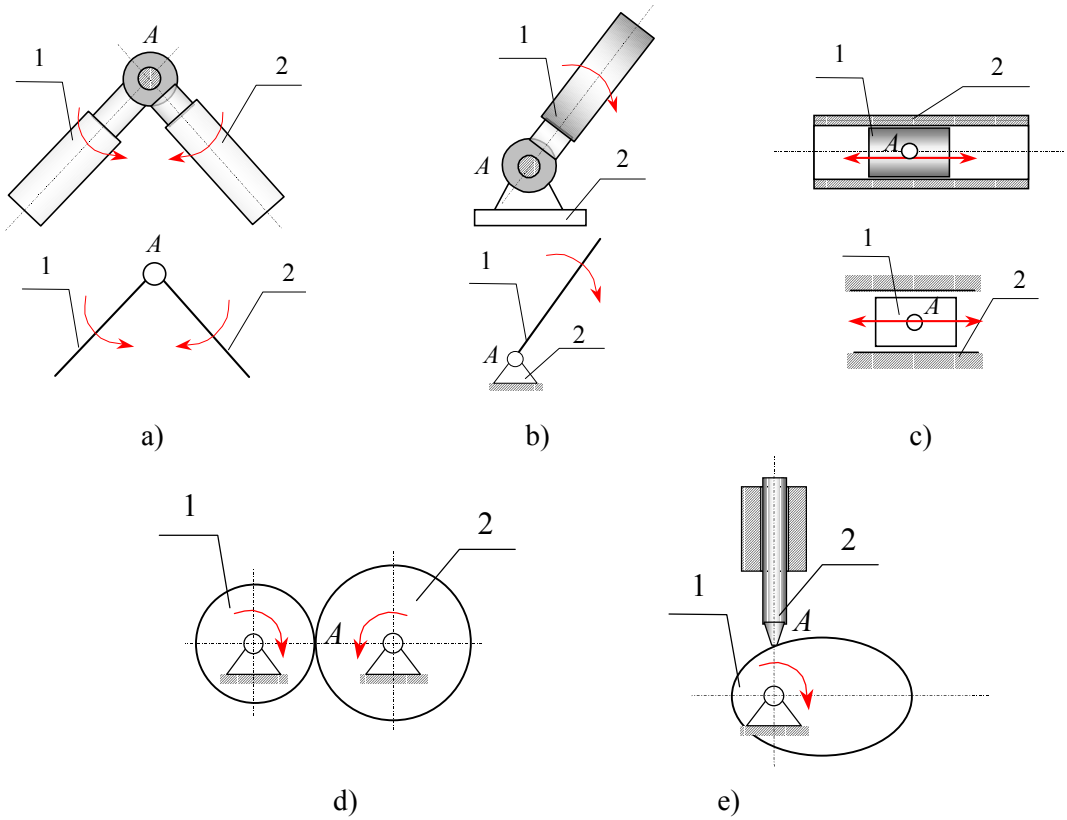
Pagrindinė dinamiškos kūnų sistemos funkcija – suformuoti ir perduoti judesį. Sujungus judamai dvi sistemos grandis, gaunama kinematinė pora – pradinė judesio formavimo ląstelė. Techniškai galima gauti daug įvairių grandžių jungimo derinių. Siekiant susisteminti šią įvairovę, kinematinės poros skirstomos į žemesniąsias ir aukštesniąsias. Kinematinė pora, sudaryta iš grandžių, kurios liečiasi paviršiais, vadinama žemesniąja, o kai grandys liečiasi linija arba tašku – aukštesniąja (66 pav.).

66 a, b pav. turime sukimosi, o 66 c pav. – slinkimo kinematines poras. Šiose schemose grandys 1 ir 2 sujungimo vietoje *A* liečiasi paviršiais, todėl priklauso žemesniųjų kinematinių porų grupei. Schemoje 66 d pav. turime trinties (frikcinę) kinematinę porą, panašiai vaizduojamos ir krumplinės poros. Čia grandys 1 ir 2 liečiasi linija. 66 e pav. pavaizduota kumštelinė kinematinė pora; grandys 1 ir 2 liečiasi tašku. Taigi 66 d, e pav. kinematinės poros priklauso aukštesniųjų grupei.

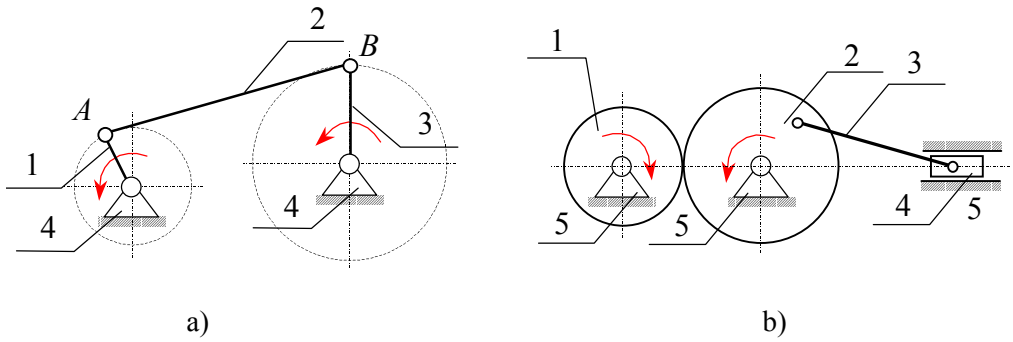
Sujungtos kelios kinematinės poros sudaro kinematinę grandinę – dinaminę kūnų sistemą arba mechanizmą. Mechanizmas yra tokia kinematinė grandinė, kurios viena grandis nejudanti, o kitų grandžių judesiai yra apibrėžti (67 pav.).

67 a pav. schemoje pavaizduotas keturgrandis svirtinis mechanizmas, sudarytas tik iš žemesniųjų kinematinių porų; schemoje 67 b pav. turime penkiagrandį mechanizmą, sudarytą iš žemesniųjų ir aukštesniųjų kinematinių porų.

Mechanizmo grandis, gaunanti judesį iš išorinio šaltinio (variklio), vadinama įėjimo grandimi; grandis, judanti reikiamu judesiu – išėjimo grandimi. Tarpinės grandys, sujungtos į kinematines poras, formuoja ir perduoda judesį. Nejudanti grandis vadinama stovu (korpusu).



66 pav. Kinematinių porų pavyzdžiai

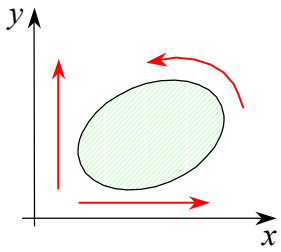


67 pav. Mechanizmų pavyzdžiai

Schematiškai nubraižyta mechanizmo kinematinė grandinė vadinama kinematine schema. Mechanizmo kinematinei analizei atlikti pakanka turėti kinematinę schemą. Kinematinėje schemoje grandys ir jų jungimas į kinematines poras vaizduojamas standartiniais simboliais.

5.3. KŪNŲ SISTEMOS LAISVUMO LAIPSNIS

Panagrinėsime plokščiąsias kūnų sistemas, kurių grandžių judėjimo trajektorijos yra lygiagrečios. Plokštumoje esantis kūnas gali judėti trimis elementariaisiais judesiais: slinkti išilgai ašių ir suktis plokštumoje (68 pav.).



68 pav. Elementarieji kūno judesiai

Bet koks grandžių sujungimas į kinematinę porą suvaržo judesio laisvę. Plokščiojo mechanizmo žemesniosios kinematinės poros suvaržo po du elementariuosius judesius – leidžia tik suktis arba slinkti viena kryptimi. Aukštesniosios kinematinės poros suvaržo po vieną elementarųjį judesį. Remiantis šiais samprotavimais, galima sudaryti formulę mechanizmo judrumui apskaičiuoti:

$$W = 3n - 2p_1 - p_2, \tag{89}$$

čia W – mechanizmo laisvumo laipsnis; n – judančių grandžių skaičius; p_1 – žemesniųjų kinematinių porų skaičius; p_2 – aukštesniųjų kinematinių porų skaičius.

Formulė (89) vadinama plokščiojo mechanizmo struktūrine formule. Apskaičiuosime 67 pav. pavaizduotų schemų laisvumo laipsnį.

Schemai (67 a pav.) $n = 3$, $p_1 = 4$, $p_2 = 0$, todėl

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1.$$

Vadinasi, nagrinėjamasis mechanizmas turi vieną laisvumo laipsnį.

Schemai (67 b pav.) $n = 4$, $p_1 = 5$, $p_2 = 1$, todėl $W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 - 1 = 1$. Vadinasi, šis mechanizmas taip pat turi vieną laisvumo laipsnį.

5.4. KINEMATINĖS ANALIZĖS TIKSLAI IR METODAI

Kinematinių schemų sudarymas, t. y. mechanizmo struktūros formavimas nenagrinėjamas teorinėje mechanikoje – čia taikomosios mechanikos sritis. Teorinė mechanika atlieka jau sudarytų kinematinių schemų analizę.

Pagrindiniai kinematinės analizės tikslai yra šie:

- apskaičiuoti sistemos išėjimo grandies judesį;
- nustatyti judamosios sistemos grandžių padėtis ir taškų trajektorijas;
- rasti grandžių ir taškų greičius ir pagreičius.

Kinematinė analizė atliekama grafiniais ir analiziniais metodais. Abu šie metodai taikomi pasirinktinai, kuris geriau tinka. Pavyzdžiui, judesio analizė atliekama analiziniu skaičiavimu, o grandžių padėtis ir taškų trajektorijas patogiau nustatyti grafiškai.

5.4.1. JUDESIO KEITIMAS IR PERDAVIMAS

Kūnų sistemos įėjimo grandies judėjimas paprastai sutampa su variklio perduodamu judesiu. Sudarant sistemos kinematinę schemą, variklio judesys transformuojamas į reikalingą išėjimo grandies judėjimą.

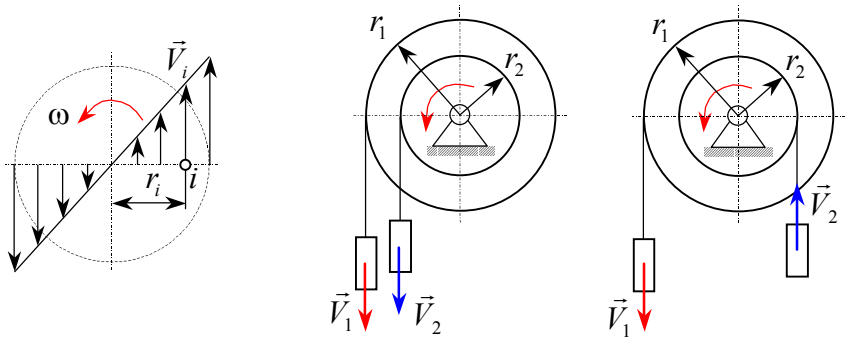
Judesys gali būti transformuotas trejopai:

- keičiant judėjimo greitį;
- keičiant judėjimo dėsnį;
- keičiant ir greitį, ir judėjimo dėsnį.

1. Judėjimo greičio keitimas

Judėjimo greičio keitimas remiasi besisukančio kūno savybe: kūno taškų greičiai yra tiesiogiai proporcingi atstumams iki sukimosi ašies (69 a pav.):

$$V_i = \omega r_i .$$



a) b) c)

69 pav. Besisukančių kūnų taškų greičiai

Paėmę laiptuotą (dvigubą) ratą, turėsime slenkamojo judesio greičio keitiklį (69 b, c pav.). Rato kampinis greitis:

$$\omega = \frac{V_1}{r_1} = \frac{V_2}{r_2}.$$

Iš čia

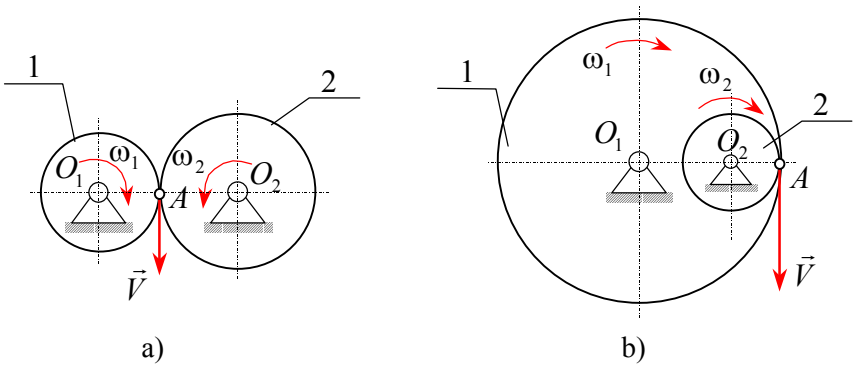
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{r_1}{r_2} = u_{12} \qquad (90)$$

ir

$$V_2 = \frac{V_1}{u_{12}}, \qquad (91)$$

čia u_{12} – judesio keitimo koeficientas arba perdavimo skaičius.

Sukimosi greičiui pakeisti reikia dviejų ratų. Greičiui keisti naudojami trinties ratai ir krumpliaračiai. Trinties ratai sukasi praslysdami, todėl jų perdavimo skaičius netikslus. Tiksliai perduoti judesį galima krumpliaračiais (70 pav.).



70 pav. Krumplinės pavaros

Schemose pavaizduotos dvi krumpliaratinės pavaros: (70 a pav.) išorinio sukibimo, (70 b pav.) vidinio sukibimo. Išorinio sukibimo krumpliaračiai sukasi į priešingas puses, vidinio – į tą pačią pusę.

Krumpliaračių sukibimo taško A greitis yra vienodas abiem ratams. Iš to išplaukia

$$V = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2,$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{z_2}{z_1} = u_{12}, \tag{92}$$

čia r_1, r_2, d_1, d_2, z_1, z_2 – atitinkamų ratų spinduliai, skersmenys ir krumplių skaičiai.

Perdavimo skaičius rodo, kiek kartų pasikeičia sukimosi greitis:

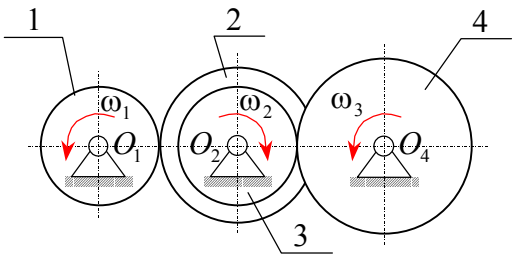
$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{u_{12}}. \tag{93}$$

Kai $u > 1$ – turime lėtinančią pavarą $(\omega_2 < \omega_1)$; kai $u < 1$ – greitinančią pavarą $(\omega_2 > \omega_1)$.

Iš formulėje (92) pateiktų santykių galima apskaičiuoti geometrinius pavaros dydžius:

$$d_2 = d_1 u; \quad z_2 = z_1 u. \tag{94}$$

Vienai krumpliaračių porai leistinas perdavimo skaičius *u* yra nuo 3 iki 6. Kai reikia greitį pakeisti didesniu santykiu, į vieną sistemą sujungiamos kelios krumpliaračių poros; taip gaunama kelių pakopų krumplinė pavara (71 pav.).



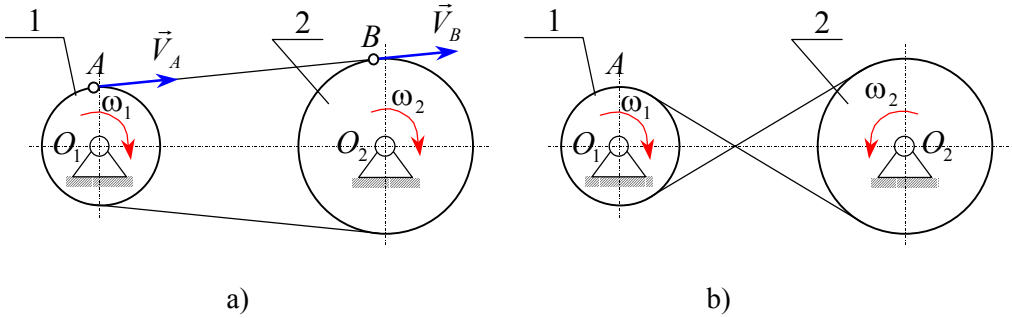
71 pav. Krumplinė pavara

Pavarą sudaro dvi krumpliaračių poros: *1–2* ir *3–4*. Pavaros perdavimo skaičius:

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{d_1 \cdot d_4}{d_2 \cdot d_3} = u_{12} \cdot u_{34}. \qquad (95)$$

Paėmę $u_{12} = u_{34} = 6$, gausime $u = 6 \cdot 6 = 36$, t. y. dviejų pakopų pavara gali 36 kartus padidinti ar sumažinti sukimosi greitį.

Kartais atstumas tarp sukimosi ašių O_1O_2 būna didelis. Sukimuisi perduoti tarp ratų šiuo atveju naudojamas lankstusis ryšis – diržas arba grandinė (72 pav.).



a) b)

72 pav. Diržinės ir grandininės pavaros

Schemoje 72 a pav. abu ratai sukasi į tą pačią pusę, schemoje 72 b pav. sukryžiavus diržą, gauname priešingą krypčių sukimąsi. Kinematiniai šių pavarų rodikliai yra tokie patys, kaip ir krumpliaratinių. Skaičiuojant perdavimo skaičių, remiamasi greičių lygybe $V_A = V_B$, todėl:

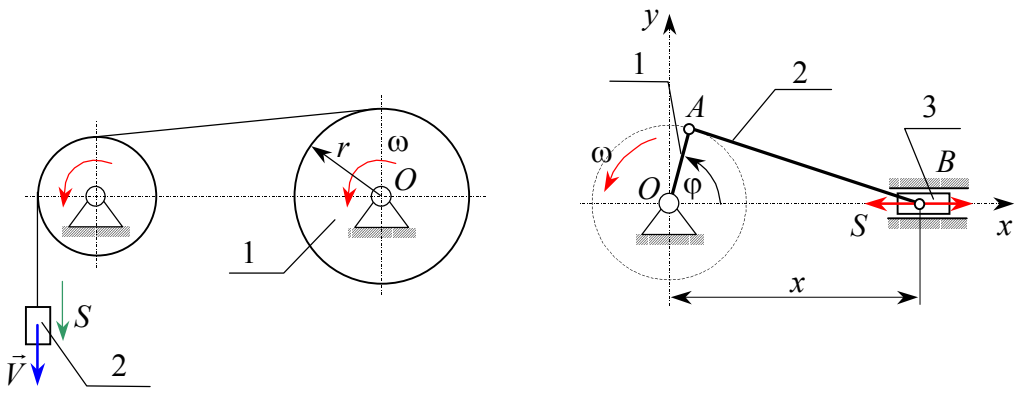
$$V_A = V_B = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2,$$

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{d_2}{d_1}. \qquad (96)$$

Kaip matome, formulės (92) ir (96) yra vienodos.

2. Judėjimo dėsnio keitimas

Galimas dalinis ir visiškas judėjimo dėsnio pakeitimas. Kai pakeičiama tik judėjimo trajektorija, turėsime dalinį keitimą, o kai pakeičiama ir trajektorija, ir judėjimo pobūdis (judėjimo lygtis), bus visiškas judesio pakeitimas. Panagrinėsime dvi schemas (73 pav.).



a) b)

73 pav. Judesį keičiantys mechanizmai

Tarkime, kad abiejų schemų 1 grandis juda pagal tą patį dėsnį $\varphi = f(t)$, $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$. 73 a pav. pateiktam mechanizmui turime:

$$V = \omega r, \quad V = \frac{dS}{dt}, \qquad \omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

arba

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} r.$$

Suintegravę $\int_0^S dS = r\int_0^\varphi d\varphi$, gausime:

$$S = \varphi r. \tag{97}$$

Matome, kad 73 a pav. pateiktoje schemoje pasikeitė judėjimo trajektorija (sukimasis į tiesiaeigį slenkamąjį judesį), bet judėjimo lygtis liko ta pati $\varphi = f(t)$.

73 b pav. schemai išėjimo grandies *3* judėjimo dėsnis bus $S = x(t)$. Tegul $OA = r$ ir $AB = l$. Iš trikampio *OAB* galima apskaičiuoti atstumą *x*:

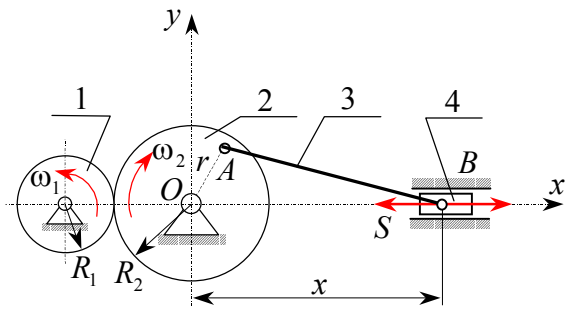
$$x = r\cos\varphi + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}. \tag{98}$$

Formulė (98) rodo, kad iš esmės pasikeitė išėjimo grandies judėjimas. 73 b pav. pavaizduotas mechanizmas turi plokščiai judančią grandį *2*. Ši grandis ir keičia judėjimo lygtį.

Be šio atvejo, judėjimo lygtį pakeičia specialios kinematinės pavaros: kumštelinė kinematinė pora, maltos kryžius ir kt.

3. Judesio greičio ir dėsnio keitimas

Šios sistemos yra jau aptartų judesio keitimo variantų junginys (74 pav.).



74 pav. Judėjimo greitį ir dėsnį keičiantis mechanizmas

Tarkime, kad turime $\varphi_1 = f_1(t)$, R_1, R_2, $OA = r$, $AB = l$. Apskaičiuosime grandies *4* judėjimo dėsnį $S(t)$. Iš *1–2* grandžių turime:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1} = u_{12} \quad \text{ir} \quad \omega_2 = \frac{\omega_1}{u_{12}}. \tag{99}$$

$$\omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt} \quad \text{ir analogiškai} \quad \omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt}.$$

Įrašome šias išraiškas į (99) ir gauname:

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{1}{u_{12}} \cdot \frac{d\varphi_1}{dt}$$

arba suintegravę:

$$\varphi_2 = \frac{1}{u_{12}} \cdot \varphi_1. \tag{100}$$

Kaip matyti iš (99) ir (100), kinematinė pora *1–2* pakeitė sukimosi greitį, bet judėjimo dėsnis liko tas pats.

Pasinaudoję formule (98), galime parašyti grandies *4* judėjimo dėsnį:

$$S = x = r\cos\varphi_2 + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi_2}, \tag{101}$$

čia $\varphi_2 = \frac{1}{u_{12}} \cdot \varphi_1$.

Taigi toks mišrusis mechanizmas u_{12} kartų pakeitė judėjimo greitį ir judėjimo lygtį.

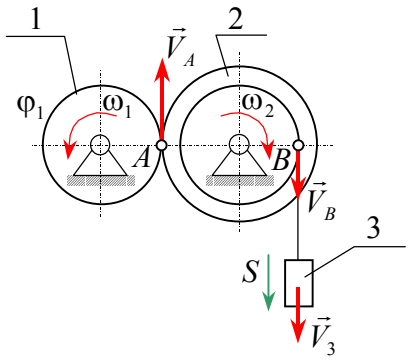
5.4.2. SISTEMOS GRANDŽIŲ IR TAŠKŲ GREIČIAI BEI PAGREIČIAI

Sistemos kinematinei analizei naudojami analiziniai ir grafoanaliziniai metodai. Analiziniai skaičiavimo metodai yra tikslūs, tačiau sudėtingoms sistemoms sunkiai pritaikomi. Grafoanaliziniais metodais galima apskaičiuoti bet kokio sudėtingumo sistemą, bet šie metodai yra riboto tikslumo.

Kinematinei analizei pasirinktos dvi su vienu laisvumo laipsniu sistemos: 1) sistema, sudaryta iš besisukančių ir slenkančių grandžių; 2) sistema, turinti plokščiai judančių grandžių.

1 pavyzdys

Sistemą sudaro du krumpliaračiai *1–2* ir ant lyno, apvynioto apie skriemulį *2*, pakabintas kūnas *3*. Krumpliaratis *1* sukasi pagal dėsnį $\varphi_1 = f_1(t)$. Ratų spinduliai: R_1, R_2, r_2. Apskaičiuoti grandžių ir taškų greičius bei pagreičius (75 pav.).



75 pav. Besisukančių ir slenkančių grandžių kinematinė schema

Skaičiavimas. Schemoje pažymime grandžių ir sąryšio taškų greičius. Pirmojo rato kampinis greitis:

$$\omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt}.$$

Kitiems greičiams skaičiuoti sudarome greičių sąryšio seką. Ši seka sudaroma priešinga kryptimi nuo išėjimo grandies *3* į įėjimo grandį *1*.

$$V_3 = V_B, \quad V_B = \omega_2 r_2, \qquad \omega_2 = \frac{V_2}{R_2}, \qquad V_A = \omega_1 R.$$

Norint apskaičiuoti bet kurį greitį, randame jo vietą sekoje ir, rinkdami konstantas, su kintamaisiais einame į grandinės galą.

$$V_3 = \omega_2 r_2 = \frac{V_2}{R_2} r_2 = \frac{\omega_1 R_1}{R_2} r_2 = \frac{r_2}{R_2} R_1 \frac{d\varphi_1}{dt}.$$

Formulėje konstanta R_1 keičia kampinį greitį į linijinį (keičia judėjimo trajektoriją); santykis $\frac{r_2}{R_2}$ keičia greičio modulį ($\frac{r_2}{R_2} = u$ – perdavimo skaičius).

Antrojo kūno greitis:

$$\omega_2 = \frac{V_A}{R_2} = \frac{\omega_1 R_1}{R_2} = \frac{R_1}{R_2}\frac{d\varphi_1}{dt}.$$

Pirmojo kūno pagreitis:

$$\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{d^2\varphi_1}{dt^2}.$$

Antrojo kūno pagreitis:

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{R_1}{R_2}\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = \frac{R_1}{R_2}\varepsilon_1.$$

Trečiojo kūno pagreitis:

$$a_3 = \frac{dV_3}{dt} = \frac{r_2}{R_2}R_1\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{r_2}{R_2}R_1\varepsilon_1.$$

Trečiojo kūno judėjimo dėsnis gaunamas iš trečiojo kūno greičio:

$$V_3 = \frac{dS_3}{dt} = \frac{r_2}{R_2}R_1\frac{d\varphi_1}{dt}.$$

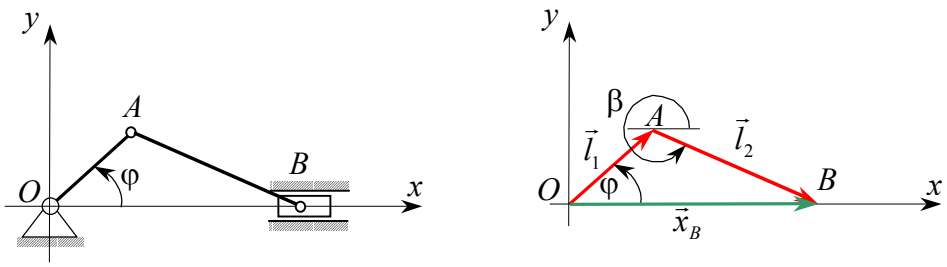
Iš čia $dS_3 = \frac{r_2}{R_2}R_1 d\varphi_1$. Integruojame:

$$\int_0^{S_3} dS_3 = \frac{r_2}{R_2}R_1\int_0^{\varphi_1} d\varphi_1, \qquad S_3 = \frac{r_2}{R_2}R_1\varphi_1,$$

Išvada. Sistemos su vienu laisvumo laipsniu linijiniai ir kampiniai pagreičiai ir poslinkiai susiję ta pačia priklausomybe, kaip atitinkami greičiai.

2 pavyzdys

Alkūninio mechanizmo kinematinė analizė. Grandžių ilgiai $OA = l_1$, $AB = l_2$ ir grandies OA sukimosi dėsnis $\varphi = f(t)$ (76 a pav.).



a) b)

76 pav. Mechanizmo kinematinė schema

Analizinis skaičiavimas

Analiziniam skaičiavimui pasirinktas vektorinis mechanizmo grandžių vaizdavimas (76 b pav.): grandį *OA* vaizduoja vektorius $\vec{l}_1$, *AB* – vektorius $\vec{l}_2$, o atstumą *OB* – vektorius $\vec{x}_B$. Iš vektorinio trikampio turime:

$$\vec{x}_B = \vec{l}_1 + \vec{l}_2. \tag{102}$$

Projektuojame vektorinę išraišką (102) į *xy* koordinačių ašis:

$$\begin{cases} x_B = l_1 \cos\varphi + l_2 \cos\beta, & (103) \\ 0 = l_1 \sin\varphi + l_2 \sin\beta. & (104) \end{cases}$$

Iš (104) lygties gauname:

$$\sin\beta = -\frac{l_1}{l_2}\sin\varphi. \tag{105}$$

Formulė (105) leidžia apskaičiuoti kampo β reikšmes, atitinkančias kampą φ. Greičiams skaičiuoti (103) ir (104) lygtis diferencijuojame laiko atžvilgiu:

$$\frac{dx_B}{dt} = -l_1 \sin\varphi \frac{d\varphi}{dt} - l_2 \sin\beta \frac{d\beta}{dt}, \tag{106}$$

$$0 = l_1 \cos\varphi \frac{d\varphi}{dt} + l_2 \cos\beta \frac{d\beta}{dt}, \tag{107}$$

čia $\frac{dx_B}{dt} = V_B$, $\frac{d\varphi}{dt} = \omega_1$, $\frac{d\beta}{dt} = \omega_2$.

Iš (107) lygties gauname ω_2 formulę, iš (106) – V_B:

$$\omega_2 = -\frac{l_1\omega_1 \cos\varphi}{l_2 \cos\beta}, \tag{108}$$

$$V_B = -\left(l_1\omega_1 \sin\varphi + l_2\omega_2 \sin\beta\right). \tag{109}$$

Dar kartą diferencijavę (106) ir (107) lygtis laiko atžvilgiu, gauname pagreičių ε_2 ir a_B formules:

$$\varepsilon_2 = \frac{l_1\omega_1^2 \sin\varphi - l_1\varepsilon_1 \cos\varphi + l_2\omega_2^2 \sin\beta}{l_2 \cos\beta}, \tag{110}$$

$$a_B = -l_1\left(\omega_1^2 \cos\varphi + \varepsilon_1 \sin\varphi\right) - l_2\left(\omega_2^2 \cos\beta + \varepsilon_2 \sin\beta\right). \tag{111}$$

Remiantis išvestomis formulėmis, galima sudaryti alkūninio mechanizmo viso darbo ciklo kinematinės analizės algoritmą kompiuteriniam skaičiavimui.

Grafoanalizinis skaičiavimas

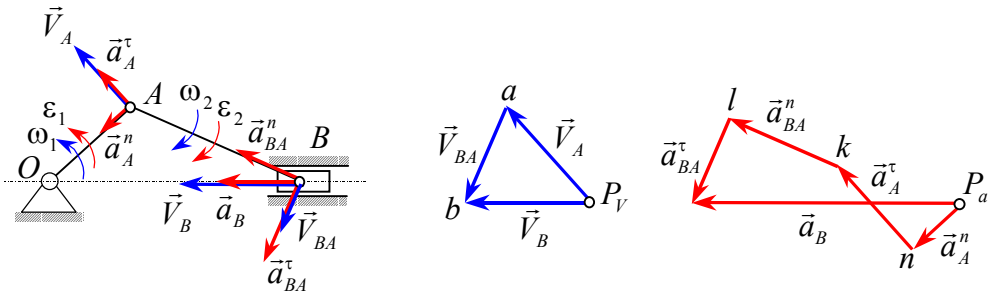
Atliekant grafoanalizinį skaičiavimą, mechanizmo schema nubraižoma tam tikru masteliu. Pasirenkamas grandį *OA* atitinkančios atkarpos ilgis $\overrightarrow{OA}$ (mm) ir apskaičiuojamas mastelis:

$$m_l = \frac{l_1}{OA} = k \qquad \left[\frac{m}{mm}\right].$$

Apskaičiuojama grandį *AB* atitinkanti atkarpa:

$$AB = \frac{l_2}{m_l} \quad [mm]$$

ir nubraižoma mechanizmo schema (77 a pav.).



77 pav. Mechanizmo grafoanalizinis skaičiavimas

Greičių skaičiavimas

Grandies *OA* kampinis greitis:

$$\omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt} \left[\frac{1}{s}\right].$$

Taško *A* greitis:

$$V_A = \omega_1 l_1 \left[\frac{m}{s}\right], \quad \vec{V}_A \perp OA.$$

Taško *B* greitis:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA},$$

$$V_{BA} = \omega_2 l_2, \qquad \vec{V}_{BA} \perp AB, \qquad \omega_2 - \text{nežinomasis.}$$

Toliau sudarome greičių planą. Pasirenkame atkarpos aP_V, atitinkančios greitį V_A, ilgį ir apskaičiuojame greičių plano mastelį:

$$m_V = \frac{V_A}{aP_V} = k_V \quad \left[\frac{\frac{m}{s}}{mm}\right].$$

Iš pasirinkto taško P_V brėžiame tiesę, lygiagrečią su vektoriumi $\vec{V}_A$, ir atidedame atkarpą aP_V (77 b pav.). Per tašką *a* brėžiame tiesę, lygiagrečią su vektoriumi $\vec{V}_{BA}$, o per P_V – tiesę, lygiagrečią su vektoriumi $\vec{V}_B$. Šių tiesių susikirtimo taškas *b* duoda vektorius $\vec{V}_B$ ir $\vec{V}_{BA}$.

Apskaičiuojame greičių modulius:

$$V_B = bP_V \cdot m_V \quad \left[\frac{m}{s}\right],$$

$$V_{BA} = ab \cdot m_V \quad \left[\frac{m}{s}\right],$$

$$\omega_2 = \frac{V_{BA}}{AB} \left[\frac{1}{s}\right].$$

Pagreičių skaičiavimas

Grandies *OA* kampinis pagreitis:

$$\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt}.$$

Taško *A* pagreitis:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{\,n} + \vec{a}_A^{\,\tau},$$

$$a_A^n = \omega_1^2 l_1 \left[\frac{m}{s^2}\right], \quad a_A^n \,//\, OA,$$

$$a_A^\tau = \varepsilon_1 l_1 \left[\frac{m}{s^2}\right], \quad a_A^\tau \perp OA.$$

Taško *B* pagreitis:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} = \vec{a}_A^{\,n} + \vec{a}_A^{\,\tau} + \vec{a}_{BA}^{\,n} + \vec{a}_{BA}^{\,\tau},$$

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 l_2 \quad \left[\frac{m}{s^2}\right], \quad a_{BA}^n \,//\, AB,$$

$$a^{\tau}_{BA} = \varepsilon_2 l_2 \qquad \left[\frac{m}{s^2}\right], \quad a^{\tau}_{BA} \perp AB, \qquad \varepsilon_2 \text{ – nežinomasis.}$$

Tolesniam skaičiavimui sudarome pagreičių planą. Pasirenkame vektorių $\vec{a}^{\,n}_A$ atitinkančios atkarpos nP_a ilgį ir apskaičiuojame pagreičių mastelį:

$$m_a = \frac{a^n_A}{nP_a} = k_a \qquad \left[\frac{\frac{m}{s^2}}{mm}\right].$$

Per pagreičių plano polių P_a brėžiame tiesę, lygiagrečią su vektoriumi $\vec{a}^{\,n}_A$, ir atidedame atkarpą $\overrightarrow{nP_a}$ (77 c pav.). Per tašką *n* brėžiame tiesę, lygiagrečią su vektoriumi $\vec{a}^{\,\tau}_A$, ir atidedame atkarpą $\overrightarrow{nk}$:

$$nk = \frac{a^{\tau}_A}{m_a} \quad [mm].$$

Per tašką *k* brėžiame tiesę, lygiagrečią su vektoriumi $\vec{a}^{\,n}_{BA}$, ir atidedame atkarpą $\overrightarrow{kl}$:

$$kl = \frac{a^n_{BA}}{m_a} \quad [mm].$$

Per tašką *l* brėžiame tiesę, lygiagrečią su vektoriumi $\vec{a}^{\,\tau}_{BA}$, o per P_a – tiesę, lygiagrečią su vektoriumi $\vec{a}_B$. Šių tiesių susikirtimo taškas *b* duoda vektorius $\vec{a}_B$ ir $\vec{a}_{BA}$.

Apskaičiuojame pagreičių modulius:

$$a_B = bP_a \cdot m_a \qquad \left[\frac{m}{s^2}\right],$$

$$a^{\tau}_{BA} = bl \cdot m_a \qquad \left[\frac{m}{s^2}\right],$$

$$\varepsilon_2 = \frac{a^{\tau}_{BA}}{l_2} \quad \left[\frac{1}{s^2}\right].$$

Schemoje pavaizduojame apskaičiuotus pagreičius.

LITERATŪRA

1. Baradokas P. ir kt. Teorinė mechanika. Kinematika. Paskaitų konspektas. Vilnius, 1980. 76 p.
2. Hibbler R. C. Engineering Mechanics: Statics and Dynamics. 6th ed. Macmillan Publishing Co. New York, 1992. 588 p.
3. Meriam J. L.; Kraige L. G. Engineering Mechanics, Statics. 4th ed. John Wiley& Sons, Inc. Canada, 1998. 526 p.
4. Paliūnas V. Teorinė mechanika. Vilnius: Žuvėdra, 1997. 482 p.
5. Targas S. Trumpas teorinės mechanikos kursas. Vilnius: Mintis, 1970. 476 p.
6. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. Москва: Наука, 1968. 480 с.
7. Яблонский А. А.; Никифорова В. М. Курс теоретической механики. Часть 1. Москва: Высшая школа, 1966. 438 с.

PRIEDAI

1 PRIEDAS. PAGRINDINĖS KINEMATIKOS FORMULĖS

Taško kinematika

Vektorinis judėjimo aprašymo būdas

$$\vec{r} = \vec{r}(t); \qquad \vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}; \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Koordinatinis judėjimo aprašymo būdas

$$x = x(t);\quad y = y(t);\quad z = z(t);$$

$$V_x = \frac{dx}{dt};\quad V_y = \frac{dy}{dt};\quad V_z = \frac{dz}{dt}; \qquad V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2};$$

$$\cos\alpha = \frac{V_x}{V};\quad \cos\beta = \frac{V_y}{V};\quad \cos\lambda = \frac{V_z}{V};$$

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2};\quad a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2};\quad a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}; \qquad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2};$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a};\quad \cos\beta = \frac{a_y}{a};\quad \cos\lambda = \frac{a_z}{a}.$$

Tolygusis tiesiaeigis judėjimas:

$$a = 0; \qquad V = \text{const}; \qquad x = Vt.$$

Tolygiai kintantis tiesiaeigis judėjimas:

$$a = \text{const}; \qquad V = V_0 + at; \qquad x = x_0 + V_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Natūralusis judėjimo aprašymo būdas

$$S = S(t); \qquad \vec{V} = V\vec{\tau}; \qquad \vec{V} = \frac{dS}{dt}\vec{\tau};$$

$$\vec{a}^{\,\tau} = \frac{d^2S}{dt^2}\vec{\tau} = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} = a^{\tau}\vec{\tau}; \qquad \vec{a}^{\,n} = \frac{V^2}{\rho}\vec{n} = a^n\vec{n}; \qquad a^b = 0; \qquad a = \sqrt{a^{\tau\,2} + a^{n\,2}}.$$

Tolygusis judėjimas:

$$a^{\tau}=0;\qquad V=\text{const};\qquad a^{n}=\frac{V^{2}}{\rho};\qquad S=S(t).$$

Tolygiai kintantis judėjimas:

$$a^{\tau}=\text{const};\qquad V=V_0+a^{\tau}t;\qquad a^{n}=\frac{V^{2}}{\rho};\qquad S=S_0+V_0t+\frac{a^{\tau}t^{2}}{2}.$$

Sudėtinis taško judėjimas

$$\vec{r}_a=\vec{r}_O+x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k};\qquad \vec{V}_a=\vec{V}_k+\vec{V}_r;\qquad \vec{a}_a=\vec{a}_k+\vec{a}_r+\vec{a}_c;$$

$$\vec{a}_c=2(\vec{\omega}_k\times\vec{V}_r);\qquad a_c=2\omega_k V_r\sin(\vec{\omega}_k,\vec{V}_r).$$

Kūno kinematika

Slenkamasis judėjimas

$$\vec{r}_B=\vec{r}_A+\vec{r}_{AB};\qquad \vec{r}_{AB}=\text{const};\qquad \vec{V}_B=\vec{V}_A;\qquad \vec{a}_B=\vec{a}_A.$$

Kūno sukimasis apie nejudamąją ašį

$$\varphi=\varphi(t);\qquad \omega=\frac{d\varphi}{dt};\qquad \varepsilon=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^{2}\varphi}{dt^{2}}.$$

Tolygusis sukimasis:

$$\varepsilon=0;\qquad \omega=\text{const};\qquad \varphi=\omega t;\qquad \omega=\frac{\pi n}{30}.$$

Tolygiai kintantis sukimasis:

$$\varepsilon=\text{const};\qquad \omega=\omega_0+\varepsilon t;\qquad \varphi=\varphi_0+\omega_0 t+\frac{\varepsilon t^{2}}{2}.$$

Besisukančio kūno taškų kinematinės charakteristikos:

$$V=\omega R;\qquad a^{n}=\omega^{2}R;\qquad a^{\tau}=\varepsilon R;\qquad a=R\sqrt{\varepsilon^{2}+\omega^{4}};\qquad tg\alpha=\frac{\varepsilon}{\omega^{2}}.$$

Kinematinių charakteristikų vektorinės priklausomybės:

$$\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{k} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{k}\,; \qquad \vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \cdot \vec{k}\,;$$

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}\,; \qquad \vec{a}^{\,n} = \vec{\omega} \times \vec{V}\,; \qquad \vec{a}^{\,\tau} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}\,; \qquad \vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{V} + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} = \vec{a}^{\,n} + \vec{a}^{\,\tau}\,.$$

Plokščiasis kūno judėjimas

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{AB}\,; \qquad x_A = f_1(t)\,; \qquad y_A = f_2(t)\,; \qquad \varphi = f_3(t).$$

Greičių priklausomybės:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}\,; \qquad \left[\vec{V}_B\right]_{AB} = \left[\vec{V}_A\right]_{AB}\,; \qquad \omega = \frac{V_{BA}}{AB}\,;$$

$$\frac{V_B}{BC} = \frac{V_A}{AC} = \frac{V_M}{MC}\,; \qquad \omega = \frac{V_A}{AC}\,; \qquad V_B = \omega \cdot BC\,; \qquad V_B = Ob \cdot \mu_V\,.$$

Pagreičių priklausomybės:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{\,n}_{BA} + \vec{a}^{\,\tau}_{BA}\,; \qquad \varepsilon = \frac{a^{\tau}_{BA}}{AB}\,; \qquad \frac{ab}{AB} = \frac{bc}{BC} = \frac{ac}{AC}\,; \qquad a_B = Ob \cdot \mu_a\,.$$

Sferinis kūno judėjimas

$$\begin{cases} \psi = f_1(t); \\ \varphi = f_2(t); \\ \theta = f_3(t); \end{cases} \qquad \begin{aligned} \omega_\psi &= \frac{d\psi}{dt}\,; \\ \omega_\varphi &= \frac{d\varphi}{dt}\,; \\ \omega_\theta &= \frac{d\theta}{dt}\,; \end{aligned} \qquad \vec{\omega} = \vec{\omega}_\psi + \vec{\omega}_\varphi + \vec{\omega}_\theta\,;$$

$$\begin{cases} \omega_x = \omega_\psi \sin\theta \sin\varphi + \omega_\theta \cos\varphi\,; \\ \omega_y = \omega_\psi \sin\theta \cos\varphi - \omega_\theta \sin\varphi\,; \\ \omega_z = \omega_\varphi + \omega_\theta \cos\theta\,; \end{cases} \qquad \omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}\,.$$

Greičių priklausomybės:

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}\,; \qquad \begin{aligned} V_x &= \omega_y z - \omega_z y; \\ V_y &= \omega_z x - \omega_x z; \\ V_z &= \omega_x y - \omega_y x. \end{aligned}$$

Pagreičių priklausomybės:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V}; \qquad \vec{a}_{\varepsilon} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}; \qquad \vec{a}_{\omega} = \vec{\omega} \times \vec{V};$$

$$\varepsilon_x = \frac{d\omega_x}{dt}; \qquad \varepsilon_y = \frac{d\omega_y}{dt}; \qquad \varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt}; \qquad \varepsilon = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2};$$

$$a_{\varepsilon x} = \varepsilon_y z - \varepsilon_z y; \qquad a_{\omega x} = \omega_y V_z - \omega_z V_y;$$
$$a_{\phi y} = \varepsilon_z x - \varepsilon_x z; \qquad a_{\omega y} = \omega_z V_x - \omega_x V_z;$$
$$a_{\varepsilon z} = \varepsilon_x y - \varepsilon_y x; \qquad a_{\omega z} = \omega_x V_y - \omega_y V_x.$$

Laisvasis kūno judėjimas

$$x_A = f_1(t); \qquad \psi = f_4(t);$$
$$y_A = f_2(t); \qquad \varphi = f_5(t);$$
$$z_A = f_3(t); \qquad \theta = f_6(t);$$

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA}; \qquad \vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{r};$$

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}; \qquad \vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V}_{MA}.$$

Sistemos kinematika

Kūnų sistemos laisvumo laipsnis

$$W = 3n - 2p_1 - p_2.$$

Leonidas Syrus, Petras Baradokas, Edvard Michnevič, Algirdas Čiučelis

TEORINĖ MECHANIKA. KINEMATIKA
Mokomoji knyga

Redaktorė L. Kertenienė

2005 10 21. 12,00 apsk. leid. l. Tiražas 300 egz.
Leido Vilniaus Gedimino technikos universiteto leidykla „Technika“,
Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius
Spausdino UAB „Biznio mašinų kompanija“, Gedimino pr. 60, LT-01110 Vilnius