

**Vilniaus Gedimino technikos universitetas**

**Kęstutis Vislavičius**

**MEDŽIAGŲ MECHANIKA 2**

Kontūriniai paskaitų tekstai statybos inžinieriams

Vilnius „Technika“ 2005

UDK 620.1(075.8)  
Vi282

**Kęstutis Vislavičius. MEDŹIAGŲ MECHANIKA 2. Kontūriniai paskaitų tekstai statybos inŹinieriams:** Mokomoji knyga. Vilnius: Technika, 2005. 60 p.

Kontūriniai paskaitų tekstai skirti *statybos specialybių studentams*, studijuojantiems medŹiagų mechaniką pagal modulį FMMAB4001. Paskaitų tekstai yra dalis metodinės medŹiagos, kurią, be šių tekstų, sudaro:

paties studento paskaitų užrašai;

A. Čižo vadovėlis *MedŹiagų atsparumas* (Vilnius: Technika, 1993. 408 p.);

A. Čižo, V. Viršilo, J. Źekevičiaus *Aiškinamasis medŹiagų atsparumo uŹdavinyNAS* (Vilnius: TEV, 2000. 295 p.);

A. Krenevičiaus, M. Źukštos mokomoji knyga *MedŹiagų atsparumas. Laboratoriniai darbai* (Vilnius: Technika, 2001. 77 p.);

K. Vislavičiaus, S. Stupako mokomoji knyga *Savarankiško darbo uŹduotys medŹiagų mechanikos studijoms* (Vilnius: Technika, 1998. 56 p.).

Kontūriniai paskaitų tekstai yra tęstiniai. MedŹiagų mechanikos pirmosios dalies (modulis FMMAB3001) paskaitų tekstai pateikti K. Vislavičiaus leidinyje *MedŹiagų mechanika 1. Kontūriniai paskaitų tekstai statybos inŹinieriams* (Vilnius: Technika, 2000. 100 p.). Jame pateikti pirmųjų vienuolikos medŹiagų mechanikos temų paskaitų tekstai (pradedant tema „Įvadas“ ir baigiant tema „Sijos poslinkiai“). Šiame leidinyje pateikiami medŹiagų mechanikos antrosios dalies (modulis FMMAB4001) paskaitų tekstai.

Leidinyje yra apie 75 proc. visos modulio FMMAB4001 medŹiagos. Kita medŹiaga (tekstai, uŹdavinių sprendimo pavyzdŹiai, schemas, lentelės ir kt.) pateikiama per paskaitas.

Leidinį rekomendavo Statybos fakulteto studijų komitetas

Recenzavo: doc. dr. L. Rimkus,  
doc. dr. M. Źukšta



*Autorius dėkoja prof. A. ČiŹui, suteikusiam galimybę pasinaudoti jo parengto vadovėlio rankraščiu. Rengiant paskaitų tekstus naudotasi docentų V. Kamaičio, V. Viršilo ir J. Źekevičiaus parengta paskaitų medŹiaga, kuri buvo aptarta MedŹiagų atsparumo katedros moksliniuose-metodiniuose seminaruose.*

VGTU leidyklos „Technika“ 732 mokomosios metodinės literatūros knyga

ISBN 9986-05-805-8

© K. Vislavičius, 2005

© VGTU leidykla „Technika“, 2005

# Turiny s

<b>12. Konstrukcinio elemento įtempioji ir deformuotoji būsen a</b>	
Bendrosios žinios.....	5
Dviašio įtempimų būvio įtempimai įstrižuosiuose pjūviuose.....	6
Dviašio įtempimų būvio svarbiausieji įtempimai.....	7
Taško deformuotosios būsenos sąvoka.....	8
Triašio įtempimų būvio fizikinės lygtys.....	9
Tempiamų arba gniuždomų elementų įtempimų būvis.....	10
Šliejamų elementų įtempimų būvis.....	10
Apskritų velenų įtempimų būvis.....	11
Sijos įtempimų būvis.....	12
<b>13. Stiprumo hipotezės</b>	
13.1. Bendrosios žinios.....	15
13.2. Stiprumo hipotezės.....	16
<b>14. Sudėtingas strypų deformavimas</b>	
14.1. Bendriausias sudėtingo strypų deformavimo atvejis.....	19
14.2. Įstrižasis lenkimas.....	22
14.3. Ekscentrinis tempimas.....	24
14.4. Lenkiami ir sukami strypai.....	26
14.5. Bet kaip apkrautų strypų įrašų diagramos.....	27
14.6. Bet kaip apkrautų strypų skerspjūvių poslinkiai.....	27
14.7. Kreivieji strypai.....	28
14.8. Plonasieniai indai.....	30
<b>15. Gniuždomųjų strypų stabilumas</b>	
15.1. Bendrosios žinios.....	34
15.2. Oilerio formulė.....	34
15.3. Oilerio formulės galiojimo ribos.....	36
15.4. Centriškai gniuždomų strypų skaičiavimas.....	37
15.5. Lenkiamo ir klupdomo strypo skaičiavimas.....	38
<b>16. Dinaminis deformavimas</b>	
16.1. Bendrosios žinios.....	41
16.2. Elementų skaičiavimas, kai žinomi jų dalelių pagreičiai.....	41
16.3. Smūgis.....	44
<b>17. Cikliškai kintantys įtempimai</b>	
17.1. Bendrosios žinios apie nuovargio suirimą.....	47
17.2. Ciklinė apkrova.....	47
17.3. Patvarumo riba.....	48
17.4. Ribinių amplitudžių diagrama.....	48
17.5. Įvairių veiksnių įtaka patvarumo ribos didumui.....	49
17.6. Varginamų detalių skaičiavimas.....	50

## **18. Tamprių-plastinių strypų deformavimas**

18.1.	Tamprių-plastinių medžiagų deformavimo diagramų schematizacija.....	53
18.2.	Idealiai tampraus-plastinio strypo tempimas.....	53
18.3.	Idealiai tampraus-plastinio skritulinio skerspjūvio strypo sukimas.....	54
18.4.	Idealiai tampraus-plastinio strypo lenkimas .....	55

## **19. Irimas**

19.1.	Bendrosios žinios.....	58
19.2.	Trapūs irimas.....	58

## 12. Konstrukcinio elemento įtemptoji ir deformuotoji būseną

### 12.1. Bendrosios žinios

■ Šiame skyriuje iš pradžių nagrinėsime bet kaip deformuojamo konstrukcinio elemento taške veikiančius įtempimus ir deformacijas, išsiaiškinsime, kaip nustatyti šių dydžių kitimo dėsningumus, jų ekstremaliosias reikšmes ir veikimo kryptį, vėliau šias žinias pritaikysime nagrinėdami tempiamo arba gniuždomo, kerpamo, sukamo ar lenkiamo elemento įtemptąją ir deformuotąją būsenas.

■ Bet kaip apkrauto konstrukcinio elemento taško  $K$  aplinkoje išskirkime elementarų stačiakampį gretasienį (12.1 pav.). Kadangi gretasienis nykstamai mažas, laikysime, kad įtemptoji būseną (visuma įtempimų, veikiančių bet kaip tašką kertančių plokštumų daugybėje) visuose jo taškuose yra vienoda ir sutampa su taško  $K$  įtemptąja būseną. Kiekvienas įtempimas, veikiantis elementaraus gretasienio sienelėje, paprastai išskaidomas į tris komponentus: normalinį ir du tangentinis įtempimus (12.2 pav.). Tiek normalinio, tiek tangentinis įtempimų pirmasis indeksas sutampa su sienelės normalės indeksu, antrasis – su ašies, su kuria lygiagrečiai veikia įtempimas, indeksu (dėl trumpumo  $\sigma_{zz} \equiv \sigma_z$ ,  $\sigma_{yy} \equiv \sigma_y$ ,  $\sigma_{xx} \equiv \sigma_x$ ). Normalinis įtempimas laikomas teigiamu, kai veikia nuo sienelės, tangentinis – kai jo veikiama sienelė, matoma iš jos normalės teigiamo galo, pasilenka kurios nors kitos savo ašies teigiama kryptimi. Pasirodo, kad taško  $K$  aplinkoje visada galima išskirti taip orientuotą gretasienį, kad jo sienelėse tangentiniai įtempimai būtų lygūs nuliui. Atsižvelgiant į tai, ar gretasienis yra tempiamas arba gniuždomas viena, dviem ar trimis tarpusavyje statmenomis kryptimis, skiriami linijinis (vienaašis), plokštuminis (dviašis) ir erdvinis (triašis) įtempimų būviai (12.3 pav.).

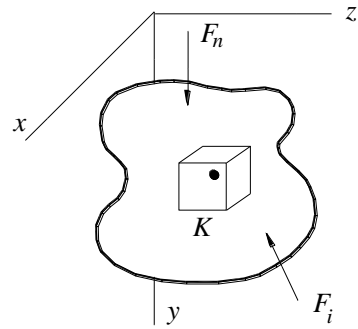
■ Terminas *įtemptoji būseną* apibūdina reiškinį, terminas *įtempimų būvis* – šio reiškinio rodiklį. Išnagrinėsime, kokiais ir keliais parametrais aprašomas bendriausias (triašis) įtempimų būvis (apie tai buvo užsiminta 3.5 poskyryje).

Išskirtasis elementarus stačiakampis gretasienis (12.2 pav.) yra pusiausvyras. Užrašykime jam, pavyzdžiui, pusiausvyros lygtį  $\sum M_{fx} = 0$ :  $\tau_{yz} \cdot dx \cdot dz \cdot \frac{dy}{2} \cdot 2 - \tau_{zy} \cdot dx \cdot dy \cdot \frac{dz}{2} \cdot 2 = 0$ . Sutvarkę lygtį gauname, kad  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ . Užrašę kitas dvi momentų lygtis:  $\sum M_{fy} = 0$  ir  $\sum M_{fz} = 0$ , analogiškai gautume, kad  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ ,  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ . Apibendrinkime: tangentiniai įtempimai, statmeni bendrai briaunai ir veikiantys tarpusavyje statmenose plokštumose, yra lygūs, o jų veikimo kryptys eina arba briaunos link, arba tolyn nuo jos. Tai yra bendrasis tangentinis įtempimų dualumo dėsnis.

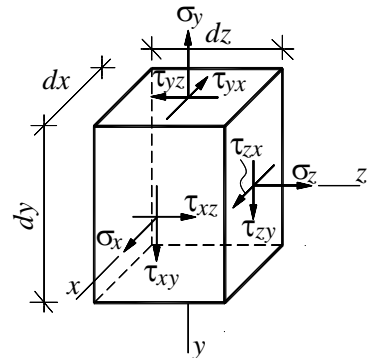
Taigi įtempimų būvis apibūdinamas šešiais parametrais:

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ .

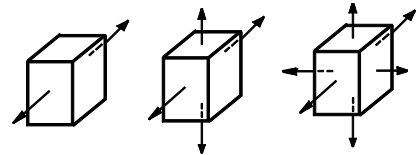
■ Erdvinis įtempimų būvis detalai nagrinėjamas tamprumo teorijos kurse. Toliau nagrinėsime dažniausiai medžiagų mechanikos kurse pasitaikantį plokštuminį įtempimų būvį.



12.1 pav.



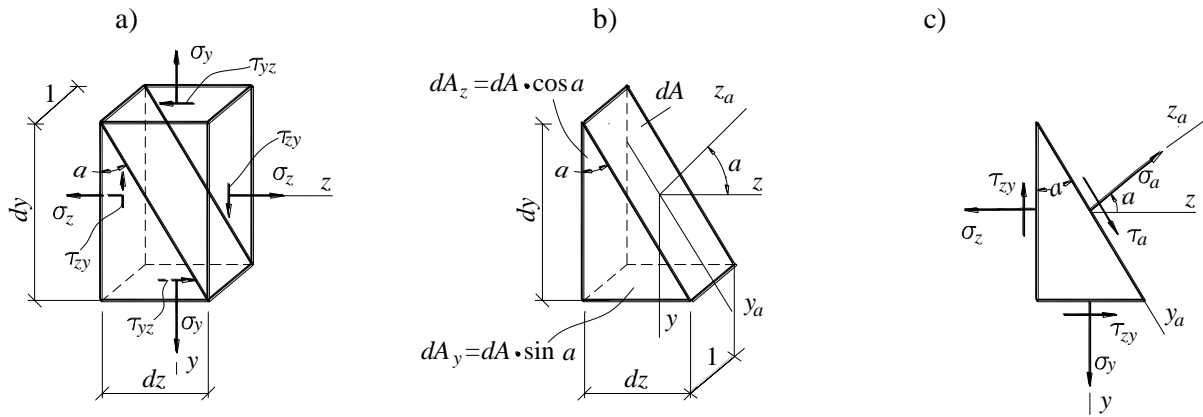
12.2 pav.



12.3 pav.

## 12.2. Dviašio įtempimų būvio įtempimai įstrižuosiuose pjūviuose

■ Tarkime, elementaraus stačiakampio gretasienio įtempioji būseną apibūdinama dviašiu įtempimų būviu ( $\sigma_x = 0, \sigma_y \neq 0, \sigma_z \neq 0, \tau_{xy} = 0, \tau_{zy} \neq 0, \tau_{zx} = 0$ ). Iš šio elementaraus stačiakampio gretasienio (12.4a pav.) išpjaukime stačiąją trikampę prizmę (12.4b pav.) ir nagrinėkime tik tas jos sienes (plokštumas), kurios yra statmenos neapkrautoms sienelėms (12.4c pav.).



12.4 pav.

Įtempimus, veikiančius nagrinėjamoje prizmės plokštumoje ( $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$ ), rasime iš pusiausvyros sąlygų. Suprojektuokime visas stačiąją prizmę veikiančias jėgas į ašį  $z_\alpha$ :

$$\begin{aligned} \sum F_{z\alpha} &= 0; \\ \sigma_\alpha \cdot dA - \sigma_z \cdot dA \cdot \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sigma_y \cdot dA \cdot \sin\alpha \cdot \sin\alpha + \tau_{zy} \cdot dA \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha + \tau_{yz} \cdot dA \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha &= 0. \end{aligned}$$

Prisiminkime, kad  $\tau_{zy} = \tau_{yz}$ ,  $2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin 2\alpha$ , tuomet

$$\sigma_\alpha = \sigma_z \cdot \cos^2\alpha + \sigma_y \cdot \sin^2\alpha - \tau_{zy} \cdot \sin 2\alpha. \quad (12.1)$$

Suprojektuokime visas stačiąją prizmę veikiančias jėgas į ašį  $y_\alpha$ :

$$\begin{aligned} \sum F_{y\alpha} &= 0; \\ \tau_\alpha \cdot dA - \sigma_z \cdot dA \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha + \sigma_y \cdot dA \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha - \tau_{zy} \cdot dA \cdot \cos\alpha \cdot \cos\alpha + \tau_{yz} \cdot dA \cdot \sin\alpha \cdot \sin\alpha &= 0. \end{aligned}$$

Prisiminkime, kad  $\tau_{zy} = \tau_{yz}$ ,  $2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin 2\alpha$ ,  $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$ , tuomet

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{zy} \cos 2\alpha. \quad (12.2)$$

Normaliniai įtempimai, veikiantys plokštumoje, statmenoje nagrinėjamai, gaunami iš (12.1) lygtį įrašius kampo  $\beta$  reikšmę ( $\beta = \alpha + 90^\circ$ ):

$$\sigma_\beta = \sigma_z \cdot \sin^2\alpha + \sigma_y \cdot \cos^2\alpha + \tau_{zy} \cdot \sin 2\alpha. \quad (12.3)$$

Tangentiniai įtempimai statmenose plokštumose pagal dualumo dėsnį yra tarp savęs lygūs:  $\tau_\beta = \tau_\alpha$ .

■ *Pastaba.* Sudėjus (12.1) ir (12.3) lygtis, gaunama svarbi priklausomybė:

$$\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta} = \sigma_z + \sigma_y = \text{const} . \quad (12.4)$$

12.1 pvz.    ✖ ✖ ✖

### 12.3. Dviašio įtempimų būvio svarbiausieji įtempimai

■ Sukant elementarų stačiakampį gretasienį, galima rasti tokią jo padėtį (kampą  $\alpha_0$ ), kuriai esant normalinis įtempimas  $\sigma_{\alpha}$  pasieks didžiausią reikšmę. Remiantis (12.4) lygtimi, statmenoje plokštumoje normalinis įtempimas bus minimalus. Šias plokštumas ir jas atitinkančius ekstreminius normalinius įtempimus nustatysime normalinio įtempimo įstrižajame pjūvyje išvestinę prilyginę nuliui:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} &= -2\sigma_z \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha + 2\sigma_y \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha - 2\tau_{zy} \cdot \cos 2\alpha = \\ &= -(\sigma_z - \sigma_y) \sin 2\alpha - 2\tau_{zy} \cdot \cos 2\alpha = -2 \left[ \frac{(\sigma_z - \sigma_y)}{2} \sin 2\alpha + \tau_{zy} \cdot \cos 2\alpha \right] = -2\tau_{\alpha} = 0, \\ \tau_{\alpha} &= 0. \end{aligned} \quad (12.5)$$

Taigi plokštumose, kuriose veikia ekstreminiai normaliniai įtempimai, tangentiniai įtempimai lygūs nuliui. Tokios plokštumos vadinamos svarbiausiosiomis plokštumomis, o jose veikiantys įtempimai – svarbiausiais nagrinėjamo taško įtempimais. Jie žymimi simboliais  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  ir  $\sigma_3$ ; visada  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ . Pavyzdžiui, yra tokie įtempimai:  $-42$  MPa,  $0$ ,  $63$  MPa, tada  $\sigma_1 = 63$  MPa,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = -42$  MPa.

Svarbiausiųjų plokštumų padėtis (kampas  $\sigma_{\alpha}$ ) gaunama iš (12.5) lygties:

$$\text{tg}2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{zy}}{(\sigma_z - \sigma_y)}. \quad (12.6)$$

Kai žinoma svarbiausiųjų plokštumų padėtis, svarbiausieji įtempimai skaičiuojami pagal (12.1), (12.3) formules:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_w &= \sigma_z \cdot \cos^2 \alpha_0 + \sigma_y \cdot \sin^2 \alpha_0 - \tau_{zy} \cdot \sin 2\alpha_0, \\ \sigma_v &= \sigma_z \cdot \sin^2 \alpha_0 + \sigma_y \cdot \cos^2 \alpha_0 - \tau_{zy} \cdot \sin 2\alpha_0. \end{aligned} \right\} \quad (12.7)$$

*Pastaba.* Ašis  $z$ , tapusi svarbiausiaja, paprastai žymima raide  $w$ , ašis  $y$ , tapusi svarbiausiaja, – raide  $v$ ; kai svarbiausiaja ašimi tampa ašis  $x$ , paprastai ji žymima raide  $u$ .

Lygtis (12.2) naudojama skaičiavimams tikrinti:

$$\tau_{wv} = \frac{(\sigma_z - \sigma_y)}{2} \sin 2\alpha_0 + \tau_{zy} \cdot \cos 2\alpha_0 = 0. \quad (12.8)$$

Iš (12.1) ir (12.3) formulių išeliminavus kampą  $\alpha_0$ , gaunama lygtis, leidžianti rasti svarbiausiuosius įtempimus, nežinant svarbiausiųjų plokštumų padėties:

$$\sigma_{\max(\min)} = \sigma_{1(3)} = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_z + \sigma_y) + (-) \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2} \right]. \quad (12.9)$$

12.1 tekstas, 12.5 pav., 12.2 pvz.    ✖ ✖ ✖

■ Tarkime, yra žinomi svarbiausieji įtempimai  $\sigma_1$  ir  $\sigma_3$ . Tuomet, remiantis (12.1) ir (12.2) formulėmis,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_3 \cdot \sin^2 \alpha, \\ \tau_\alpha &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (12.10)$$

čia  $\alpha$  – kampas tarp svarbiausiosios plokštumos, kurioje veikia  $\sigma_1$ , ir plokštumos, kurioje skaičiuojami įtempimai.

Iš (12.10) antrosios formulės matyti, kad tangentiniai įtempimai yra didžiausi plokštumose, kurios sudaro  $\frac{\pi}{4}$  kampą su svarbiausiosiomis plokštumomis ( $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ,  $2\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $\sin 2\alpha = 1$ ):

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad (12.11)$$

arba panaudojant (12.9)

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2}. \quad (12.12)$$

Plokštumose, kuriose veikia  $\tau_{\max}$ , normaliniai įtempimai bendroju atveju nėra lygūs nuliui ( $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$ ):

$$\sigma_{\pm \frac{\pi}{4}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2}. \quad (12.13)$$

Atvejis, kai plokštumose, kuriose veikia  $\tau_{\max}$ , normaliniai įtempimai yra lygūs nuliui, vadinamas grynąja šlytimi:

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = \sigma = \tau_{\max}. \quad (12.14)$$

12.3 pvz.    ✱ ✱ ✱

#### 12.4. Taško deformuotosios būsenos sąvoka

■ Elementarus stačiakampis gretasienis, veikiamas įtempimų, deformuojasi. Dėl normalinių įtempimų pasikeičia jo briaunų ilgiai, dėl tangentinių – kampai tarp jo sienelių. Prisiminkime, kad pirmosios deformacijos vadinamos linijinėmis ir žymimos simboliškai  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$ , o antrosios – šlyties (kampinėmis) ir žymimos simboliškai  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$ ,  $\gamma_{xz}$ . Taigi konstrukcinio elemento taško deformuotąją būseną (visumą linijinių ir kampinių deformacijų, atsirandančių įvairiomis kryptimis ir įvairiose plokštumose taško aplinkoje) taip pat apibūdina vienas rodiklis – deformacijų būvis, turintis šešis parametrus, tik šį kartą, skirtingai nuo įtempimų būvio, tai yra ne įtempimai, o deformacijos.

■ Jei konstrukcinis elementas yra tamprus ir izotropinis, tai tarp formulių, išreiškiančių ryšį tarp įtempimų, ir tarp formulių, išreiškiančių ryšį tarp deformacijų, yra matematinė analogija. Ji pasireiškia tuo, kad linijines deformacijas  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$ ,  $\varepsilon_\alpha$  atitinka normaliniai įtempimai  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\sigma_\alpha$ , o šlyties deformacijas



$\frac{\gamma_{zy}}{2}, \frac{\gamma_{\alpha}}{2}$  – tangentiniai įtempimai  $\tau_{zy}, \tau_{\alpha}$ . Pavyzdžiui, formulės svarbiausiosioms linijinėms deformacijoms skaičiuoti turi tokį pavidalą:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_w &= \varepsilon_z \cdot \cos^2 \alpha_0 + \varepsilon_y \cdot \sin^2 \alpha_0 - \frac{\gamma_{zy}}{2} \sin 2\alpha_0, \\ \varepsilon_v &= \varepsilon_z \cdot \sin^2 \alpha_0 + \varepsilon_y \cdot \cos^2 \alpha_0 + \frac{\gamma_{zy}}{2} \sin 2\alpha_0. \end{aligned} \right\} \quad (12.15)$$

## 12.5. Triašio įtempimo būvio fizikinės lygtys

■ Nagrinėsime tik normalinių įtempimų ir linijinių deformacijų ryšį. Tarsime, kad konstrukcinio elemento medžiaga yra tampri ir izotropinė. Remsimės Huko dėsnio ir skersinių bei išilginių deformacijų priklausomybe  $\varepsilon_q = -\nu \cdot \varepsilon$ .

Tarkime, kad elementaraus stačiakampio gretasienio sienelėse (12.6 pav.) veikiantys įtempimai  $\sigma_y$  ir  $\sigma_z$  yra lygūs nuliui, tuomet deformacija  $x$  ašies kryptimi  $\varepsilon_x$  priklausys tik nuo normalinio įtempimo  $\sigma_x$ :  $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$ . Dabar tarkime, kad elementaraus stačiakampio gretasienio sienelėse veikia tik normalinis įtempimas  $\sigma_y$  (įtempimai  $\sigma_x$  ir  $\sigma_z$  lygūs nuliui). Linijinę deformaciją  $x$  ašies kryptimi  $\varepsilon_x$  gausime naudodami Puasono koeficientą (deformacija  $\varepsilon_x$  yra skersinė įtempimo  $\sigma_y$  veikimo krypties atžvilgiu):

$\varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_y}{E}$ . Analogiškai samprotaudami gautume, kad kai įtempimai  $\sigma_x$  ir  $\sigma_y$  yra lygūs nuliui,

$\varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_z}{E}$ . Galiausiai galime užrašyti, kad  $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$ .

Apibendrinę gauname:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E}, \end{aligned}$$

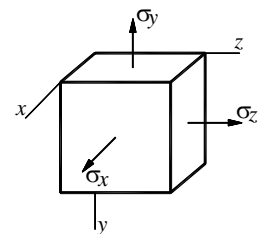
arba

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned} \right\} \quad (12.16)$$

Gautos lygtys vadinamos bendruoju Huko dėsnio.

*Pastaba.* Sąlyga, kad įtempimas kuria nors kryptimi lygus nuliui, nereiškia, kad linijinė deformacija ta pačia kryptimi taip pat lygi nuliui: Pavyzdžiui,  $\sigma_z = 0$ ,  $\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$ .

■ Prisiminkime, kad dėl normalinių įtempimų keičiasi elementaraus stačiakampio gretasienio briaunų ilgiai, taigi keičiasi ir jo tūris. Aptarkime *tūrinės deformacijos* sąvoką. Tūrine deformacija vadinamas deformuojamo kūno be galo mažo elemento tūrio pokyčio santykis su pradiniu elemento tūriu:



12.6 pav.

$$\varepsilon_v = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{\Delta dV}{dV}. \quad (12.17)$$

Pasinaudojus triašio įtempimų būvio fizikinėmis lygtimis tūrinė deformacija gali būti išreikšta linijinėmis deformacijomis:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (12.18)$$

arba normaliniais įtempimais:

$$\varepsilon_v = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (12.19)$$

12.2 tekstas, 12.7 pav., 12.4 pvz.    ❖ ❖ ❖

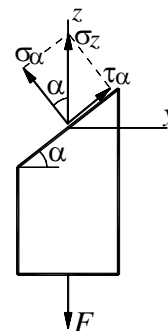
## 12.6. Tempiamų arba gniuždomų elementų įtempimų būvis

■ Nagrinėsime įtempimus, veikiančius tempiamo strypo įstrižame pjūvyje (12.8 pav.).

Normalinį ir tangentinį įtempimus, veikiančius pjūvyje, kurio normalė sudaro kampą  $\alpha$  su  $z$  ašimi, apskaičiuosime naudodami (12.1) ir (12.2) formules, įvertindami tą faktą, kad tempiamo arba gniuždomo strypo skerspjūvyje veikia tik normaliniai įtempimai  $\sigma_z$  ( $\sigma_y = 0$ ,  $\tau_{zy} = 0$ ):

$$\sigma_\alpha = \sigma_z \cos^2 \alpha, \quad (12.20)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_z}{2} \sin 2\alpha. \quad (12.21)$$



12.8 pav.

*Pastaba.* Prisiminkime, kaip įtempimai  $\sigma_\alpha$  ir  $\tau_\alpha$  buvo gauti 4.7 poskyryje. Ten pat buvo aptartos ir trys ypatingos pjūvių padėtys.

12.5 pvz.    ❖ ❖ ❖

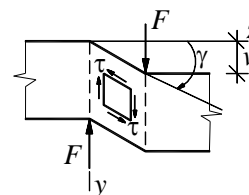
## 12.7. Šliejamų elementų įtempimų būvis

■ Jeigu plokštumomis, statmenomis kirpimo jėgos kryptiai ir lygiagrečiomis su ja, iš šliejamo elemento išskirsime stačiakampį gretasienį, tai jo sienelėse veiks tik tangentiniai įtempimai (12.9 pav.). Toks įtempimų būvio atvejis vadinamas grynąja šlytimi. Tyrinėtojus dažnai domina svarbiausias įtempimų būvis, t. y. toks įtempimų būvio atvejis, kai plokštumose veikia tik normaliniai ekstreminiai įtempimai  $\sigma_1$  ir  $\sigma_3$ , o tangentiniai įtempimai lygūs nuliui. Pasinaudokime (12.9) lygtimi:

$$\sigma_{1,3} = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_z + \sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2} \right].$$

Grynosios šlyties atveju  $\sigma_z = 0$ ,  $\sigma_y = 0$ , taigi

$$\sigma_{1,3} = \pm \tau_{zy}. \quad (12.22)$$



12.9 pav.

Šie svarbiausieji įtempimai veikia plokštumose, kurios sudaro kampą  $\frac{\pi}{4}$  su grynosios šlyties plokštumomis (12.10 pav.):

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{zy}}{\sigma_z - \sigma_y} = -\infty, \quad 2\alpha_0 = -\frac{\pi}{2}, \quad \alpha_0 = -\frac{\pi}{4}. \quad \text{Analogiškai}$$

$$\beta_0 = \frac{\pi}{4}.$$

*Pastaba.* Grynoji šlytis yra vienintelis plokštuminio įtempimų būvio atvejis, kuriam esant nesikeičia elemento tūris; keičiasi tik jo forma.

■ Nustatysime tamprumo modulio  $E$ , šlyties modulio  $G$  ir Puasono koeficiento  $\nu$  ryšį.

Stačiakampiui gretasieniui susišliejus (12.11 pav.) pasikeis jo įstrižainės ilgis  $s$ . Įstrižainės ilgio pokytį nustatysime dvejopai:

a) laikysime, kad ji pailgėjo dėl šlyties deformacijų:

$$\Delta s = \nu \cdot \cos \frac{\pi}{4} = a \cdot \gamma \cdot \cos \frac{\pi}{4} = s \cdot \cos \frac{\pi}{4} \cdot \gamma \cdot \cos \frac{\pi}{4} =$$

$$s \cdot \frac{\tau}{G} \cos^2 \frac{\pi}{4} = s \cdot \frac{\tau}{G} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = s \cdot \frac{\tau}{2G};$$

b) laikysime, kad ji pailgėjo dėl linijinių deformacijų:

$$\Delta s = \varepsilon_1 \cdot s = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu \sigma_3) \cdot s =$$

$$s \frac{1}{E} (\tau - \nu(-\tau)) = s \frac{\tau}{E} (1 + \nu).$$

Sulyginę šios įstrižainės ilgio pokyčius gauname:

$$s \frac{\tau}{2G} = s \frac{\tau}{E} (1 + \nu),$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

(12.23)

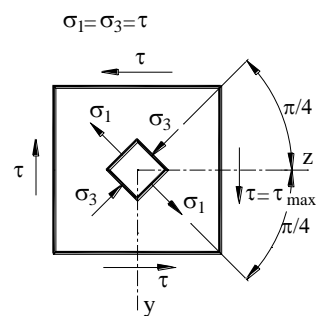
Ši formulė išreiškia trijų medžiagos tamprumo rodiklių ryšį. Eksperimentiškai nustačius du iš jų, trečiąją galima rasti iš (12.23) formulės. Pavyzdžiui, plienui, kurio  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0,25$ :

$$G = \frac{200}{2(1 + 0,25)} = 80 \text{ GPa}.$$

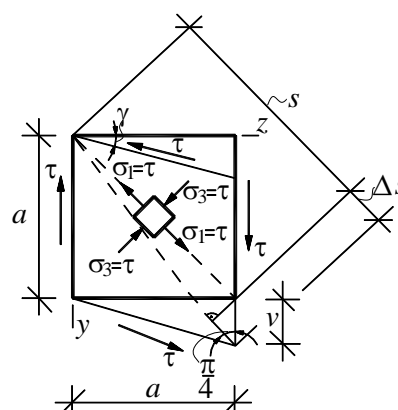
12.6 pvz.    ✖ ✖ ✖

## 12.8. Apskritų velenų įtempimų būvis

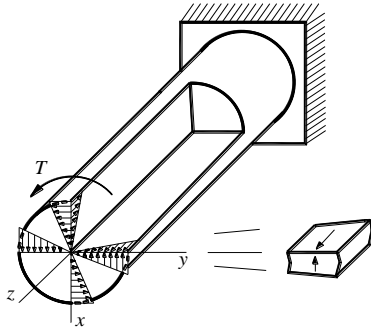
■ Sukamo skritulinio skerspjūvio strypo skerspjūvyje veikia tik tangentiniai įtempimai, kurie kiekviename skerspjūvio taške yra statmeni spinduliui, jungiančiam šį tašką su strypo ašimi. Dėl tangentinų įtempimų dualumo tokie patys įtempimai atsiranda ir išilginėse strypo plokštumose, einančiose per strypo ašį (12.12 pav.). Taigi skersiniais ir išilginiais pjūviais išskirto sukamo strypo elemento įtemptąją būseną apibūdina grynosios šlyties įtempimų būvis.



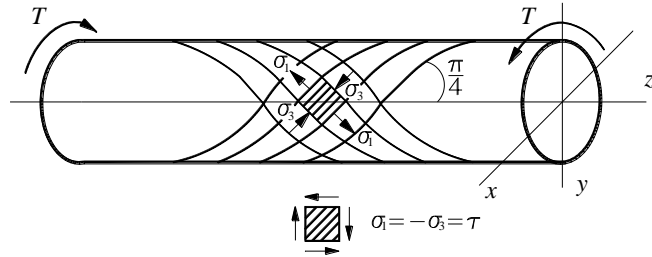
12.10 pav.



12.11 pav.



12.12 pav.

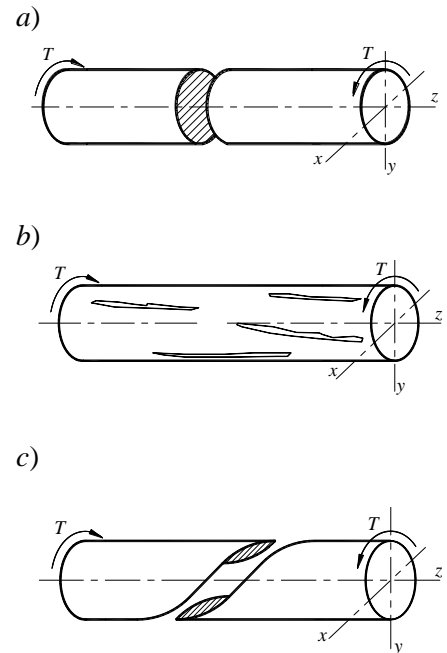


12.13 pav

■ Prisiminkime, kad grynosios šlyties atveju svarbiausieji įtempimai veikia plokštumose, sudarančiose  $\frac{\pi}{4}$  kampą su grynosios šlyties plokštumomis; jie yra lygūs tangentiniam įtempimams, lygūs tarpusavyje, bet veikia priešingomis kryptimis. Kaip kinta svarbiausių įtempimų kryptis sukamame strype, vaizdžiai parodo svarbiausių įtempimų trajektorijos, t. y. linijos, kurių liestinė kiekviename strypo taške sutampa su tame taške veikiančio svarbiausiojo įtempimo kryptimi (12.13 pav.).

*Pastaba.* Svarbiausių įtempimų trajektorija sudaro sraigtinę liniją, sudarančią  $\frac{\pi}{4}$  kampą su strypo sudaromąja.

■ Taigi sukamas strypas gali suirti nuo tangentių įtempimų, veikiančių skerspjūvyje, nuo tangentių įtempimų, veikiančių išilginiuose pjūviuose, ir nuo svarbiausių įtempimų, veikiančių įstrižuosiuose pjūviuose. Pirmojo tipo įtempimai pavojingi plastiškoms medžiagoms, todėl strypai, pagaminti, pavyzdžiui, iš plastiško plieno, suyra skerspjūvyje (12.14a pav.). Antrojo tipo įtempimai pavojingi mediniams strypams, nes mediena neatspari skėlimui išilgai sluoksnių. Tokie strypai suyra išilginiuose pjūviuose (12.14b pav.). Trečiojo tipo įtempimai pavojingi strypams, pagamintiems iš trapių medžiagų, nes jos mažiau atsparios tempimui. Tokie strypai (pavyzdžiui, ketiniai) suyra įstrižuosiuose pjūviuose (12.14c pav.).

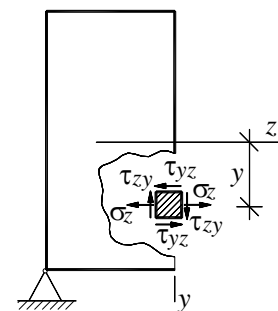


12.14 pav.

## 12.9. Sijos įtempimų būvis

■ Bendruoju atveju bet kuriame sijos taške (12.15 pav.) veikia tiek normaliniai, tiek tangentiniai įtempimai. Taigi išskirto taško aplinkoje elementaraus stačiakampio gretasienio įtempioji būseną apibūdinama plokštuminiu įtempimų būviu. Jeigu elementaraus stačiakampio gretasienio viena iš plokštumų sutampa su skerspjūvio plokštuma, tai

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{zy} = \tau_{yz} = \frac{Q_y |S_x|}{I_x \cdot b} \quad (12.24)$$

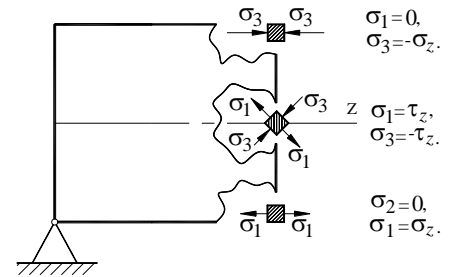


2.15 pav.

■ Nustatysime, kaip kinta įtempimų būvis vieno ir to paties sijos skerspjūvio aukštyje. Naudosime (12.9) ir (12.6) formules. Įrašę į jas  $\sigma_y = 0$ , gausime, kad

$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} = \frac{1}{2} \left( \sigma_z \pm \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{zy}^2} \right),$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{zy}}{\sigma_z}.$$



12.16 pav.

Nagrinėsime tris sijos skerspjūvio sluoksnius (12.16 pav., lentelė).

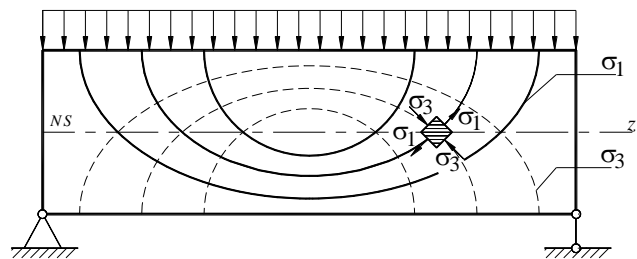
Viršutinis gniuždomas sluoksnis ( $\sigma_z < 0, \tau_{zy} = 0$ )	Neutralusis sluoksnis ( $\sigma_z = 0, \tau_{zy} > 0$ )	Apatinis tempiamas sluoksnis ( $\sigma_z > 0, \tau_{zy} = 0$ )
$\sigma_1 = \frac{1}{2} \left( (-\sigma_z) + \sqrt{\sigma_z^2 + 0} \right) = 0,$	$\sigma_1 = \frac{1}{2} \left( 0 + \sqrt{0 + 4\tau_{zy}^2} \right) = \tau_{zy},$	$\sigma_1 = \frac{1}{2} \left( \sigma_z + \sqrt{\sigma_z^2 + 0} \right) = \sigma_z,$
$\sigma_3 = \frac{1}{2} \left( (-\sigma_z) - \sqrt{\sigma_z^2 + 0} \right) = -\sigma_z,$	$\sigma_3 = \frac{1}{2} \left( 0 - \sqrt{0 + 4\tau_{zy}^2} \right) = -\tau_{zy},$	$\sigma_3 = \frac{1}{2} \left( \sigma_z - \sqrt{\sigma_z^2 + 0} \right) = 0,$
$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{0}{(-\sigma_z)} = 0,$	$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{zy}}{0} = -\infty,$	$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{0}{\sigma_z} = 0,$
$\alpha_0 = 0.$	$\alpha_0 = -\frac{\pi}{4}.$	$\alpha_0 = 0.$

Apibendrinus lentelėje pateiktą medžiagą galima teigti, kad viršutiniame ir apatiniame sijos sluoksniuose yra svarbiausias įtempimų būvis, neutraliajame sluoksnyje – grynoji šlytis.

12.3 tekstas, 12.17 pav. ✖ ✖ ✖

■ Kaip kinta įtempimai visoje sijoje, iš dalies parodo svarbiausių įtempimų trajektorijos. Iš  $\sigma_1$  trajektorijos sprendžiama, kur ir kokia kryptimi gali atsirasti plyšių, jei sijos medžiaga blogai dirba tempimui. Todėl, armuojant gelžbetonines sijas, armatūrą stengiamasi išdėstyti svarbiausių tempimo įtempimų kryptimi.

Bendroju atveju svarbiausių įtempimų trajektorijos priklauso nuo apkrovos pobūdžio ir atramų tipo (pavyzdžiui, 12.18 pav. yra parodytos svarbiausių įtempimų trajektorijos dvitramės sijos, apkrautos tolygiai išskirstyta apkrova). Tačiau visais atvejais  $\sigma_1$  ir  $\sigma_3$  trajektorijos kertasi tarpusavyje stačiu kampu, o su neutraliuoju sluoksniu sudaro  $\frac{\pi}{4}$  kampą.



12.18 pav.

12.19 pav. ✖ ✖ ✖

### Kontroliniai klausimai ir užduotys

- 12.1. Ką nagrinėja įtemptosios ir deformuotosios būsenos teorija?
- 12.2. Ką vadiname įtemptąja taško būsena?
- 12.3. Kas yra taško įtempimų būvis?
- 12.4. Nubraižykite elementarų stačiakampį gretasienį. Parodykite sienelėse (matomose) veikiančius įtempimus.
- 12.5. Ką teigia tangentinių įtempimų dualumo dėsnis?
- 12.6. Keliais ir kokiais parametrais apibūdinamas bendriausias taško įtempimų būvis?
- 12.7. Kokios plokštumos vadinamos svarbiausiosiomis?
- 12.8. Kokie įtempimai vadinami svarbiausiais?
- 12.9. Kokius žinote įtempimų būvius? Brėžiniai.
- 12.10. Koks įtempimų būvis vadinamas dviašiu (plokštuminiu)?
- 12.11. Paaiškinkite formules, paaiškinimą iliustruokite brėžiniu:
- $$\sigma_\alpha = \sigma_z \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau_{zy} \sin 2\alpha.$$
- $$\tau_\alpha = \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{zy} \cos 2\alpha.$$
- $$\sigma_\beta = \sigma_z \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha + \tau_{zy} \sin 2\alpha.$$
- $$\tau_\beta = \tau_\alpha.$$
- 12.12. Kaip kinta normalinių įtempimų suma sukant elementarų stačiakampį gretasienį, kurio įtemptąją būseną apibūdina dviašis įtempimų būvis?
- 12.13. Koks matematikos metodas taikomas svarbiausiųjų plokštumų padėčiai nustatyti?
- 12.14. Paaiškinkite formules, paaiškinimą iliustruokite brėžiniu:
- $$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{zy}}{(\sigma_z - \sigma_y)}.$$
- $$\left. \begin{aligned} \sigma_w &= \sigma_z \cdot \cos^2 \alpha_0 + \sigma_y \cdot \sin^2 \alpha_0 - \tau_{zy} \cdot \sin 2\alpha_0, \\ \sigma_v &= \sigma_z \cdot \sin^2 \alpha_0 + \sigma_y \cdot \cos^2 \alpha_0 - \tau_{zy} \cdot \sin 2\alpha_0. \end{aligned} \right\}$$
- 12.15. Paaiškinkite formulę:
- $$\sigma_{\frac{\max}{\min}} = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_z + \sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2} \right].$$
- 12.16. Per kokį kvadrantą eina svarbiausiojo įtempimo  $\sigma_1$  kryptis?
- 12.17. Kam lygus dviašio įtempimų būvio didžiausias tangentinis įtempimas? Formulė.
- 12.18. Kam lygus svarbiausiojo įtempimų būvio maksimalus tangentinis įtempimas? Kokioje plokštumoje jis veikia?
- 12.19. Ką vadiname deformuotąja taško būsena?
- 12.20. Kas yra taško deformacijų būvis?
- 12.21. Kuo pasireiškia matematinė analogija tarp deformacijų būvio ir įtempimų būvio formulių?
- 12.22. Užrašykite bendrąjį Huko dėsnį. Trys formulės.
- 12.23. Kam lygi tūrinė deformacija? Formulė.
- 12.24. Kaip tūrinė deformacija išreiškiama per linijines deformacijas? Formulė.
- 12.25. Paaiškinkite formulę:
- $$\varepsilon_v = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).$$
- 12.26. Kam lygūs įtempimai tempiamo strypo įstrižajame pjūvyje? Brėžinys. Formulė.
- 12.27. Kam lygūs įtempimai tempiamo strypo pjūvyje, kurio normalė sudaro  $\frac{\pi}{4}$  kampą su z ašimi? Formulės.
- 12.28. Parodykite grynosios šlyties įtempimų būvį. Brėžinys.
- 12.29. Koks yra ryšys tarp tamprumo ir šlyties modulių bei Puasono koeficiento? Formulė.
- 12.30. Koks įtempimų būvis apibūdina skersiniais ir išilginiais pjūviais išskirto veleno elemento įtemptąją būseną?
- 12.31. Kas yra svarbiausiųjų įtempimų trajektorija?
- 12.32. Nubraižykite skritulinio skerspjuvio veleno svarbiausiųjų įtempimų trajektorijas.
- 12.33. Nuo kokių įtempimų suyra velenas, pagamintas iš plastiško plieno? Brėžinys.
- 12.34. Nuo kokių įtempimų suyra velenas, pagamintas iš trapios medžiagos? Brėžinys.
- 12.35. Nuo kokių įtempimų suyra velenas, pagamintas iš medienos? Brėžinys.
- 12.36. Nubraižykite sijos dalį. Parodykite viršutinio, vidurinio ir apatinio sluoksnių įtempimų būvius.
- 12.37. Nubraižykite dviatramės sijos, apkrautos tolygiai išskirstyta apkrova, svarbiausiųjų įtempimų trajektorijas.

# 13. Stiprumo hipotezės

## 13.1. Bendrosios žinios

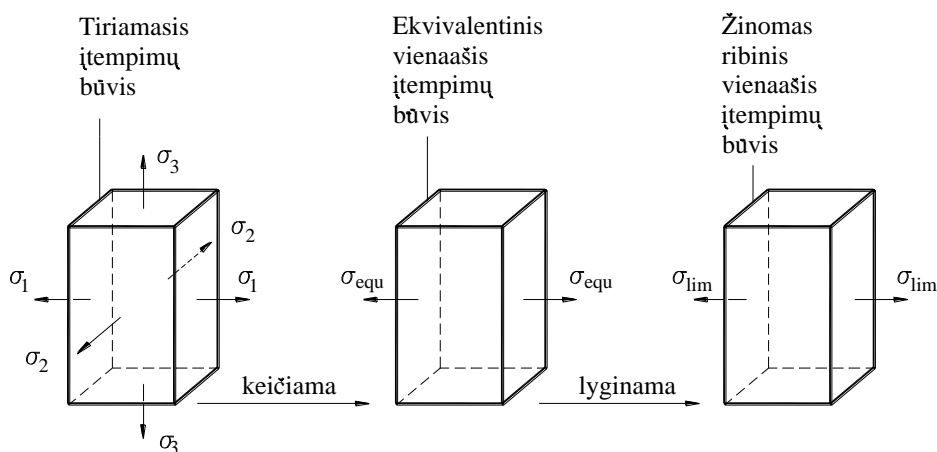
13.1 tekstas ✖ ✖ ✖

■ Veikiant nedideliems išoriniams poveikiams medžiagoje atsiranda tik tampriosios deformacijos; tuomet sakoma, kad medžiaga yra tamprios būsenos. Padidinus išorinius poveikius, gali atsirasti arba pastebimos plastinės deformacijos, arba vietiniai plyšiai. Pirmuoju atveju sakoma, kad medžiaga pereina į plastinę būseną, antruoju – kad prasideda irimo būseną. Taigi medžiagos mechaninė būseną priklauso nuo išorinių poveikių ir apibūdina jos fizikinę elgseną (ne *kiek*, bet *kaip*). Kiekybiškai ją apibūdina įtempimų ir deformacijų būviai.

■ Prisiminkime, kad vienašis įtempimų būvis apibūdinamas vienu, dviašis – dviem, triašis – trimis svarbiausiais įtempimais. Didinant apkrovą, svarbiausieji įtempimai didėja, ir esant tam tikrai jų reikšmei pasikeičia medžiagos mechaninė būseną, t. y. plastiškoje medžiagoje prasideda plastinių deformacijų kaupimosi procesas, o trapioje medžiagoje – irimas. Toks įtempimų būvis vadinamas ribiniu. Su ribiniu įtempimų būviu glaudžiai susijęs įtempimų būvio atsargos koeficientas, t. y. skaičius, rodantis kiek kartų reikia padidinti visus nagrinėjamo įtempimų būvio komponentus, kad jis taptų ribinis, t. y. kad pasikeistų medžiagos mechaninė būseną.

■ Praktikoje labai svarbu žinoti, kiek pavojingas yra vienas ar kitas įtempimų būvis, t. y. mokėti nustatyti nagrinėjamo įtempimų būvio atsargos koeficientą. Tačiau eksperimentais jo nustatyti praktiškai neįmanoma, nes reikia atlikti daug labai sudėtingų eksperimentų. Todėl kuriamos hipotezės, kurios remiasi prielaida, kad du bet kurie įtempimų būviai yra vienodai pavojingi, jeigu jie, dauginant svarbiausiuosius įtempimus iš vis didėjančio koeficiento, vienu metu tampa ribiniai. Tokios hipotezės vadinamos stiprumo hipotezėmis.

Tiriamasis įtempimų būvis visada lyginamas su geriausiai ištirtu vienašiu įtempimų būviu. Tam, remiantis kuria nors hipoteze apie ribinio būvio atsiradimo priežastį, jis pakeičiamas ekvivalentiniu įtempimų būviu, kurį kiekybiškai apibūdina ekvivalentinis įtempimas, t. y. tempiamo arba gniuždomo bandinio įtempimas, kuriam veikiant to bandinio įtempimų būvis ir tiriamasis įtempimų būvis vienodai pavojingi. Nustatant tiriamojo įtempimų būvio atsargos koeficientą, ekvivalentinis įtempimas ( $\sigma_{equ}$ ) lyginamas su ribiniu įtempimu ( $\sigma_{lim}$ ), gaunamu atliekant tempimo arba gniuždymo bandymą. Abu stiprumo įvertinimo etapai (keitimas ir sulyginimas) grafiškai parodyti 13.1 pav.



13.1 pav.

### 13.2. Stiprumo hipotezės

■ Kai įtempimų būvis vienašis, nesunku analiziškai išreikšti ekvivalentinį įtempimą ir užrašyti stiprumo sąlygą:  $|\sigma|_{\max} \leq \sigma_{\lim}$  ( $\sigma_{\lim} = \sigma_u$ ,  $\sigma_{\lim} = \sigma_y$ ). Tačiau kai įtempimų būvis yra sudėtingas, sunku išsiaiškinti, kuris iš mechaninės būsenos parametrų kokią įtaką turi šios būsenos pasikeitimui. Belieka tik spėti, nes trijų svarbiausiųjų įtempimų kombinacijų gali būti labai daug ir net su tobula laboratorine įranga neįmanoma jų visų ištirti. Istoriskai susiformavo penkios hipotezės apie ribinio būvio atsiradimo priežastį.

■ *Didžiausių normalinių įtempimų (Galilėjaus) stiprumo hipotezė.* Ji teigia, kad ribinio būvio atsiradimo priežastis yra didžiausi normaliniai įtempimai. Pagrindinė hipotezės nelygybė:

$$\sigma_{\text{equ}} = \sigma_1 \leq \sigma_{\lim}. \quad (13.1)$$

Šios hipotezės trūkumas tas, kad ji neįvertina kitų dviejų svarbiausiųjų įtempimų.

■ *Didžiausių linijinių deformacijų stiprumo hipotezė.* Ji teigia, kad ribinio įtempimų būvio atsiradimo priežastis yra didžiausios linijinės deformacijos. Pagrindinės hipotezės nelygybės, išreikštos per deformacijas ir per svarbiausiuosius įtempimus:

$$\varepsilon_{\text{equ}} = \varepsilon_1 \leq \varepsilon_{\lim}, \quad (13.2)$$

$$\sigma_{\text{equ}} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq \sigma_{\lim}. \quad (13.3)$$

Ši hipotezė įvertina visus įtempimus, tačiau kaip ir Galilėjaus, nevisiškai patvirtinama eksperimentais.

■ *Didžiausių tangentinių įtempimų (Kulono, Treskos, Sen Venano) stiprumo hipotezė.* Ji teigia, kad ribinio įtempimų būvio atsiradimo priežastis yra didžiausi tangentiniai įtempimai. Pagrindinės hipotezės nelygybės, išreikštos per tangentinius ir per svarbiausiuosius įtempimus:

$$\tau_{\text{equ}} = \tau_{\max} \leq \tau_{\lim}, \quad (13.4)$$

$$\sigma_{\text{equ}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_{\lim}, \quad (\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3). \quad (13.5)$$

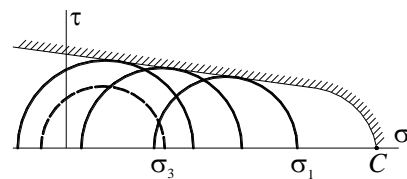
Ši hipotezė geriausiai tinka plastiškoms medžiagoms, kurios vienodai priešinasi tiek tempimui, tiek gniuždymui.

■ *Moro stiprumo hipotezė.* Ji remiasi eksperimentinių duomenų visumos aprašymu ir teigia, kad tiriamasis įtempimų būvis yra ribinis tuomet, kai pagal jį nubrėžtas didžiausias Moro apskritimas (apskritiminė įtempimų būvio diagrama, gaunama iš (12.10) lygčių išeliminavus kampą  $\alpha$ :

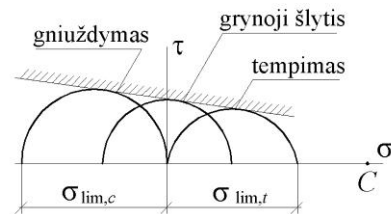
$$\left( \sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2$$

liečia ribinių apskritimų gaubtinę. Laikoma, kad ribinių apskritimų gaubtinė nepriklauso nuo  $\sigma_2$  (13.2 pav., čia ribiniai apskritimai nubrėžti ištisine linija, tiriamojo įtempimų būvio apskritimas – punktyrine, taškas C atitinka vienpusio tempimo būvį). Ribinių apskritimų gaubtinei gauti paprastai atliekami tempimo ir gniuždymo bandymai, taip pat sukamas plonasienis vamzdis. Kitus bandymus atlikti sudėtinga, todėl ribinė gaubtinė aproksimuojama tiese (13.3 pav.). Pagrindinė hipotezės nelygybė:

$$\sigma_{\text{equ}} = \sigma_1 - k \cdot \sigma_3 \leq \sigma_{\lim,f}. \quad (13.6)$$



13.2 pav.



13.3 pav.



Ši hipotezė geriausiai tinka plastiškoms medžiagoms, kurios nevienodai priešinasi tempimui ir gniuždymui, nes

$$k = \frac{\sigma_{\text{lim},t}}{\sigma_{\text{lim},c}}, \quad (13.7)$$

$\sigma_{\text{lim},t}$  – tempiamasis ribinis įtempimas,  $\sigma_{\text{lim},c}$  – gniuždomasis ribinis įtempimas.

■ *Energetinė (Huberio ir Mizeso) stiprumo hipotezė.* Ji teigia, kad ribinio įtempimų būvio atsiradimo priežastis yra santykinės potencinės deformavimo energijos dalis, kuri susikaupė dėl formos pokyčių. Pagrindinė hipotezės nelygybė:

$$\sigma_{\text{equ}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \leq \sigma_{\text{lim}}. \quad (13.8)$$

Ši hipotezė geriausiai tinka grynosios šlyties atvejui.

13.1 pvz.    ✱ ✱ ✱

■ Visoms anksčiau aptartoms stiprumo hipotezėms užrašysime ribinių būvių metodo stiprumo sąlygas dviašiam įtempimų būviui. Svarbiausiesiems įtempimas išreikšti per normalinius ir tangentinius įtempimus (žr. 12.3 poskyrį) naudosime tokią formulę:

$$\sigma_{1,3} = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_z + \sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2} \right]. \quad (13.9)$$

Didžiausių normalinių įtempimų stiprumo hipotezė:

$$\sigma_{\text{det}} = \frac{(\sigma_z + \sigma_y)}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2} \leq R. \quad (13.10)$$

Kai  $\sigma_y = 0$ ,

$$\sigma_{\text{det}} = \frac{\sigma_z}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{zy}^2} \leq R. \quad (13.11)$$

Didžiausių linijinių deformacijų stiprumo hipotezė:

$$\sigma_{\text{det}} = \frac{1-\nu}{2} (\sigma_z + \sigma_y) + \frac{1+\nu}{2} \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2} \leq R. \quad (13.12)$$

Kai  $\sigma_y = 0$ ,

$$\sigma_{\text{det}} = \frac{1-\nu}{2} \sigma_z + \frac{1+\nu}{2} \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{zy}^2} \leq R. \quad (13.13)$$

Didžiausių tangentinių įtempimų stiprumo hipotezė:

$$\sigma_{\text{det}} = \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2} \leq R. \quad (13.14)$$

Kai  $\sigma_y = 0$ ,

$$\sigma_{\text{det}} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{zy}^2} \leq R. \quad (13.15)$$

Moro stiprumo hipotezė:

$$\sigma_{\text{det}} = \frac{1-k}{2}(\sigma_z + \sigma_y) + k\sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2} \leq R. \quad (13.16)$$

Kai  $\sigma_y = 0$ ,

$$\sigma_{\text{det}} = \frac{1-k}{2}\sigma_z + k\sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{yz}^2} \leq R. \quad (13.17)$$

Energetinė stiprumo hipotezė:

$$\sigma_{\text{det}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_z + \sigma_y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right)^2 + 3\tau_{zy}^2} \leq R. \quad (13.18)$$

Kai  $\sigma_y = 0$ ,

$$\sigma_{\text{det}} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_{zy}^2} \leq R. \quad (13.19)$$

13.2 pvz.

\*\*\*

### Kontroliniai klausimai ir užduotys

13.1. Kas yra medžiagos mechaninė būseną?

13.2. Kas yra ribinis įtempimų būvis?

13.3. Kas yra įtempimų būvio atsargos koeficientas?

13.4. Kokia prielaida remiantis kuriamos stiprumo hipotezės? Koks įtempimų būvis laikomas etaloniniu?

13.5. Kas yra ekvivalentinis įtempimas?

13.6. Kas yra ribinis įtempimas?

13.7. Grafiškai pavaizduokite stiprumo įvertinimo etapus.

13.8. Kokias žinote stiprumo hipotezes?

13.9. Ką teigia didžiausių normalinių įtempimų (Galilėjaus) stiprumo hipotezė? Formulė.

13.10. Ką teigia didžiausių linijinių deformacijų (Marioto) stiprumo hipotezė? Formulė.

13.11. Paaiškinkite formulę:

$$\sigma_{\text{equ}} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq \sigma_{\text{lim}}.$$

13.12. Ką teigia didžiausių tangentinių įtempimų (Kulono, Treskos, Sen Vernano) stiprumo hipotezė? Formulė.

13.13. Paaiškinkite formulę:

$$\sigma_{\text{equ}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_{\text{lim}}.$$

13.14. Kuo remiasi Moro stiprumo hipotezė? Ką ji teigia?

13.15. Paaiškinkite formulę:

$$\sigma_{\text{equ}} = \sigma_1 - k \cdot \sigma_3 \leq \sigma_{\text{lim},f}.$$

13.16. Ką teigia energetinė stiprumo hipotezė?

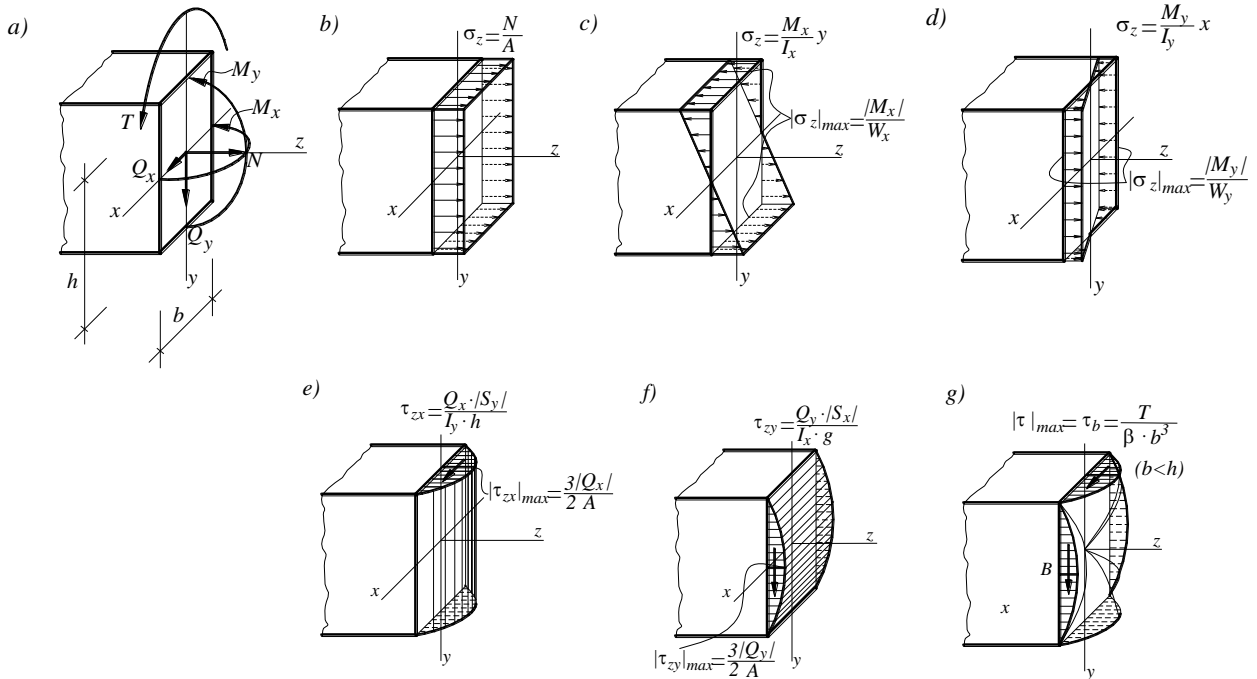
13.17. Paaiškinkite formulę:

$$\sigma_{\text{equ}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \leq \sigma_{\text{lim}}.$$

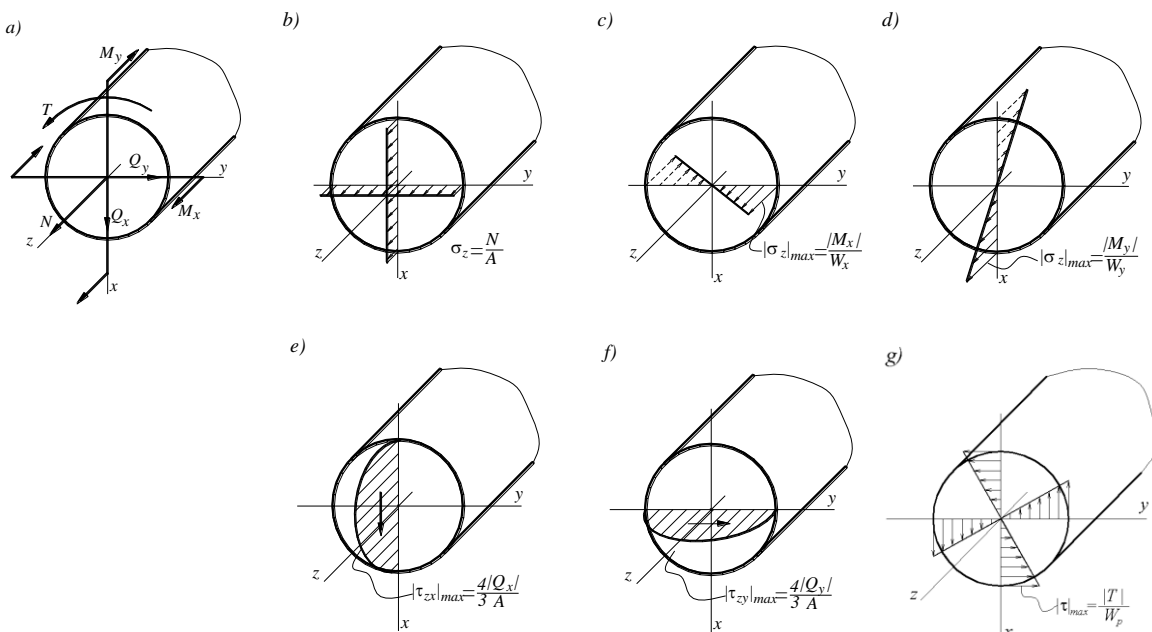
# 14. Sudėtingas strypų deformavimas

## 14.1. Bendriausias sudėtingo strypų deformavimo atvejis

■ Bendriausias sudėtingo strypų deformavimo atvejis yra tas, kai elemento skerspjūvyje veikia visos šešios įrašos:  $N$ ,  $Q_x$ ,  $Q_y$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $T$ . Šiuo atveju strypas yra ir tempiamas (gniuždomas), ir šliejamas (nuo skersinės jėgos ir sukimo momento), ir lenkiamas. Kaip pasiskirsto įtempimai strypo skerspjūvyje nuo kiekvienos iš šių įrašų, jau žinome. Dažniausiai pasitaikantiems stačiakampiam ir skrituliniam skerspjūviui jų diagramos pateiktos atitinkamai 14.1 ir 14.2 pav. Visuose paveiksluose įrašos – teigiamos.



14.1 pav.



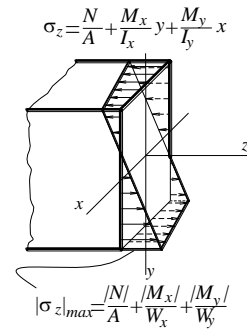
14.2 pav.

■ Nuo ašinės jėgos ir lenkimo momentų atsiranda tik normaliniai įtempimai. Jie bet kuriame skerspjūvio taške skaičiuojami atliekant algebrinį sumavimą:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x. \quad (14.1)$$

Pavyzdžiui, jeigu norėtume gauti normalinių įtempimų diagramą nuo ašinės jėgos ir abiejų lenkimo momentų veikimo (14.1a pav.), tereikėtų algebriskai sudėti diagramas, pateiktas 14.1b, 14.1c ir 14.1d pav. Gauta normalinių įtempimų diagrama pateikta 14.3 pav.

■ Nuo skersinių jėgų ir sukimo momento atsiranda tik tangentiniai įtempimai. Juos nustatant, be algebrinio sumavimo, dažnai tenka atlikti ir geometrinį sumavimą.



14.3 pav.

14.1 tekstas, 14.4, 14.5 pav. ✖✖✖

■ Skaičiuojant sudėtingai deformuojamus strypus paprastai užrašoma ne viena, o kelios stiprumo sąlygos. Bendriausia jų išraiška yra tokia:

$$|\sigma|_{\max} \leq R (\sigma_{\text{adm}}), \quad (14.2)$$

$$|\tau|_{\max} \leq R_s (\tau_{\text{adm}}), \quad (14.3)$$

$$\sigma_{\text{det}} \leq R (\sigma_{\text{adm}}). \quad (14.4)$$

Stiprumo sąlygų kairiųjų pusių išraiška priklauso nuo apkrovimo pobūdžio ir skerspjūvio formos; trečiosios stiprumo sąlygos (14.4) atveju – ir nuo pasirinktos stiprumo hipotezės.

*Pastaba.* Skersinių jėgų įtaka elemento stiprumui yra nedidelė, todėl dažniausiai stiprumo sąlygose jos neįvertinamos.

■ Užrašysime dažniausiai pasitaikančių sudėtingo strypų deformavimo atvejų stiprumo sąlygas. Pavojuosius taškus parodysime paveiksluose, laikydami, kad visos skerspjūviuose veikiančios įrašos yra teigiamos.

◆◆◆ Įtempimų būvis vienašis, skerspjūvio forma – bet kokia, medžiaga vienodai priešinasi tempimui ir gniuždymui (14.6 pav.):

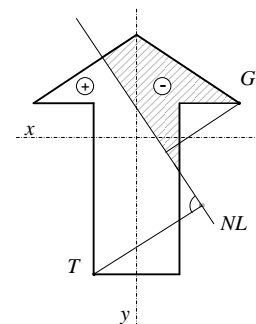
$$|\sigma|_{\max} = |\sigma_k| = \left| \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} \cdot y_k + \frac{M_y}{I_y} \cdot x_k \right| \leq R. \quad (14.5)$$

Čia  $K$  – taškas, labiausiai nutolęs nuo neutraliosios linijos. Bendroju atveju tai gali būti taškas  $T$ , t. y. taškas, kuriame veikia didžiausi tempimo įtempimai, arba taškas  $G$ , t. y. taškas, kuriame veikia didžiausi gniuždymo įtempimai; pavyzdžiui, 14.6 pav. taškas  $K$  sutampa su tašku  $T$ .

Kai medžiaga nevienodai priešinasi tempimui ir gniuždymui, užrašomos dvi stiprumo sąlygos (žr. 14.6 pav.):

$$\sigma_{\max} = \sigma_t = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} \cdot y_t + \frac{M_y}{I_y} \cdot x_t \leq R_t, \quad (14.6)$$

$$|\sigma_{\min}| = |\sigma_g| = \left| \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} \cdot y_g + \frac{M_y}{I_y} \cdot x_g \right| \leq R_c, \quad (14.7)$$



14.6 pav.

$R_t$  – tempiamasis projektinis stipris;  $R_c$  – gniuždomasis projektinis stipris.

14.1 pvz.    ✖ ✖ ✖

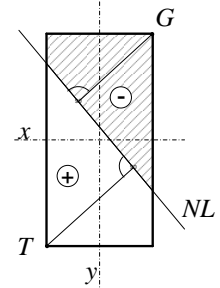
◆◆◆ Įtempimų būvis vienašis, skerspjūvio forma – stačiakampis, medžiaga vienodai priešinasi tempimui ir gniuždymui (14.7 pav.):

$$|\sigma|_{\max} = |\sigma_t| = \frac{|N|}{A} + \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \leq R. \quad (14.8)$$

Kai medžiaga nevienodai priešinasi tempimui ir gniuždymui:

$$\sigma_{\max} = \sigma_t = \frac{N}{A} + \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \leq R_t, \quad (14.9)$$

$$|\sigma_{\min}| = |\sigma_g| = \left| \frac{N}{A} - \frac{|M_x|}{W_x} - \frac{|M_y|}{W_y} \right| \leq R_c. \quad (14.10)$$



14.7 pav.

14.2 pvz.    ✖ ✖ ✖

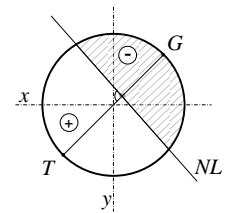
◆◆◆ Įtempimų būvis vienašis, skerspjūvio forma – skritulys, medžiaga vienodai priešinasi tempimui ir gniuždymui (14.8 pav.):

$$|\sigma|_{\max} = |\sigma_t| = \frac{|N|}{A} + \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W} \leq R. \quad (14.11)$$

Kai medžiaga nevienodai priešinasi tempimui ir gniuždymui:

$$\sigma_{\max} = \sigma_t = \frac{N}{A} + \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W} \leq R_t, \quad (14.12)$$

$$|\sigma_{\min}| = |\sigma_g| = \left| \frac{N}{A} - \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W} \right| \leq R_c. \quad (14.13)$$



14.8 pav.

*Pastaba.* Bendroju atveju skritulio taškų *T* ir *G* padėtis nežinoma. Ji nustatoma atlikus papildomus skaičiavimus (taškai *T* ir *G* yra atstojamojo lenkimo momento veikimo krypties linijos sankirtoje su perimetru).

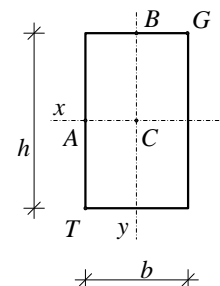
14.3 pvz.    ✖ ✖ ✖

◆◆◆ Įtempimų būvis dviašis, skerspjūvio forma – stačiakampis, medžiaga vienodai priešinasi tempimui ir gniuždymui (14.9 pav.,  $b < h$ ):

$$|\sigma|_{\max} = |\sigma_t| = \frac{|N|}{A} + \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \leq R, \quad (14.14)$$

$$|\tau|_{\max} = |\tau_a| = \frac{|T|}{\beta \cdot b^3} + \frac{3}{2} \frac{|Q_y|}{A} \leq R_s, \quad (14.15)$$

$$|\tau|_{\max} = |\tau_b| = \gamma \frac{|T|}{\beta \cdot b^3} + \frac{3}{2} \frac{|Q_x|}{A} \leq R_s, \quad (14.16)$$



14.9 pav.

$$\sigma_{\det,a} \leq R, \quad (\sigma = f(N, M_y), \quad \tau = \psi(T, Q_y)), \quad (14.17)$$

$$\sigma_{\det,b} \leq R, \quad (\sigma = f(N, M_x), \quad \tau = \psi(T, Q_x)). \quad (14.18)$$

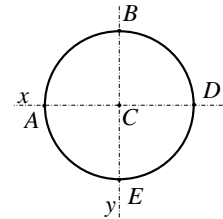
14.4 pvz.    ✱ ✱ ✱

◆◆◆ *Įtempimų būvis dviašis, skerspjūvio forma – skritulys, medžiaga vienodai priešinasi tempimui ir gniuždymui (14.10 pav.):*

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|N|}{A} + \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W} \leq R, \quad (14.19)$$

$$|\tau|_{\max} = \frac{|T|}{W_p} + \frac{4}{3} \frac{|Q|_{\max}}{A} \leq R_s, \quad (14.20)$$

$$\sigma_{\det} \leq R, \quad (\sigma = f(N, M_x, M_y), \quad \tau = \psi(T)). \quad (14.21)$$



14.10 pav.

Į lygtį (14.20) vietoj  $|Q|_{\max}$  įrašoma didesnė iš skersinių jėgų; jei  $|Q_x| \geq |Q_y|$ ,

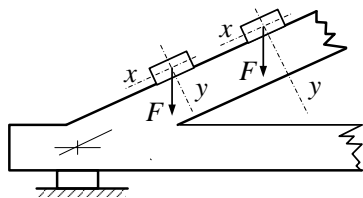
tai  $|\tau|_{\max} = |\tau_b|$ ; jei  $|Q_y| \geq |Q_x|$ , tai  $|\tau|_{\max} = |\tau_a|$ .

14.5 pvz.    ✱ ✱ ✱

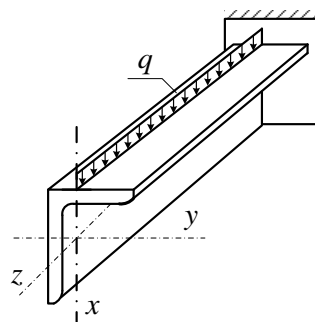
■ Toliau aptarsime kelis sudėtingo strypų deformavimo atvejus, kurie dėl plataus paplitimo inžinerinėse konstrukcijose gavo tam tikrus pavadinimus ir daugelyje vadovėlių nagrinėjami atskiruose poskyriuose.

## 14.2. Įstrižasis lenkimas

■ Lenkimas vadinamas įstrižuoju, kai sijos ašis išlinksta plokštumoje, nesutampančioje nė su viena iš svarbiausiųjų plokštumų. Taip deformuojasi šlaitinio stogo grebėstai, valcuotojo plieno kampuočiai, kai apkrova pridėdama statmenai jų šonams, ir kiti konstrukciniai elementai, kai apkrovos veikimo plokštuma nesutampa nė su viena iš jų svarbiausiųjų plokštumų (14.11, 14.12 pav.).



14.11 pav.



14.12 pav.

■ Išsiaiškinsime įstrižojo lenkimo ypatumus. Nagrinėsime gembinį stačiakampio skerspjūvio strypą, veikiamą gale pridėta jėga  $F$  (14.13 pav.). Jėga veikia skerspjūvio plokštumoje ir sudaro kampą  $\alpha$  su jo ašimi  $x$ .

Taip apkrauto strypo bet kuriame skerspjūvyje veiks šios įrašos (14.14 pav.):

$$\left. \begin{aligned} N &= 0, \\ Q_x &= F_x = F \cdot \cos \alpha, \\ Q_y &= F_y = F \cdot \sin \alpha, \\ M_x &= -F_y(l-z), \\ M_y &= -F_x(l-z), \\ T &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14.22)$$

Toliau strypo deformavimąsi nagrinėsime, atsižvelgdami tik į lenkimo momentus. Jiems veikiant strypo skerspjūviuose atsiranda tik normaliniai įtempimai (14.15 pav.):

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x. \quad (14.23)$$

Vienoje skerspjūvio dalyje jie yra teigiami, kitoje – neigiami. Šias dvi sritis skiria neutralioji linija. Jos lygtį gausime prilyginę nuliui normalinių įtempimų išraišką (14.23) (prisiminkime, kad neutralioji linija yra geometrinė vieta taškų, kuriuose normaliniai įtempimai yra lygūs nuliui):

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x = 0, \quad (14.24)$$

$$y = -\frac{M_y \cdot I_x}{M_x \cdot I_y} x. \quad (14.25)$$

Taigi neutralioji linija yra tiesė, kertanti koordinatinių pradžių tašką (14.16 pav.).

■ Nustatysime geometrinę ryšį tarp jėgos veikimo linijos ir neutraliosios linijos. Prisiminkime, kad dvi tiesės yra statmenos, jei  $\operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = -\operatorname{ctg} \alpha_2$  (14.17 pav.). Mūsų atveju jėgų veikimo linijos

krypties koeficientas  $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{F_y}{F_x}$ , neutraliosios linijos krypties koeficientas

$\operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{M_y \cdot I_x}{M_x \cdot I_y}$ . Išreikškime jėgos komponentus  $F_y$  ir  $F_x$  per jėgą  $F$  ir

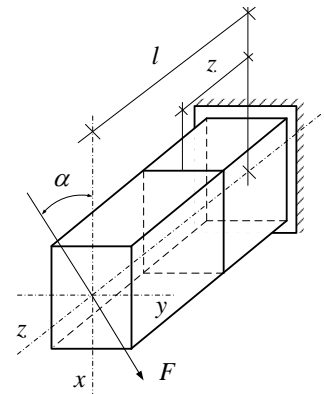
kampą  $\alpha$ , lenkimo momentus  $M_x$  ir  $M_y$  per jėgos komponentus  $F_y$  ir  $F_x$ , pastaruosius per jėgą  $F$  ir kampą  $\alpha$ :  $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{F \cdot \sin \alpha}{F \cdot \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$ ,

$\operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{F_x \cdot (l-z) \cdot I_x}{F_y \cdot (l-z) \cdot I_y} = -\frac{F \cdot \cos \alpha \cdot I_x}{F \cdot \sin \alpha \cdot I_y} = -\operatorname{ctg} \alpha \frac{I_x}{I_y}$ . Taigi neutralioji linija bus

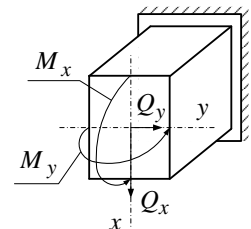
statmena jėgų veikimo linijai tik tuo atveju, jei  $\frac{I_x}{I_y} = 1$ , pavyzdžiui, tuomet,

kai skerspjūvis bus kvadratinis, skritulinis, žiedinis ir t. t.

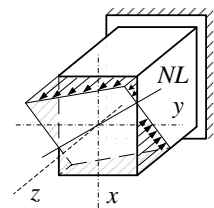
■ Įstrižojo lenkimo atveju didžiausi įtempimai atsiranda taškuose, labiausiai nutolusiuose nuo neutraliosios linijos. Kadangi ašinė jėga lygi nuliui, visais atvejais, nesvarbu, ar medžiaga vienodai, ar nevienodai priešinasi tempimui ir gniuždymui, stiprumo sąlyga turės tą pačią išraišką:



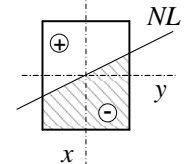
14.13 pav.



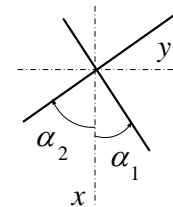
14.14 pav.



14.15 pav.



14.16 pav.



14.17 pav.

a) skerspjūvio forma – stačiakampis:

$$|\sigma|_{\max} (\sigma_{\max}, |\sigma_{\min}|) = \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \leq R (R_t, R_c); \quad (14.26)$$

b) skerspjūvio forma – skritulys:

$$|\sigma|_{\max} (\sigma_{\max}, |\sigma_{\min}|) = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W} \leq R (R_t, R_c). \quad (14.27)$$

■ Nustatant įlinkius, pirmiausia jie apskaičiuojami kiekvienos skerspjūvio ašies kryptimi, vėliau – geometriškai sumuojami. Strypo bet kurio skerspjūvio įlinkio komponentai  $u$  ir  $v$  gali būti nustatomi bet koku žinomu metodu. Pavyzdžiui, iš lentelių gauname, kad  $u = \frac{F_x \cdot z^2(3l-z)}{6E \cdot I_y}$ ,  $v = \frac{F_y \cdot z^2(3l-z)}{6E \cdot I_x}$ . Tuomet

$$s = \sqrt{u^2 + v^2}. \quad (14.28)$$

Nustatysime sijos laisvojo galo atstojamojo įlinkio kryptį:

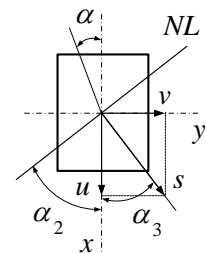
$$\operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{v}{u} = \frac{F \cdot \sin \alpha \cdot z^2(3l-z) \cdot 6E \cdot I_y}{6E \cdot I_y \cdot F \cdot \sin \alpha \cdot z^2(3l-z)} = \operatorname{tg} \alpha \frac{I_y}{I_x}. \text{ Taigi įlinkio kryptis nesutampa su}$$

jėgos veikimo kryptimi, nes  $\operatorname{tg} \alpha_3 \neq \operatorname{tg} \alpha$  (14.18 pav.) (išskyrus kvadratą, skritulį ir žiedą).

Sudauginkime įlinkio ir neutraliosios linijos krypties koeficientus:

$$\operatorname{tg} \alpha \frac{I_y}{I_x} \cdot (-\operatorname{ctg} \alpha \frac{I_x}{I_y}) = -1. \text{ Gavome, kad įlinkio kryptis yra statmena neutraliajai}$$

ašiai.



14.18 pav.

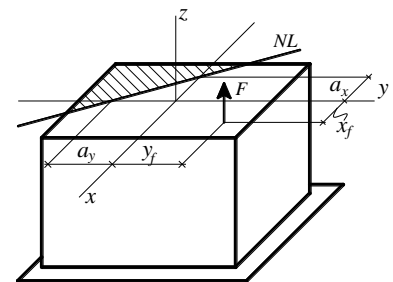
14.6 pvz.

\*\*\*

### 14.3. Ekscentrinis tempimas

■ Ekscentrinis tempimas (gniuždymas) vadinamas toks strypo apkrovimo atvejis, kai pridėtosios jėgų sistemos atstojamoji veikia statmenai skerspjūviui, bet nesutampa su strypo ašimi (14.19 pav.). Taigi iš šešių įrašų, kurios bendruoju atveju gali veikti strypo skerspjūvyje, net trys yra lygios nuliui:

$$\left. \begin{aligned} N &= F, \\ Q_x &= 0, \\ Q_y &= 0, \\ M_x &= F \cdot y_f, \\ M_y &= F \cdot x_f, \\ T &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14.29)$$



14.19 pav.

■ Kadangi skersinės jėgos ir sukimo momentas yra lygūs nuliui, ekscentriškai tempiamo strypo skerspjūvyje veiks tik normaliniai įtempimai. Į bendrąją normalinių įtempimų išraišką (14.1) įrašykime ašinę jėgą ir lenkimo momentus, išreikštus per jėgą  $F$ , ir iškelkime narį  $F/A$  prieš skliaustus:



$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot y_f}{I_x} y + \frac{F \cdot x_f}{I_y} x = \frac{F}{A} \left( 1 + \frac{A \cdot y_f}{I_x} y + \frac{A \cdot x_f}{I_y} x \right).$$

Naudokime žymėjimus:

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A}, \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A}.$$

Galiausiai gauname, kad

$$\sigma = \frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_f}{i_x^2} y + \frac{x_f}{i_y^2} x \right). \quad (14.30)$$

Ši formulė vaizdžiai parodo, kiek kartų padidėja normaliniai įtempimai strypo skerspjūvyje, palyginti su įtempimais, kurie būtų jėgai veikiant skerspjūvio centre.

■ Prilyginę gautą įtempimų išraišką nuliui, gausime neutraliosios linijos lygtį:

$$\sigma = \frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_f}{i_x^2} y + \frac{x_f}{i_y^2} x \right) = 0.$$

Pirmasis sandaugos narys negali būti lygus nuliui, nes priešingu atveju lygtis

neturės fizikinės prasmės, taigi  $1 + \frac{y_f}{i_x^2} y + \frac{x_f}{i_y^2} x = 0$  arba

$$\frac{y}{a_y} + \frac{x}{a_x} = 1. \quad (14.31)$$

Lygtis (14.31) yra ašinė tiesės lygtis. Čia  $a_y = -\frac{i_x^2}{y_f}$  ir  $a_x = -\frac{i_y^2}{x_f}$  yra atkarpos, kurias tiesė atkerta y ir

x ašyse (žr. 14.19 pav.).

14.32, 14.33 formulės, 14.20 pav., 14.7 pvz. ■■■

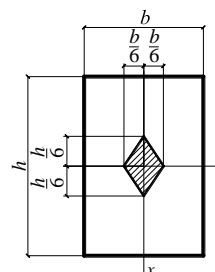
■ Praktikoje dažnai labai svarbu, kad kai kuriuose gniuždomuose elementuose (pavyzdžiui, mūro sienose) neatsirastų tempimo įtempimų. Todėl reikia žinoti skerspjūvio sritį, kurioje pridėjus lygiagrečią su strypo ašimi jėgą, visame skerspjūvyje veiks vieno ženklo normaliniai įtempimai. Tokia sritis vadinama skerspjūvio branduoliu.

Skaičiuojant branduolį, skerspjūvis apibrėžiamas neutraliosiomis linijomis, liečiančiomis jo kontūrą ne mažiau kaip dviejuose taškuose ir sudarančiomis iškilųjį daugiakampį. Kiekvienai neutraliajai linijai apskaičiuojamos ją atitinkančios jėgos koordinatės:

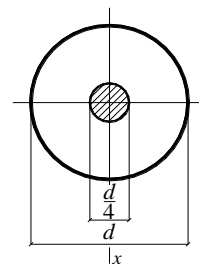
$$\left. \begin{aligned} x_f &= -\frac{i_y^2}{a_x}, \\ y_f &= -\frac{i_x^2}{a_y}. \end{aligned} \right\} \quad (14.34)$$

Gauti taškai sujungiami tiesėmis. Jeigu branduolys nubrėžtas taisyklingai, jis sudaro iškilųjį daugiakampį, kurio centras sutampa su skerspjūvio svorio centru (14.21, 14.22 pav.).

14.8 pvz. ■■■



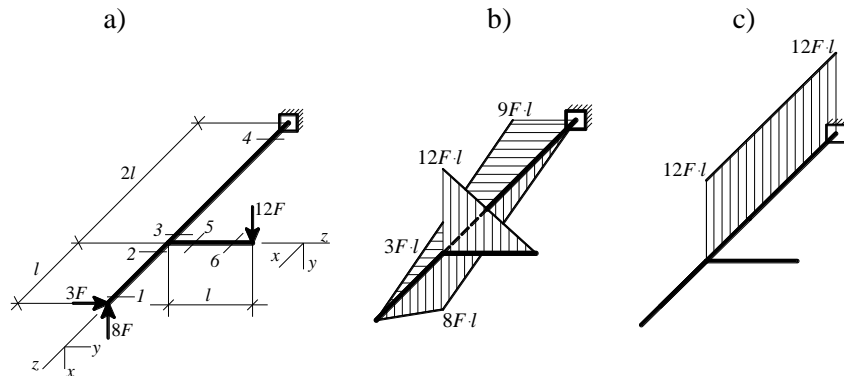
14.21 pav.



14.22 pav.

#### 14.4. Lenkiami ir sukami strypai

■ Erdvinių konstrukcijų elementai, diržinių pavarų velenai, įvairios mechanizmų detalės dažniausiai yra lenkiamos bei sukamos. Tokių elementų stiprumas priklauso tiek nuo normalinių įtempimų, atsirandančių nuo lenkimo momento (kartais ir dėl ašinės jėgos), tiek nuo tangentinių įtempimų, atsirandančių nuo sukimo momentų (skersinės jėgos įtaka paprastai neįvertinama). Skaičiuojant tokius elementus reikia tikrinti visus skerspjūvius, kuriuose tiek lenkimo momentai, tiek sukimo momentai yra pakankamai dideli. Pavyzdžiui, 14.23a pav. pateiktame vienodo skritulinio skerspjūvio erdviniam rėme pavojingi yra trys skerspjūviai: trečiasis, ketvirtasis ir penktasis. Tai paaiškėja išanalizavus lenkimo



14.23 pav.

momentų (14.23b pav.) ir sukimo momentų (14.23c pav.) diagramas.

Dažniausiai pasitaikantiems stačiakampiam ir skrituliniam skerspjūviams pavojingieji taškai ir stiprumo sąlygos buvo aptartos anksčiau (žr. 14.9, 14.10 pav. ir (14.14)–(14.21) formules). Patikrinti tokių skerspjūvių stiprumą nėra labai sudėtinga. Tačiau sprendžiant analogišką projektinį uždavinį kyla daug keblumų.

■ Aptarsime sukamo ir lenkiamo skritulinio skerspjūvio strypo projektinį uždavinį. Taikysime didžiausių tangentinių įtempimų stiprumo hipotezę:  $\sigma_{\text{det}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq R$ .

Geometriškai sudėkime abu lenkimo momentus:  $M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$ . Įtempimus išreikškime per įrašas:

$$\sigma_{\text{det}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M}{W}\right)^2 + 4\left(\frac{T}{W_p}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{M}{W}\right)^2 + \left(\frac{T}{W}\right)^2} = \frac{1}{W} \sqrt{M^2 + T^2} \leq R.$$

Įtraukime naują kintamąjį – skaičiuojamąjį momentą:

$$M_{\text{det}} = \sqrt{M^2 + T^2}. \quad (14.35)$$

Gauname, kad

$$W \geq \frac{M_{\text{det}}}{R}. \quad (14.36)$$

Tačiau skrituliniam skerspjūviui atsparumo momentas  $W = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$ , taigi  $d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{\text{det}} \cdot 32}{R \cdot \pi}}$ .

Iš sortimento pasirinkus skersmenį  $d$ , tikrinama stiprumo sąlyga įvertinant ir ašinę jėgą (jeigu tokia yra):

$$\sigma_{\text{det}} = \sqrt{\left(\frac{|N|}{A} + \frac{|M|}{W}\right)^2 + 4\left(\frac{T}{W_p}\right)^2} \leq R.$$

14.9 pvz.    ❖ ❖ ❖

#### 14.5. Bet kaip apkrautų strypų įrašų diagramos

■ Visomis šiame skyriuje pateiktomis formulėmis galima pasinaudoti tik tuomet, kai žinomos pavojuose skerspjūviuose veikiančios įrašos. Todėl labai svarbu mokėti sudaryti įrašų diagramas. Įrašų ženklų taisyklės ir jų diagramų sudarymo ypatumai buvo aptarti 3 skyriuje.

14.10 pvz.    ❖ ❖ ❖

#### 14.6. Bet kaip apkrautų strypų skerspjūvių poslinkiai

■ Iki šiol nagrinėjome tik sudėtingai deformuojamų strypų stiprumą. Tačiau inžinerinėje praktikoje dažnai pasitaiko uždavinių, kai reikia papildomai apriboti ir deformacijas (linijines ar kampines) ties ypatingais konstrukcijos taškais arba (ir) tam tikrų konstrukcijos skerspjūvių poslinkius (linijinius ar kampinius), t. y. užrašyti standumo sąlygas. Pirmojo tipo standumo sąlygos (kai ribojamos ekstreminės deformacijos) nėra sudėtingos, nes žinant įtempimus visada galima gauti deformacijas (pagal Huko dėsnį). Tačiau antrojo tipo standumo sąlygos (kai ribojami poslinkiai) yra gerokai sudėtingesnės, nes reikia įvertinti konstrukcijos deformavimąsi nuo nagrinėjamo skerspjūvio iki atramų. Paprastai ribojami tik tam tikrų konstrukcijos skerspjūvių poslinkiai (nereikia turėti poslinkių diagramų), todėl inžinerinėje praktikoje poslinkiams skaičiuoti dažniausiai taikomas energetinis Moro metodas. Tiesiogiai jis leidžia nustatyti tik vieną poslinkio komponentą (arba vieną kryptimi, arba vienoje plokštumoje), todėl paprastai reikia atlikti kelis skaičiavimus, o galutinį rezultatą nustatyti vektorine (geometrine) sudėtimi.

Bendroji energetinio Moro metodo formulė turi tokį pavidalą:

$$s_k = \sum_{j=1}^n \left( \int_l \frac{N \cdot \bar{N}_k}{E \cdot A} dz + \int_l \frac{M_x \cdot \bar{M}_{x,k}}{E \cdot I_x} dz + \int_l \frac{M_y \cdot \bar{M}_{y,k}}{E \cdot I_y} dz + \int_l \mu_x \frac{Q_x \cdot \bar{Q}_{x,k}}{G \cdot A} dz + \int_l \mu_y \frac{Q_y \cdot \bar{Q}_{y,k}}{G \cdot A} dz + \int_l \frac{T \cdot \bar{T}_k}{G \cdot I_p} dz \right), \quad (14.37)$$

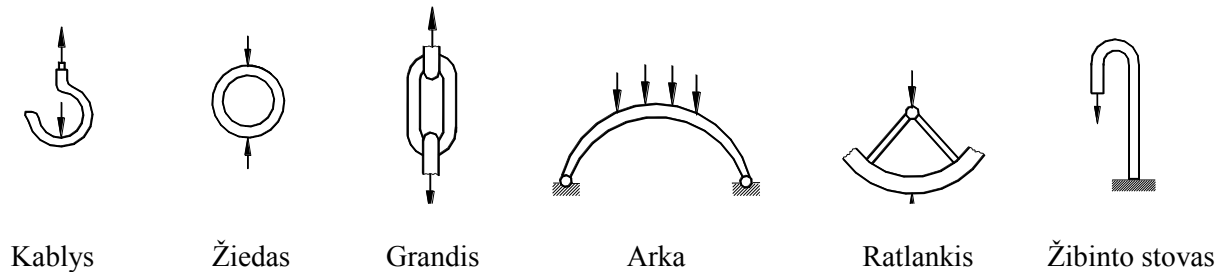
$s_k$  – apibendrintas  $k$ -ojo skerspjūvio poslinkio komponentas;  $n$  – konstrukcijos ruožų, kuriuose visos įrašos (ir nuo žinomos apkrovos, ir nuo vienetinio apibendrintosios apkrovos komponento), medžiagos savybės ir skerspjūvio forma bei matmenys kinta tolygiai, skaičius;  $N, M_x, M_y, Q_x, Q_y, T$  – įrašos nuo žinomos apkrovos;  $\bar{N}_k, \bar{M}_{x,k}, \bar{M}_{y,k}, \bar{T}_k, \bar{Q}_{x,k}, \bar{Q}_{y,k}$  – įrašos nuo vienetinio apibendrintosios apkrovos komponento, pridėto skerspjūvyje  $K$  ieškomo poslinkio komponento kryptimi;  $A \cdot E, E \cdot I_x, E \cdot I_y, G \cdot A, G \cdot I_p$  – tempiamo, lenkiamo, šliejamo, sukamo ruožų standžiai;  $\mu_x, \mu_y$  – koeficientai, priklausantys nuo skerspjūvio formos (žr. 11 skyrių);  $l$  – ruožo ilgis.

Daugeliu atvejų skersinių jėgų įtaka sudėtingai deformuojamų strypų poslinkiams yra nedidelė, todėl formulė (14.37) gerokai supaprastėja.

14.11 pvz.    ❖ ❖ ❖

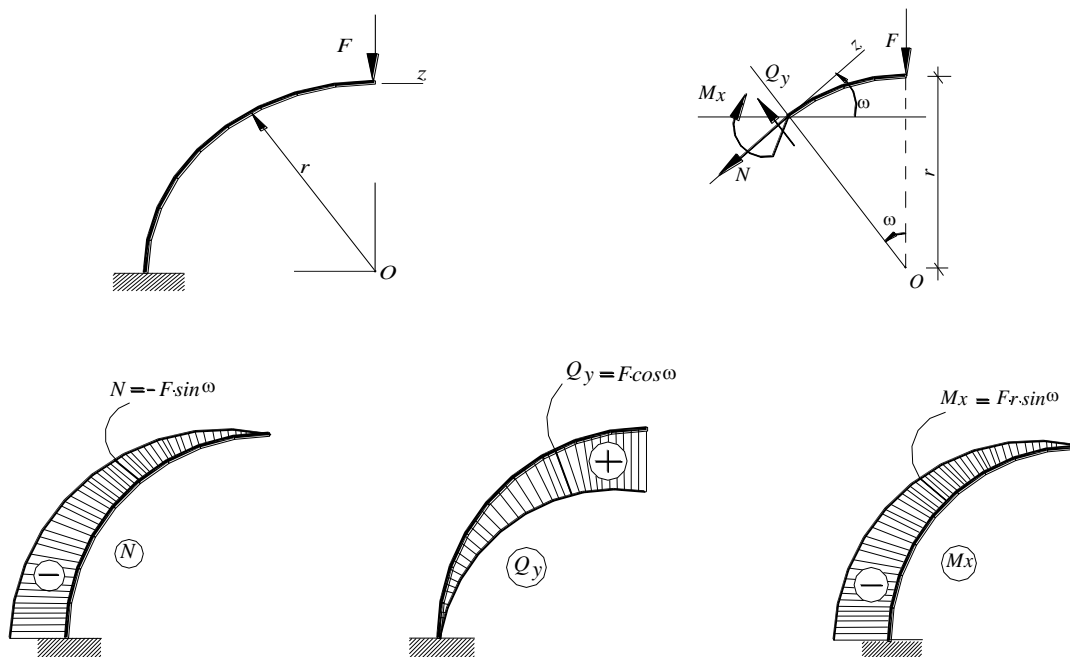
## 14.7. Kreivieji strypai

■ Mašinų konstrukcijoms kartais naudojami strypai, kurių geometrinė ašis yra išlenkta pagal kokią nors kreivę: kabliai, grandys, žiedai, ratlankiai, arkos, žibintų stovai ir kiti (14.24 pav.).



14.24 pav.

■ Nagrinėsime tikrai plokščius kreivuosius strypus (strypų, išlenktų pagal erdvinę kreivę pasitaiko retai). Jeigu tokių strypų skerspjūvių simetrijos ašis ir išorinės jėgos guli strypo ašies plokštumoje, tai strypo ašis ir po deformavimo lieka plokščia kreive, o visos vidinės jėgos bet kuriame skerspjūvyje suvedamas į tris komponentus:  $N$ ,  $Q_y$ ,  $M_x$ . Šios įrašos nustatomos pjūvio metodu (14.25 pav.).



14.25 pav.

■ Kreivųjų strypų skaičiavimas nuo tiesiųjų strypų skaičiavimo skiriasi tuo, kad lenkiamų kreivųjų strypų skerspjūviuose įtempimai pasiskirsto ne tiesiškai, bet pagal tam tikrą kreivę. Eksperimentai rodo, kad ryški kreivė gaunama tik didelio kreivumo strypams ( $\frac{h}{r} \geq \frac{1}{5}$ , čia  $h$  – skerspjūvio aukštis,  $r$  – strypo ašies kreivio spindulys, 14.26 pav.). Mažo kreivumo strypams ( $\frac{h}{r} \leq \frac{1}{5}$ ) toji kreivė yra gana lėkšta ir gali būti pakeista pasvirusia tiese. Jiems apytiksliai skaičiuoti tinka tiesiojo strypo formulės. Pavyzdžiui, stačiakampio skerspjūvio strypui, kai:

$$\frac{r}{h} = 5, \quad \text{tai} \quad \Delta\sigma = 6,9\%,$$

$$\frac{r}{h} = 8, \quad \text{tai} \quad \Delta\sigma = 4,8\%,$$

$$\frac{r}{h} = 10, \quad \text{tai} \quad \Delta\sigma = 3,8\%,$$

$$\frac{r}{h} = \infty, \quad \text{tai} \quad \Delta\sigma = 0,$$

$\Delta\sigma$  – normalinių įtempimų skaičiavimo paklaida.

■ Įtempimai nuo ašinės (14.27 pav.) ir skersinės jėgos kreivuosiuose strypuose pasiskirsto panašiai kaip ir tiesiuosiuose strypuose, todėl jiems skaičiuoti naudojamos atitinkamos tiesiojo strypo formulės:

$$\sigma(N) = \frac{N}{A}, \quad (14.38)$$

$$\tau(Q) = \frac{Q_y \cdot |S_x|}{I_x \cdot b}. \quad (14.39)$$

Normaliniai įtempimai nuo lenkimo momento skerspjūvyje kinta pagal hiperbolinį dėsnį (14.28 pav.):

$$\sigma(M) = \frac{M_x \cdot y_{nl}}{S_{nl} \cdot \rho}, \quad (14.40)$$

$M_x$  – lenkimo momentas, veikiantis skerspjūvyje;  $S_x$  – skerspjūvio statinis momentas neutraliosios ašies atžvilgiu ( $S_x = A \cdot y_{nl,c}$ , čia  $y_{nl,c}$  – skerspjūvio svorio centro nuotolis nuo neutraliosios linijos);  $y_{nl}$  – nagrinėjamo sluoksnio nuotolis nuo neutraliosios linijos;  $\rho$  – nagrinėjamo sluoksnio kreivio spindulys.

Pasinaudoti (14.40) formule galima tikrai žinant neutraliosios linijos padėtį. Tam reikia apskaičiuoti neutraliojo sluoksnio spindulį:

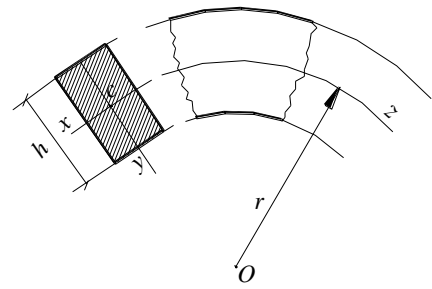
$$r_{nl} = \frac{A}{\int \frac{1}{\rho} dA}, \quad (14.41)$$

tuomet

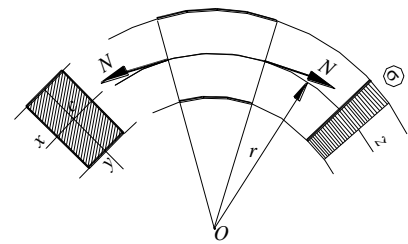
$$y_{nl,c} = r - r_{nl}. \quad (14.42)$$

Dažniausiai pasitaikantiems skerspjūviams šių rodiklių reikšmės yra pateiktos lentelėse. Pavyzdžiui, stačiakampiui skerspjūviui tikslusis sprendinys yra  $r_{nl} = \frac{h}{\ln \frac{r_{ext}}{r_{int}}}$ , apytikslis sprendinys –  $y_{nl,c} = \frac{h^2}{12r}$  (čia

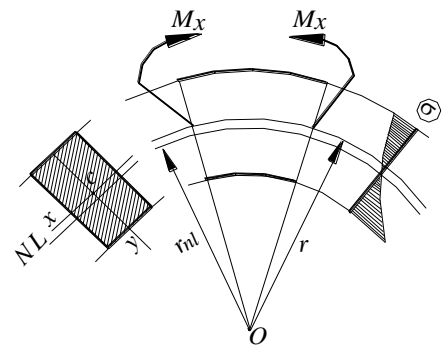
$r_{ext}$  ir  $r_{int}$  – išorinio ir vidinio sluoksnių kreivio spinduliai).



14.26 pav.



14.27 pav.



14.28 pav.

Jeigu kreivojo strypo skerspjūvyje vienu metu veikia ir lenkimo momentas, ir ašinė jėga, tai įtempimai skaičiuojami kaip algebrinė suma nuo minėtų įrašų:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x \cdot y_{nl}}{S_x \cdot \rho} \quad (14.43)$$

14.12 pvz.    ✖ ✖ ✖

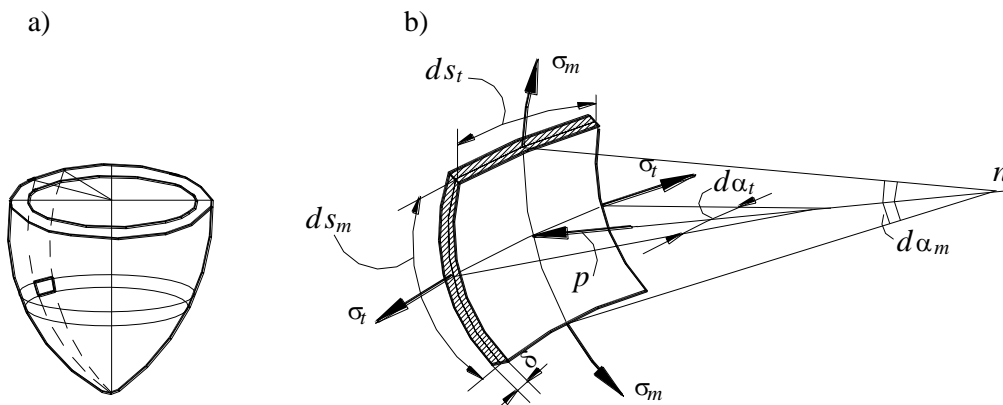
## 14.8. Plonasieniai indai

■ Iki šiol buvo nagrinėjamas tik strypų skaičiavimas. Prisiminkime (žr. 2 skyrių), kad strypas yra konstrukcinis elementas, kurio matmenys dviem erdvės kryptimis yra labai maži, palyginti su matmeniu trečiajame erdvės kryptimi. Masyvų (elementų su vienodos eilės matmenimis visomis erdvės kryptimis) skaičiavimas neįeina į klasikinį medžiagų mechanikos kursą. Tačiau elementų, kurių matmuo viena erdvės kryptimi (storio) labai mažas, palyginti su matmenimis kitomis dviem erdvės kryptimis ir apribotų plokščiais paviršiais (plokščių) arba kreivais paviršiais (kevalų), skaičiavimas dažnai įtraukiamas į vienokius ar kitokius medžiagų mechanikos modulius.

■ Nagrinėsime tikrai vieną kevalų rūšį – plonasienius indus. Be to, nagrinėsime ne bet kokius plonasienius indus, o simetriškus ir veikiamus simetrine apkrova. Tokių plonasienių indų pavyzdžiai gali būti talpyklos, katilai, vamzdžiai, veikiami skysčių ar dujų vidinio slėgio.

Simetriški ašies atžvilgiu indai vadinami sukiniiais. Tai indai, gaunami sukant plokščią figūrą apie kokią nors ašį. Pavyzdžiui, sukant stačiakampį, gaunamas cilindras, sukant trikampį – kūgis, sukant parabolę – paraboloidas ir pan. Kai sukinio sienelėse nėra didelių paviršiaus pokyčių, koncentruojančių įtempimus, kai sienelės storis sudaro mažiau kaip dešimtadalį sukinio skersmens ir kai jį veikia simetrinė apkrova (dujų, skysčio slėgis), tokiems sukiniams galima taikyti bemomentę kevalų teoriją. Taikant šią kevalų skaičiavimo teoriją teigiama, kad įtempimai, veikiantys indo sienelėje, visame jos storiuje yra vienodi ir kad indo sienelės nėra lenkiamos. Kuo plonesnis indas, tuo tikslesnius rezultatus duoda bemomentė teorija.

■ Aptarkime keletą sąvokų (14.29 pav.). Plokštumos, einančios per sukinio simetrijos ašį, vadinamos *meridianinėmis plokštumomis*. Įtempimai, veikiantys meridiano liestinės kryptimi, vadinami *meridianiniais įtempimais* ( $\sigma_m$ ). Kūginiai paviršiai, statmeni sukinio išorinio paviršiaus meridianui, vadinami *žiediniais pjūviais*. Įtempimai, veikiantys žiedo liestinės kryptimi, vadinami *žiediniais įtempimais* ( $\sigma_t$ ). Įtempimai, veikiantys radialine kryptimi, vadinami *radialiniais įtempimais*. Jie lygūs slėgiui prie sukinio sienelės vidinio paviršiaus ir nuliui prie išorinio paviršiaus (jų paprastai nepaisoma).



14.29 pav.

■ Iš plonasienio indo dviem meridianiniais ir dviem žiediniais kūginiais pjūviais išskirkime nykstamai mažo dydžio elementą (14.29 pav.). Meridianinė plokštuma dalija sukinį ir apkrovą (vidinį slėgį) į dvi simetriškas dalis, todėl meridianiniuose pjūviuose nėra šlyties jėgų, nėra ir tangentiųjų įtempimų. Kadangi žiediniai pjūviai yra statmeni meridianiniams, juose tangentiųjų įtempimų taip pat nėra (tangentiųjų įtempimų dualumo dėsnis). Radialiniai įtempimai neįvertinami. Tai gi lieka tik meridianiniai ir žiediniai įtempimai; turime dviašį įtempimų būvį.

Išpjautąjį indo sienelės elementą veikia penkios atstojamosios jėgos. Tai statmenai sienelės paviršiui veikianti apkrovos jėga  $p \cdot ds_m \cdot ds_t$  (čia  $p$  – slėgis,  $ds_m$  – elemento briaunos ilgis meridianine kryptimi,  $ds_t$  – elemento briaunos ilgis žiedine kryptimi), dvi meridianinėse plokštumose veikiančios atstojamosios  $\sigma_t \cdot ds_m \cdot \delta$  (čia  $\delta$  – indo sienelės storis) ir dvi žiedinėse plokštumose veikiančios atstojamosios  $\sigma_m \cdot ds_t \cdot \delta$ .

Suprojektuokime visas nykstamai mažą sienelės elementą veikiančias jėgas į ašį, statmeną sienelės paviršiui:

$$p \cdot ds_m \cdot ds_t - 2\sigma_t \cdot ds_m \cdot \delta \cdot \sin \frac{d\alpha_t}{2} - 2\sigma_m \cdot ds_t \cdot \delta \cdot \sin \frac{d\alpha_m}{2} = 0. \quad (14.44)$$

Kadangi kampai  $d\alpha_m$  ir  $d\alpha_t$  yra nykstamai maži, tai  $\sin \frac{d\alpha_t}{2} \approx \frac{d\alpha_t}{2} = \frac{ds_t}{2\rho_t}$ ,  $\sin \frac{d\alpha_m}{2} \approx \frac{d\alpha_m}{2} = \frac{ds_m}{2\rho_m}$ .

Irašykime šias reikšmes į pusiausvyros lygtį (14.44):  $p \cdot ds_m \cdot ds_t - 2\sigma_t \cdot ds_m \cdot \delta \cdot \frac{ds_t}{2\rho_t} - 2\sigma_m \cdot ds_t \cdot \delta \cdot \frac{ds_m}{2\rho_m} = 0$ .

Suprastinę lygtį gauname vadinamąją Laplaso lygtį:

$$\frac{\sigma_t}{\rho_t} + \frac{\sigma_m}{\rho_m} = \frac{p}{\delta}, \quad (14.45)$$

$\sigma_t$  – žiedinis įtempimas;  $\rho_t$  – žiedinio pjūvio lanko kreivio spindulys;  $\sigma_m$  – meridianinis įtempimas;  $\rho_m$  – meridianinio pjūvio lanko kreivio spindulys;  $p$  – vidinis slėgis;  $\delta$  – sienelės storis.

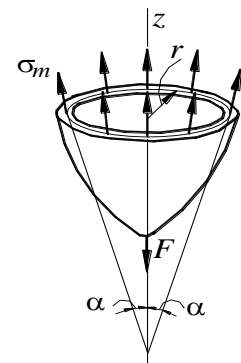
■ Laplaso lygtyje yra du nežinomieji ( $\sigma_t$  ir  $\sigma_m$ ), todėl uždaviniui išspręsti reikia dar vienos lygties. Paprastai tai būna žiediniu pjūviu atpjautos indo dalies pusiausvyros lygtis (14.30 pav.):

$$-F + \sigma_m \cdot 2\pi \cdot r \cdot \delta \cdot \cos \alpha = 0.$$

Iš jos gaunami meridianiniai įtempimai:

$$\sigma_m = \frac{F}{2\pi \cdot r \cdot \delta \cdot \cos \alpha}, \quad (14.46)$$

$\sigma_m$  – meridianinis įtempimas;  $F$  – vidaus slėgio, veikiančio atpjautąją indo dalį, atstojamoji;  $r$  – žiedinio pjūvio lanko kreivio spindulys;  $\delta$  – indo sienelės storis;  $\alpha$  – kampas, kurį sudaro nagrinėjamo žiedinio pjūvio meridianiniai įtempimai su indo ašimi.



14.30 pav.

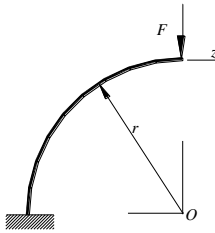
14.2 tekstas, 14.30 pav., 14.13 pvz. ■ ■ ■

### Kontroliniai klausimai ir užduotys

- 14.1. Parodykite, kaip pasiskirsto  $\sigma$  nuo  $N$  stačiakampiame skerspjūvyje. Brėžinys, formulė.
- 14.2. Parodykite, kaip pasiskirsto  $\sigma$  nuo  $M_x$  stačiakampiame skerspjūvyje. Brėžinys, formulė.
- 14.3. Parodykite, kaip pasiskirsto  $\sigma$  nuo  $M_y$  stačiakampiame skerspjūvyje. Brėžinys, formulė.
- 14.4. Parodykite, kaip pasiskirsto  $\tau_{zx}$  nuo  $Q_x$  stačiakampiame skerspjūvyje. Brėžinys, formulė.
- 14.5. Parodykite, kaip pasiskirsto  $\tau_{zy}$  nuo  $Q_y$  stačiakampiame skerspjūvyje. Brėžinys, formulė.
- 14.6. Parodykite, kaip pasiskirsto  $\tau$  nuo  $T$  stačiakampiame skerspjūvyje. Brėžinys, formulė.
- 14.7. Parodykite, kaip pasiskirsto  $\tau$  nuo  $T$  apskritame skerspjūvyje. Brėžinys, formulė.
- 14.8. Užrašykite bendriausias sudėtingai deformuojamų strypų stiprumo sąlygas.
- 14.9. Kaip skaičiuojami normaliniai įtempimai sudėtingai deformuojamo elemento skerspjūvyje?
- 14.10. Kas yra neutralioji linija?
- 14.11. Kokie skerspjūvio taškai yra pavojingi, esant vienašiam įtempimų būviui?
- 14.12. Užrašykite stiprumo sąlygą, remdamiesi didžiausių tangentinių įtempimų stiprumo hipoteze.
- 14.13. Užrašykite stiprumo sąlygą, remdamiesi energetine stiprumo hipoteze.
- 14.14. Užrašykite stiprumo sąlygą, kai strypo skerspjūvio forma yra sudėtinga, įtempimų būvis vienašis, medžiaga vienodai priešinasi tempimui ir gniuždymui. Brėžinys (visos įrąžos teigiamos).
- 14.15. Užrašykite stiprumo sąlygą, kai strypo skerspjūvis yra stačiakampis, įtempimų būvis vienašis, medžiaga vienodai priešinasi tempimui ir gniuždymui. Brėžinys (visos įrąžos teigiamos).
- 14.16. Užrašykite stiprumo sąlygą, kai strypo skerspjūvis yra skritulys, įtempimų būvis vienašis, medžiaga vienodai priešinasi tempimui. Brėžinys (visos įrąžos teigiamos).
- 14.17. Užrašykite stiprumo sąlygą, kai strypo skerspjūvis yra stačiakampis, įtempimų būvis dviašis, medžiaga vienodai priešinasi tempimui ir gniuždymui. Brėžinys (visos įrąžos teigiamos).
- 14.18. Užrašykite stiprumo sąlygą, kai strypo skerspjūvis yra skritulys, įtempimų būvis dviašis, medžiaga vienodai priešinasi tempimui. Brėžinys (visos įrąžos teigiamos).
- 14.19. Koks lenkimas vadinamas įstrižuoju?
- 14.20. Užrašykite įstrižai lenkiamo strypo stiprumo sąlygą.
- 14.21. Užrašykite įstrižai lenkiamo strypo neutraliosios linijos lygtį.
- 14.22. Kada įstrižojo lenkimo atveju neutralioji linija yra statmena jėgų veikimo linijai?
- 14.23. Kada įstrižojo lenkimo atveju įlinkio kryptis sutampa su jėgos veikimo kryptimi?
- 14.24. Kada įstrižo lenkimo atveju įlinkio kryptis yra statmena neutraliajai linijai?
- 14.25. Koks strypo apkrovimo atvejis vadinamas ekscentrinu tempimu (gniuždymu)?
- 14.26. Paaiškinkite formulę:
- $$\sigma = \frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_f}{i_x^2} y + \frac{x_f}{i_y^2} x \right).$$
- 14.27. Užrašykite ekscentriškai tempiamo arba gniuždomo strypo neutraliosios linijos lygtį.
- 14.28. Paaiškinkite formules:
- $$a_y = -\frac{i_x^2}{y_f}, \quad a_x = -\frac{i_y^2}{x_f}.$$
- 14.29. Kas yra skerspjūvio branduolys?
- 14.30. Paaiškinkite formules:
- $$x_f = -\frac{i_y^2}{a_x}, \quad y_f = -\frac{i_x^2}{a_y}.$$
- 14.31. Nubraižykite stačiakampio skerspjūvio branduolį.
- 14.32. Nubraižykite skritulinio skerspjūvio branduolį.
- 14.33. Paaiškinkite formulę:
- $$\Delta_k = \int_l \frac{N\bar{N}_k}{EA} dz + \int_l \frac{M_x\bar{M}_{x,k}}{EI_x} dz + \int_l \frac{M_y\bar{M}_{y,k}}{EI_y} dz + \mu_x \int_l \frac{Q_x\bar{Q}_{x,k}}{GA} dz + \mu_y \int_l \frac{Q_y\bar{Q}_{y,k}}{GA} dz + \int_l \frac{T\bar{T}_k}{GI_p} dz.$$



- 14.34. Kokie strypai vadinami kreivaisiais?  
Pateikite plokščių kreivųjų strypų pavyzdžių.
- 14.35. Kaip skirstomi plokšti kreivieji strypai pagal jų kreivį?
- 14.36. Kuo ypatingas mažo kreivio kreivųjų strypų skaičiavimas?
- 14.37. Kuo ypatingas didelio kreivio kreivųjų strypų skaičiavimas?
- 14.38. Pateiktam apskritiminių strypui sudarykite įrąžų diagramas.



- 14.39. Kaip pasiskirsto normaliniai įtempimai kreivojo strypo skerspjūvyje nuo ašinės jėgos? Formulė. Brėžinys.
- 14.40. Kaip pasiskirsto normaliniai įtempimai kreivojo strypo skerspjūvyje nuo lenkimo momento? Brėžinys. Kuriame taške jie didžiausi?
- 14.41. Paaiškinkite formulę. Brėžinys.

$$r_{nl} = \frac{A}{\int_{A^D} \frac{1}{\rho} dA}.$$

- 14.42. Paaiškinkite formulę. Brėžinys.

$$\sigma = \frac{M}{S_{nl}} \cdot \frac{y_{nl}}{\rho}.$$

- 14.43. Kas yra plonasieniai indai?
- 14.44. Ką vadiname sukiniu?
- 14.45. Kada sukiniams galima taikyti bemomentę kevalų teoriją?
- 14.46. Kas yra meridianinės plokštumos, meridianiniai įtempimai?
- 14.47. Kas yra žiedinės plokštumos, žiediniai įtempimai?
- 14.48. Kas yra radialiniai įtempimai? Kam jie lygūs?
- 14.49. Kodėl plonasienio sukinio sienelių įtempimų būvis yra dviasis?
- 14.50. Užrašykite Laplaso lygtį.
- 14.51. Kokia lygtis naudojama meridianiniams įtempimams skaičiuoti?
- 14.52. Paaiškinkite formulę. Brėžinys.

$$\sigma_m = \frac{F}{2\pi r \cdot \delta \cdot \cos \alpha}.$$

# 15. Gniuždomųjų strypų stabilumas

## 15.1. Bendrosios žinios

■ Ankstesnėje kurso dalyje buvo nagrinėjamas tik elementų stiprumas ir standumas. Skaičiuojant gniuždomuosius strypus, sąlygiškai buvo laikyta, kad jie išlaiko savo pradinę formą (lieka tiesūs), iki pasikeičia mechaninė medžiagos būseną, t. y. plastiškoje medžiagoje prasideda plastinių deformacijų kaupimosi procesas, trapijoje – irimas. Pasirodo, kad ilgi, laibi strypai, gniuždymo jėgai pasiekus tam tikrą (kritinį) didumą, savo pradinės formos neišlaiko, išlinksta ir suklumpa, nors įtempimai tuo metu būna gerokai mažesni už ribinius. Taigi stiprumo ir standumo sąlygų tenkinimas dar negarantuoja saugaus gniuždomųjų elementų darbo. Juos skaičiuojant būtina užtikrinti, kad gniuždymo jėga neviršytų kritinės jėgos, t. y. mažiausios jėgos, kuriai veikiant strypas tampa nestabilus, t. y. praranda pirminę pusiausvyros formą.

■ Gniuždomųjų elementų projektavimas yra vienas iš atsakingiausių konstrukcijos projektavimo etapų, nes būtent tokių elementų suirimas (suklumpimas) įvyksta staiga, netikėtai, be pastebimų išpėjamųjų požymių (plyšių atsiradimo, didelių deformacijų ir kt.) ir sukelia skaudžias avarijas.

15.1 tekstas    ✖ ✖ ✖

■ Būdingiausias stabilumo netekimo pavyzdys yra laibo tiesiojo strypo klūpdymas (15.1a pav.). Kol gniuždymo jėga  $F$  nedidelė, paveikus strypą horizontalia jėga jis išlinksta, bet, jėgą pašalinus, sugrįžta į pirminę pusiausvyros formą. Padidinus gniuždymo jėgą iki kritinio didumo ( $F_{cr}$ ), išlenktas strypas neišsitiesia, nors išlinkimo priežastis ir pašalinama. Padidinus jėgą virš kritinio didumo, strypas išlinksta dėl visiškai nežymių atsitiktinių priežasčių: pradinio strypo išlinkimo, gniuždymo jėgos necentriško veikimo, strypo medžiagos nevienodumo ir kt. Strypui netenkant stabilumo pasireiškia didelės deformacijos.

Apkrovai pasiekus kritinį didumą, stabilumo gali netekti ne tik tiesieji gniuždomieji strypai, bet ir kitokios formos strypai bei konstrukcijos: žiedas (15.1b pav.), arka (15.1c pav.), rėmas (15.1d pav.) ir kitos konstrukcijos.

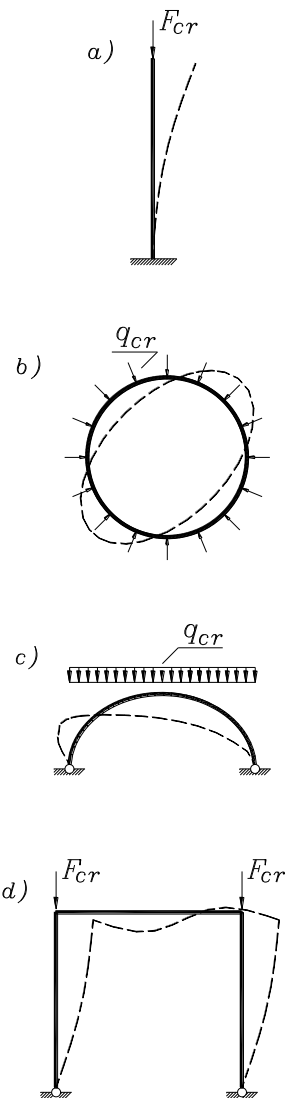
15.2 tekstas, 15.2 pav.    ✖ ✖ ✖

## 15.2. Oilerio formulė

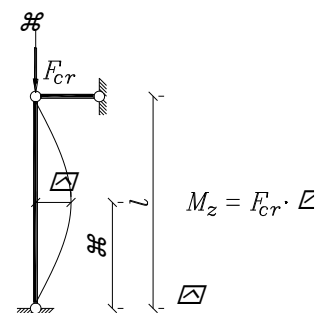
■ Tiesiųjų gniuždomųjų strypų stabilumą nagrinėjo ir formulę kritinei jėgai nustatyti išvedė (1744 m.) Sankt Peterburgo mokslų akademijos akademikas Leonardas Oileris.

■ Nagrinėsime tiesų pastovaus skerspjūvio lankstiškai atremtą, centriškai gniuždomą strypą (15.3 pav.). Tarkime, kad jis yra išlinkęs pagal lėkštą kreivę ir kad toje padėtyje jį laiko kritinė jėga  $F_{cr}$ . Užrašykime išlinkusio strypo įlinkių kreivės diferencialinę lygtį:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = -\frac{M(z)}{E \cdot I_{\min}} = -\frac{F_{cr} \cdot y}{E \cdot I_{\min}}, \quad (15.1)$$



15.1 pav.



15.3 pav.

arba

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + k^2 y = 0, \quad (15.2)$$

čia

$$k^2 = \frac{F_{cr}}{E \cdot I_{\min}}. \quad (15.3)$$

Diferencialinės lygties (15.2) sprendinys turi tokį pavidalą:

$$y = A \cdot \sin(k \cdot z) + B \cdot \cos(k \cdot z). \quad (15.4)$$

Konstantas  $A$  ir  $B$  nustatysime iš kraštinių sąlygų: 1) kai  $z=0$ , tai  $y=0$ ; 2) kai  $z=l$ , tai  $y=0$ . Iš pirmosios sąlygos gauname, kad  $B=0$  ( $0=0+B \cdot 1$ ). Taigi išlinkusio strypo įlinkių lygtis yra sinusoidė:

$$y = A \cdot \sin(k \cdot z). \quad (15.5)$$

Ji antrąją kraštinę sąlygą tenkina dviem atvejais: 1)  $A=0$ ; 2)  $\sin(k \cdot l)=0$ . Pirmasis atvejis mūsų nedomina, nes kai  $A=0$ , visų skerspjūvių įlinkiai lygūs nuliui ( $y=0$ ). Iš antrosios sąlygos gauname, kad  $k \cdot l = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, n \cdot \pi$ , kur  $n$  yra bet koks sveikasis skaičius. Taigi  $k \cdot l = n \cdot \pi$ ,  $k^2 \cdot l^2 = n^2 \cdot \pi^2$ ,  $\frac{F_{cr}}{E \cdot I_{\min}} l^2 = n^2 \cdot \pi^2$ . Galiausiai gauname, kad

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{l^2} n^2. \quad (15.6)$$

Iš (15.6) formulės matyti, kad jėga, palaikanti mažai deformuotą strypą pusiausvirą, teoriškai gali turėti daug reikšmių. Praktiškai pavojinga yra mažiausia, bet nelygi nuliui kritinės jėgos reikšmė, t. y. kai  $n = n_{\min} = 1$ . Tuomet

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 E \cdot I_{\min}}{l^2}. \quad (15.7)$$

■ Formulė (15.7) išvesta dviem galais lankstiškai įtvirtintam strypui. Analogiškai galima gauti kritinės jėgos išraiškas esant įvairiai įtvirtintam strypui (15.4 pav.). Dažnai visais įtvirtinimo atvejais naudojama viena apibendrinta formulė:

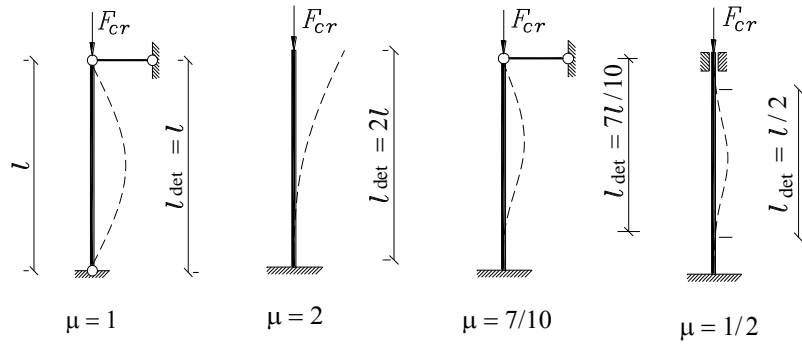
$$F_{cr} = \frac{\pi^2 E \cdot I_{\min}}{l_{\det}^2}, \quad (15.8)$$

$l_{\det} = \mu \cdot l$  – skaičiuojamasis kludomo strypo ilgis (suklupusio strypo ašies pusbangės ilgis);  $\mu$  – strypo galų įtvirtinimo sąlygų koeficientas.

Formulė (15.8) vadinama Oilerio formule. Pagal ją kritinė jėga tiesiog proporcinga strypo standumui, atvirkščiai proporcinga strypo ilgio kvadratui ir visiškai nepriklauso nuo medžiagos stiprumo rodiklių.

15.1 pvz.

\*\*\*

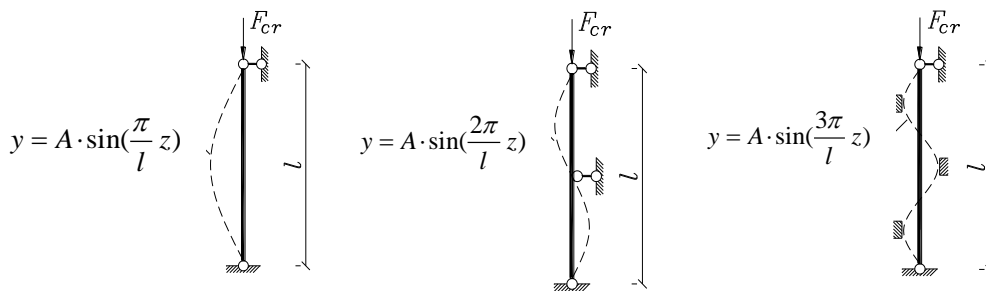


15.4 pav.

■ Kludomo strypo išlenktos ašies lygtį gausime iš (15.5) formulę įrašę  $k$  reikšmę:  $k = \frac{\pi \cdot n}{l}$ . Tuomet

$$y = A \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{l} z\right), \quad (15.9)$$

$A$  – neapibrėžta konstanta, lygi didžiausiam strypo įlinkiui. Remiantis (15.9) lygtimi, strypo ašis yra sinusoidė, turinti  $n$  pusbangių. Be abejo, strypo ašis gali turėti dvi ar daugiau pusbangių tik esant papildomoms šoninėms atramoms (15.5 pav.).



15.5 pav.

### 15.3. Oilerio formulės galiojimo ribos

■ Oilerio formulė buvo išvesta laikant, kad strypo deformacijos yra tamprios, t. y. kad  $E = \text{const}$ . Prisiminkime, kad tamprumo modulis  $E$  yra pastovus tol, kol medžiagos įtempimai neviršija proporcingumo ribos. Taigi Oilerio formulė galioja tol, kol kritiniai įtempimai yra mažesni už proporcingumo ribą:

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{l_{\det}^2 \cdot A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot i_{\min}^2}{l_{\det}^2} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\left(\frac{l_{\det}}{i_{\min}}\right)^2} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \leq \sigma_{pr}, \quad (15.10)$$

čia  $\lambda = \frac{l_{\det}}{i_{\min}} = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}}$  – strypo liaunis. Jis lygus strypo skaičiuojamojo ilgio ir jo skerspjūvio mažiausiojo

inercijos spindulio ( $i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$ ) santykiui.

Taigi Oilerio formulė galioja tuomet, kai

$$\lambda \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{pr}}} . \quad (15.11)$$

Išraiška  $\pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{pr}}}$  vadinama ribiniu liauniu ir žymima simboliu  $\lambda_{lim}$ . Kai  $\lambda \geq \lambda_{lim}$ , tai Oilerio formulę naudoti galima, kai  $\lambda < \lambda_{lim}$ , jos naudoti negalima. Pavyzdžiui, plienui, kurio  $\sigma_{pr} = 200 \text{ MPa}$ ,  $E = 210 \text{ GPa}$ , ribinis liaunis  $\lambda_{lim} = \pi \sqrt{\frac{210 \cdot 10^3}{200}} \cong 100$ .

■ Taigi Oilerio formulė tinka skaičiuoti tik palyginti ilgiems, laibiems gniuždomiesiems strypams. Tačiau praktikoje dažnai pasitaiko strypų, kurių liaunis mažesnis už ribinį. Tokiems strypams netenkant stabilumo pasireiškia plastinės deformacijos, dėl to pasikeičia fizikinės priklausomybės, ir teorinis šio reiškinio nagrinėjimas tampa labai sudėtingas. Tokiu atveju atitinkamos formulės gaunamos eksperimentiškai. Labiausiai paplitusios yra empirinės F. S. Jasinskio formulės, kurios išreiškia kritinius įtempimus kaip strypo liaunio tiesinę arba parabolinę funkciją:

$$\sigma_{cr} = a - b \cdot \lambda , \quad (15.12)$$

$$\sigma_{cr} = a - b \cdot \lambda + c \cdot \lambda^2 , \quad (15.13)$$

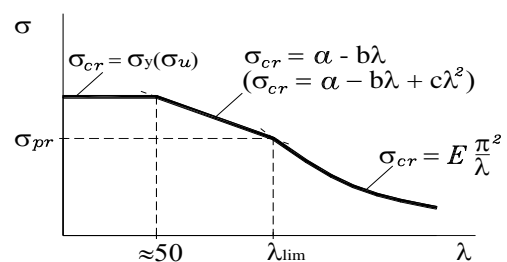
$a$ ,  $b$  ir  $c$  – koeficientai, priklausantys nuo medžiagos ir turintys įtempimų dimensiją. Pavyzdžiui,

plienui  $\sigma_{cr} = 310 - 1,14\lambda$  (MPa);

medienai  $\sigma_{cr} = 29,3 - 0,194\lambda$  (MPa);

ketui  $\sigma_{cr} = 276 - 120\lambda + 0,053\lambda^2$  (MPa).

■ Apibendrinę gauname, kad skaičiuojant gniuždomuosius strypus, atsižvelgiant į jų liaunį, tenka naudotis keliomis formulėmis. Kritinių įtempimų priklausomybė nuo strypo liaunio parodyta (15.6).



15.6 pav.

15.2 pvz.    ✖ ✖ ✖

#### 15.4. Centriškai gniuždomų strypų skaičiavimas

■ Projektuojant gniuždomuosius strypus reikia užtikrinti jų stabilumą, t. y. garantuoti kad įtempimai juose neviršytų kritinių. Tam naudojamas stabilumo atsargos koeficientas  $n_{stb}$ , o stabilumo sąlyga užrašoma taip:

$$|\sigma_{det}| \leq \frac{|\sigma_{cr}|}{n_{stb}} . \quad (15.14)$$

Prisiminkime stiprumo sąlygą:

$$|\sigma|_{max} \leq R . \quad (15.15)$$

Užrašykime šių dviejų nelygybių dešiniųjų pusių santykį, pavadinkime jį klupumo koeficientu ir pažymėkime simboliu  $\varphi$ :

$$\frac{\sigma_{cr}}{n_{stb} \cdot R} = \varphi. \quad (15.16)$$

Klupumo koeficientas  $\varphi$  rodo, kiek kartų reikia sumažinti skaičiuojamąjį stiprį  $R$ , kad užtikrintume saugų gniuždomojo strypo darbą. Jis priklauso nuo kritinių įtempimų, taigi yra strypo liaunio funkcija:

$$\varphi = f(\lambda). \quad (15.17)$$

Įvairioms medžiagoms  $\varphi$  yra normuojamas ir paprastai pateikiamas lentelėse.

■ Įvertinę (15.14) ir (15.16) priklausomybes, galime užrašyti galutinę stabilumo sąlygos išraišką:

$$|\sigma_{det}| = \frac{|N|}{A} \leq \varphi \cdot R, \quad (15.18)$$

arba

$$|\sigma_{det}| = \frac{|N|}{\varphi \cdot A} \leq R. \quad (15.19)$$

Tokia stabilumo sąlygos forma (su klupumo koeficientu), palyginti su stabilumo sąlyga (15.14), yra pranašesnė tuo, kad leidžia naudotis tuo pačiu skaičiuojamuoju stipriu skaičiuojant tiek gniuždomuosius, tiek ir tempiamuosius strypus.

*Pastabos:* 1. Nustatant  $\sigma_{det}$  imamas skerspjūvio bruto plotas, nustatant  $|\sigma|_{max}$  – neto plotas. 2. Kadangi koeficientas  $\varphi$  yra strypo liaunio  $\lambda$  funkcija, o  $\lambda$  savo ruožtu priklauso nuo strypo skerspjūvio ploto, kuris sprendžiant projektinį uždavinį yra nežinomas, tai naudojant stabilumo sąlygą (15.18) projektinį uždavinį galima išspręsti tik priartėjimo būdu.

15.3, 15.4 pvz.    ✖ ✖ ✖

## 15.5. Lenkiamo ir kludomo strypo skaičiavimas

■ Skaičiuojant lenkiamus ir kludomus strypus, superpozicijos principą galima taikyti tik tuo atveju, kai jie yra pakankamai trumpi ir masyvūs (pavyzdžiui, tiltų atramos). Tokiu atveju įtempimai ir deformacijos apskaičiuojami atskirai nuo kiekvieno deformavimo tipo ir tuomet algebriskai sumuojami. To daryti negalima skaičiuojant liaunus strypus. Būtina atsižvelgti į tokių strypų deformacijas, nes dėl jų atsiradę įlinkiai sukelia žymų lenkimo momento padidėjimą nuo kludymo jėgos. Dėl šios priežasties lenkiamiems ir kludomiems strypams skaičiuoti naudojama vadinamoji deformuoto strypo schema (15.7 pav.).

Laisvai pasirinktame lenkiamo ir kludomo strypo pjūvyje lenkimo momentas yra lygus dviejų momentų sumai:

$$M = M_0 + F \cdot v, \quad (15.20)$$

$M_0$  – momentas nuo jėgos  $F_0$ .

Norint apskaičiuoti lenkimo momentą  $M$ , būtina žinoti įlinkį  $v$ , bet jis savo ruožtu gali būti apskaičiuotas tik žinant lenkimo momentą. Taigi lenkiamo ir kludomo strypo skaičiavimas yra statiškai neišsprendžiamas uždavinys.

■ Nagrinėsime apytikslį šio uždavinio sprendimo būdą. Užrašykime įlinkių kreivės diferencialinę lygtį:

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{M_0 + F \cdot v}{E \cdot I_x}. \quad (15.21)$$

Bet kurį įlinkį išreikškime dviejų įlinkių suma (15.8 pav.):

$$v = v_0 + \Delta v, \quad (15.22)$$

$v_0$  – įlinkis nuo jėgos  $F_0$ ;  $\Delta v$  – papildomas įlinkis nuo gniuždymo jėgos  $F$ .

Į diferencialinę lygtį (15.21) įrašykime (15.22) išraišką:

$$\frac{d^2 v_0}{dz^2} + \frac{d^2 \Delta v}{dz^2} = -\frac{M_0}{E \cdot I_x} - \frac{F \cdot v}{E \cdot I_x}. \quad (15.23)$$

Jeigu veiktų tik jėga  $F_0$ , diferencialinė lygtis turėtų tokį pavidalą:

$$\frac{d^2 v_0}{dz^2} = -\frac{M_0}{E \cdot I_x}, \quad (15.24)$$

taigi

$$\frac{d^2 \Delta v}{dz^2} = -\frac{F \cdot v}{E \cdot I_x}. \quad (15.25)$$

Laikykimės prielaidos, kad papildomi įlinkiai kinta pagal sinuso dėsnį:

$$\Delta v = A \cdot \sin\left(\frac{\pi}{l} z\right), \quad (15.26)$$

tuomet

$$\frac{d^2 \Delta v}{dz^2} = -\frac{\pi^2}{l^2} A \cdot \sin\left(\frac{\pi}{l} z\right) = -\frac{\pi^2}{l^2} \Delta v. \quad (15.27)$$

Pasinaudoję (15.22) lygtimi išreikškime  $\Delta v$  per  $v$  bei  $v_0$  ir įrašykime išraišką (15.27) į lygtį (15.25):

$$\frac{\pi^2}{l^2} (v - v_0) = \frac{F \cdot v}{E \cdot I_x}. \quad (15.28)$$

Išsprendę gautą lygtį  $v$  atžvilgiu gauname, kad

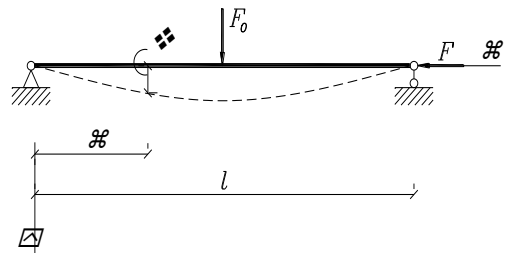
$$v = \frac{v_0}{1 - \frac{F \cdot l^2}{\pi^2 E \cdot I_x}}. \quad (15.29)$$

Bet

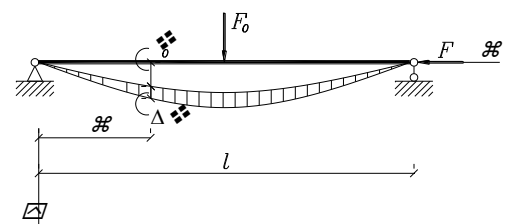
$$\frac{\pi^2 E \cdot I_x}{l^2} = F_{cr}, \quad (15.30)$$

taigi

$$v = \frac{v_0}{1 - \frac{F}{F_{cr}}}. \quad (15.31)$$



15.7 pav.



15.8 pav.

Formulė (15.31) tinka ir kitiems strypo įtvirtinimo atvejams. Tokiu atveju kritinę jėgą reikia skaičiuoti pagal formulę:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 E \cdot I_x}{(\mu \cdot l)^2}, \quad (15.32)$$

$I_x$  – skersinio lenkimo inercijos momentas.

*Pastabos:* 1. Į formulę (15.31) įeinantis įlinkis  $v_0$  gali būti nustatomas bet kokiais žinomais metodais. 2. Formulė (15.31) yra pakankamai tiksli, kai  $0 \leq F \leq 0,8F_{cr}$  (statyboje  $F$  paprastai neviršija  $0,6F_{cr}$ ). 3. Į (15.31) lygtį kritinė jėga įtraukta formaliai, todėl ją reikia skaičiuoti net ir tais atvejais, kai strypo liaunis yra mažesnis už ribinį.

■ Žinant įlinkius, nesunku apskaičiuoti lenkimo momentą ir maksimalius gniuždymo įtempimus:

$$M = M_0 + F \cdot v_0 \frac{1}{1 - \frac{F}{F_{cr}}}, \quad (15.33)$$

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|F|}{A} + \frac{|M_0|}{W} + \frac{|F \cdot v_0|}{W} \frac{1}{1 - \frac{F}{F_{cr}}}. \quad (15.34)$$

Formulė (15.34) rodo, kad įtempimai su gniuždymo jėga susiję netiesiškai; įtempimai didėja greičiau negu jėga, todėl mažiausias apskaičiuotosios jėgos padidėjimas gali sukelti neleistinai didelius įtempimus.

15.5 pvz.    ✱ ✱ ✱

### Kontroliniai klausimai ir užduotys

- 15.1. Kas yra kritinė jėga?
- 15.2. Kas yra kritiniai įtempimai?
- 15.3. Kokia lenkimo teorijos diferencialinė lygtis naudojama išvedant Oilerio formulę? Formulė.
- 15.4. Užrašykite Oilerio formulę.
- 15.5. Nubraižykite strypą, kurio galų įtvirtinimo sąlygų koeficientas lygus  $\frac{1}{2}$ .
- 15.6. Nubraižykite strypą, kurio galų įtvirtinimo sąlygų koeficientas lygus  $\frac{7}{10}$ .
- 15.7. Nubraižykite strypą, kurio galų įtvirtinimo sąlygų koeficientas lygus 1.
- 15.8. Nubraižykite strypą, kurio galų įtvirtinimo sąlygų koeficientas lygus 2.
- 15.9. Koks parametras apibūdina strypo liaunumą? Formulė.
- 15.10. Užrašykite ribinio liaunio formulę.
- 15.11. Užrašykite Oilerio formulės galiojimo sąlygą.
- 15.12. Kaip skaičiuojama kritinė jėga, kai  $\lambda < \lambda_{\lim}$ ?

- 15.13. Nubraižykite funkcijos  $\sigma_{cr} = f(\lambda)$  grafiką (medžiaga – minkštasis plienas).
- 15.14. Kokie centriškai gniuždomų strypų skerspjūviai yra racionalūs?
- 15.15. Užrašykite centriškai gniuždomo strypo stabilumo sąlygą.
- 15.16. Nuo ko priklauso ir kaip nustatomas klupumo koeficientas?
- 15.17. Paaiškinkite formulę:

$$v = \frac{v_0}{1 - \frac{F}{F_{cr}}}.$$

- 15.18. Paaiškinkite formulę:

$$M = M_0 + F \cdot v_0 \frac{1}{1 - \frac{F}{F_{cr}}}.$$

- 15.19. Paaiškinkite formulę:

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|F|}{A} + \frac{|M_0|}{W} + \frac{|F \cdot v_0|}{W} \frac{1}{1 - \frac{F}{F_{cr}}}.$$



## 16. Dinaminis deformavimas

### 16.1. Bendrosios žinios

■ Mašinų detales dažnai veikia poveikiai, atsiradę dėl netolygaus jų judėjimo arba dėl jų sukimosi kurios nors ašies atžvilgiu. Daugelis pramoninių pastatų patiria dirbančių staklių, kranų, mėtomų krovinių poveikį, transporto statiniai (tiltai, viadukai, geležinkelio bėgiai) – judančio transporto poveikį, aukšti pastatai – vėjo gūsių poveikį. Visi šie poveikiai nėra statiniai. Įvertinti konstrukcijų stiprumą, kurias veikia laikui bėgant kintantys poveikiai, yra sudėtinga, nes, pirma, sunku nustatyti įrašas, antra, sunku nustatyti medžiagų mechanines savybes. Pirmuoju atveju tenka pasitelkti d'Alamberto principą arba energijos tvermės dėsnį, antruoju atveju – įvertinti tą faktą, kad daugelio medžiagų mechaninės savybės priklauso nuo apkrovimo greičio (pavyzdžiui, daugelis dinamiškai veikiamų plastiškų medžiagų deformuojasi kaip trapios).

■ Prisiminkime kelias sąvokas, kurių reikia norint suprasti šiame skyriuje pateiktą medžiagą.

*Energija* yra materijos judėjimo matas; mechaninės sistemos gebėjimo atlikti darbą matas.

*Kinetinė energija* yra mechaninės sistemos energija, priklausanti nuo ją sudarančių materialijų taškų greičių.

*Potencinė energija* yra mechaninės sistemos energijos dalis, priklausanti nuo jos dalių tarpusavio padėties ir nuo jų padėties išoriniame jėgų lauke. Ji lygi darbui, kurį atlieka sistema veikiančios išorinės ir vidinės potencinės jėgos pereinant sistemai į vadinamąją nulinę padėtį, kurioje sistemos potencinė energija sąlygiškai laikoma lygi nuliui.

*Dinamine apkrova* – tai tokia apkrova, kurios didumas, kryptis ir pridėties taško koordinatės kinta taip greitai, kad jos veikiamos konstrukcijos dalelių masės įgyja pastebimus pagreičius, t. y. kuriai veikiant ir konstrukcijai deformuojantis kinetinė energija judant masėms yra didelė, palyginti su potencine deformuojamos konstrukcijos energija (žr. 3 skyrių).

■ Skiriami du dinamiškai deformuojamų elementų skaičiavimo atvejai. Pirmuoju atveju elementų dalelių pagreičiai yra žinomi (lifto lynų, besisukančių mašinos detalių skaičiavimas), antruoju atveju elementų dalelių pagreičiai yra nežinomi (smūgis).

Tamprieji konstrukcijos ar jos elementų virpesiai, atsiradę dėl dinaminio poveikio, šiame skyriuje nenagrinėjami.

### 16.2. Elementų skaičiavimas, kai žinomi jų dalelių pagreičiai

■ Skaičiuoti elementus, kai žinomi jo dalelių pagreičiai, taikomas d'Alamberto principas. Pagal šį principą, judanti sistema yra pusiausvira, jei prie ją veikiančių apkrovų yra prijungtos inercijos jėgos. Šis principas leidžia, skaičiuojant dinamiškai deformuojamus elementus, taikyti statikos metodus.

■ Inercijos jėgos, kaip ir savasis svoris, yra tūrinės jėgos. Inercijos jėga, veikianti bet kurią elemento dalelę, yra lygi tos dalelės masės ir jos pagreičio sandaugai:

$$F_i = m \cdot a, \quad (16.1)$$

arba

$$F_i = V \cdot \rho \cdot a = \frac{V \cdot \gamma}{g} \cdot a, \quad (16.2)$$

$V$  – tūris;  $\rho$  – tankis;  $\gamma$  – sunkis;  $g$  – sunkio pagreitis.

Skaičiuojant strypines konstrukcijas, inercijos jėgos veikia elementus kaip tiesiškai išskirstytos. Jų intensyvumas:

$$p_i = \frac{F_i}{l} = \frac{V \cdot \rho \cdot a}{l} = \frac{A \cdot l \cdot \rho \cdot a}{l} = A \cdot \rho \cdot a, \quad (16.3)$$

arba

$$p_i = \frac{A \cdot \gamma}{g} \cdot a. \quad (16.4)$$

### Pavyzdys Nr. 1. Lifto lyno skaičiavimas

Į viršų pastoviu pagreičiu  $a$  yra keliamas  $m$  masės liftas (16.1 pav.). Lyno skerspjūvio plotas  $A$ , medžiagos tankis  $\rho$ . Įvertinus lyno masę reikia apskaičiuoti jame atsiradusią ašinę jėgą.

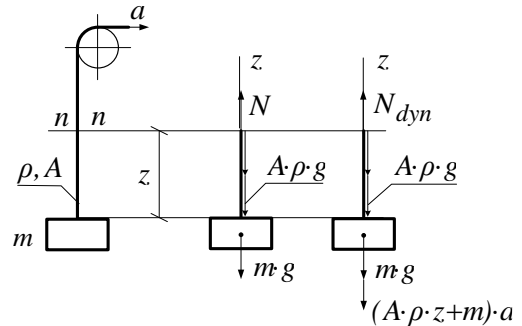
Atstumu  $z$  nuo lifto viršutinės briaunos pasižymėkime skerspjūvį  $n-n$ . Panagrinėkime apatinės konstrukcijos dalies pusiausvyrą, kai liftas nejuda (vidurinė 16.1 pav. dalis) ir kai jis keliamas pagreičiu  $a$  (dešinioji 16.1 pav. dalis). Antruoju atveju prie lifto reikia pridėti inercijos jėgą  $F_i = (A \cdot \rho \cdot z + m) \cdot a$ .

Liftas nejuda arba juda tolygiai:

$$\begin{aligned} \sum F_z &= 0; \\ N - A \cdot \rho \cdot z \cdot g - m \cdot g &= 0, \\ N &= (A \cdot \rho \cdot z + m) \cdot g. \end{aligned}$$

Liftas juda pagreičiu  $a$ :

$$\begin{aligned} \sum F_z &= 0; \\ N_{dyn} - A \cdot \rho \cdot z \cdot g - m \cdot g - (A \cdot \rho \cdot z + m) \cdot a &= 0, \\ N_{dyn} &= (A \cdot \rho \cdot z + m) \cdot g + (A \cdot \rho \cdot z + m) \cdot a = \\ &= (A \cdot \rho \cdot z + m) \cdot g \cdot \left(1 + \frac{a}{g}\right). \end{aligned}$$



16.1 pav.

Bet  $(A \cdot \rho \cdot z + m) \cdot g = N$ , taigi  $N_{dyn} = \left(1 + \frac{a}{g}\right) \cdot N$ .

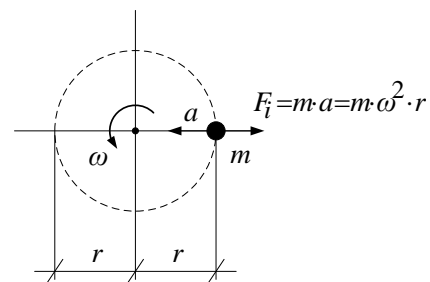
Gavome, kad lifto lyne, kai jis keliamas pagreičiu  $a$ , dinaminė ašinė jėga (kartu įtempimai, deformacijos ir poslinkiai) padidėja  $\left(1 + \frac{a}{g}\right)$  karto. Papildykime skyriaus sąvokas dinamiškumo koeficiento sąvoka:  $k_{dyn} = \left(1 + \frac{a}{g}\right)$ . Tuomet galutinė dinaminės ašinės jėgos skaičiavimo išraiška turės tokį pavidalą:

$$N_{dyn} = k_{dyn} \cdot N. \quad (16.5)$$

Tokia išraiška, kai dinaminiai dydžiai išreiškiami per statinius naudojant dinamiškumo koeficientą, yra patogi, ji plačiai naudojama skaičiuojant dinamiškai deformuojamus elementus.

16.1 pvz. ✖✖✖

■ Dažnai pagreičio atsiradimo priežastis yra kūno sukimasis ašies atžvilgiu. Prisiminkime, kad kūnui pastoviu kampiniu greičiu  $\omega$  sukantis ašies atžvilgiu, jo taškų tangentiniai pagreičiai yra lygūs nuliui, o normaliniai – tiesiog proporcingi sukimosi greičio kvadratui ir taško nuotoliui nuo sukimosi ašies ir yra nukreipti į sukimosi centrą (16.2 pav.). Atsiradusios inercijos jėgos konstrukciją ar jos elementą gali tempti, sukti, lenkti arba deformuoti sudėtingai. Toliau aptarsime kelis paprastesnius atvejus.



16.2 pav.

**Pavyzdys Nr. 2. Statmeno sukimosi ašiai strypo skaičiavimas**

Turime  $l$  ilgio ir pastovaus skerspjūvio  $A$  strypą. Jis pagamintas iš medžiagos, kurios tankis  $\rho$ . Reikia sudaryti inercijos jėgų ir dinaminių ašinių jėgų diagramas, kai strypas pastoviu kampiniu greičiu  $\omega$  sukasi vertikaliaos ašies atžvilgiu, kuri yra statmena jo ašiai (16.3 pav.).

Atstumu  $z$  nuo sukimosi ašies išskirkime nykstamai mažo ilgio  $dz$  ruoželį (16.3a pav.). Įvertinę pradinius duomenis gauname, kad jo masė  $dm = A \cdot dz \cdot \rho$ . Taigi dėl strypo sukimosi elementariame ruoželyje atsiradusi inercijos jėga  $dF_i = A \cdot dz \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot z$ . Prisiminkime, kad išskirstytoji apkrova – tai apkrova, tenkanti ilgio vienetui:

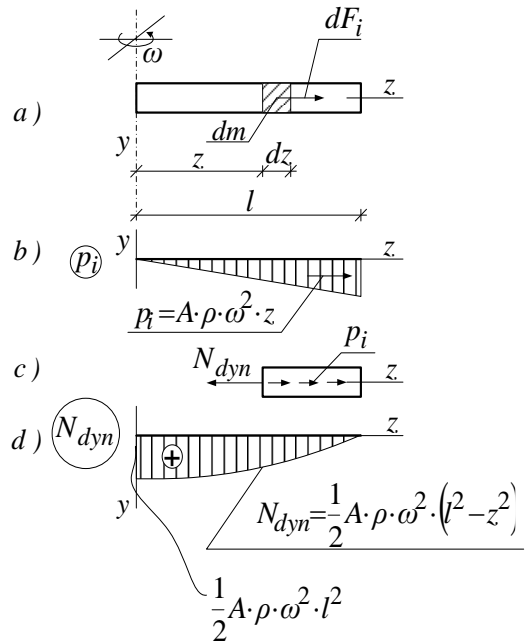
$$p_i = \frac{dF_i}{dz} = A \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot z. \quad (16.6)$$

Gavome, kad kai strypas sukasi ašies, statmenos savo ašiai, atžvilgiu, atsiradusios ašinės jėgos pasiskirsto tiesiškai: jos lygios nuliui ties sukimosi ašimi ir yra didžiausios strypo laisvajame gale (16.3b pav.).

Norėdami gauti dinaminių ašinių jėgų pasiskirstymo išilgai strypo ašies analizinę išraišką, nagrinėsime strypo dalies, esančios į dešinę nuo skerspjūvio  $z$ , pusiausvyrą (16.3c pav.):

$$\begin{aligned} \sum F_z &= 0; \\ -N_{dyn} + \int_z^l A \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot z \cdot dz &= 0, \\ N_{dyn} &= A \cdot \rho \cdot \omega^2 \int_z^l z \cdot dz = \frac{1}{2} A \cdot \rho \cdot \omega^2 (l^2 - z^2). \end{aligned}$$

Gavome, kad dinaminės ašinės jėgos pasiskirsto pagal kvadratinę dėsnį: jos didžiausios ties sukimosi ašimi  $N_{dyn,max} = \frac{1}{2} A \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot l^2$  ir lygios nuliui laisvajame strypo gale (16.3d pav.).



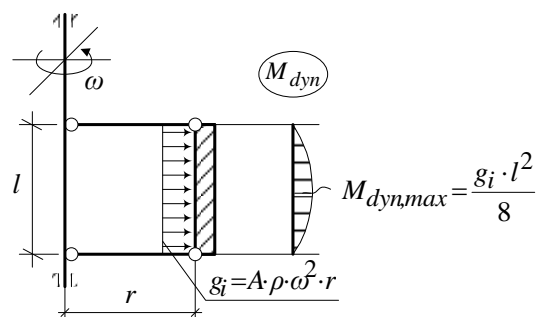
16.3 pav.

**Pavyzdys Nr. 3. Lygiagrečios su sukimosi ašimi strypo skaičiavimas**

Turime  $l$  ilgio strypą, kuris sukasi ašies, lygiagrečios su savo ašimi, atžvilgiu (16.4 pav.). Strypo skerspjūvio plotas  $A$ , medžiagos tankis  $\rho$ . Reikia rasti didžiausią lenkimo momentą strypė, jeigu jo nuotolis nuo sukimosi ašies yra  $r$ .

Šiuo atveju inercijos jėgos veiks strypą kaip vienodai išskirstyta apkrova, kurios intensyvumas  $g_i = A \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot r$ . Taigi į strypą galima žiūrėti kaip į dviatramę siją, kuri veikiama tolygiai išskirstytos apkrovos. Prisiminkime, kad tokiu atveju didžiausias lenkimo momentas veikia ties sijos viduriu:

$$M_{maxdyn} = \frac{g_i \cdot l^2}{8}.$$



16.4 pav.

16.2 pvz. ■■■

### 16.3. Smūgis

■ Smūgio metu judančio kūno greitis per labai trumpą laiką ( $10^{-3} \div 10^{-6}$ s) tampa lygus nuliui. Atsiradę lėtėjimai sukelia inercijos jėgas, veikiančias priešinga kryptimi (kūno judėjimo kryptimi). Nustatyti smūgio laiką, o kartu lėtėjimą ir inercijos jėgas yra sudėtinga. Todėl smūgiu veikiamoms konstrukcijoms skaičiuoti inžinerinėje praktikoje taikomas energetinis metodas, kuris remiasi energijos tvermės dėsniumi. Taikant šį metodą laikoma, kad sąveikaujančių kūnų kinetinės energijos nuostoliai smūgio metu yra lygūs jų potencinės deformacijos energijos padidėjimui.

■ Dažniausiai dinaminė įraža, įtempimas, deformacija ar poslinkis ( $S_{dyn}$ ) yra išreiškiami per atitinkamus statinius dydžius ( $S$ ), padaugintus iš dinamiškumo koeficiento  $k_{dyn}$ :

$$S_{dyn} = k_{dyn} \cdot S. \quad (16.7)$$

Nustatysime koeficiento  $k_{dyn}$  analizinę išraišką, kai žinomas krūvio kritimo aukštis (16.5 pav.). Prisiminkime, kad dinamiškumo koeficiento išraišką, naudojamą lifto lynams skaičiuoti, gavome anksčiau.

■ Nagrinėsime strypą, ant kurio laisvojo galo iš aukščio  $h$  krinta  $m$  masės krūvis (16.5a pav.). Smūgio metu strypas pailgėja, o jo laisvasis galas pasislenka. Strypo galo dinaminį poslinkį pažymėkime simboliu  $w_{dyn}$  (16.5b pav.). Šis poslinkis atsiranda todėl, kad smūgio metu strypą veikia inercijos jėga  $F_i$  (16.5c pav.). Paveiksle 16.5d dar yra parodytas strypo laisvojo galo poslinkis  $w$ , kuris atsiranda, kai krūvis prie strypo pridedamas statiškai.

Krintančio krūvio kinetinė energija savo skaitine reikšme lygi darbui, kurį jis atlieka krisdamas iš aukščio ( $h + w_{dyn}$ ):

$$E_k = m \cdot g \cdot (h + w_{dyn}). \quad (16.8)$$

Deformuoto strypo deformavimo potencinė energija savo skaitine reikšme yra lygi inercijos jėgos  $F_{dyn}$  darbui, kurį ji gali atlikti kelyje  $w_{dyn}$ :

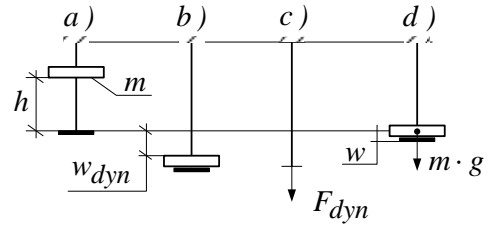
$$E_p = \frac{1}{2} F_{dyn} \cdot w_{dyn}. \quad (16.9)$$

Neįvertinus strypo, į kurį smogiama, masės ir laikantis prielaidų, teigiančių, kad kūnai ties smūgio vieta nesideformuoja ir kad smūgis yra netamprus, t. y. po smūgio krūvis ne atšoka, o juda kartu su besideformuojančiu strypu, galima užrašyti, kad

$$\frac{1}{2} F_{dyn} \cdot w_{dyn} = m \cdot g \cdot (h + w_{dyn}). \quad (16.10)$$

Prisiminkime, kad  $w_{dyn} = \frac{F_{dyn} \cdot l}{E \cdot A}$ , iš kur  $F_{dyn} = \frac{E \cdot A}{l} \cdot w_{dyn}$ . Tuomet

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{E \cdot A}{l} \cdot w_{dyn} \cdot w_{dyn} &= m \cdot g \cdot h + m \cdot g \cdot w_{dyn}, \\ w_{dyn}^2 - 2 \cdot \frac{m \cdot g \cdot l}{E \cdot A} \cdot w_{dyn} - 2 \cdot \frac{m \cdot g \cdot l}{E \cdot A} \cdot h &= 0. \end{aligned} \quad (16.11)$$



16.5 pav.

Bet  $\frac{m \cdot g \cdot l}{E \cdot A} = w$ . Įrašykime šią išraišką į kvadratinę lygtį (16.11):

$$w_{\text{dyn}}^2 - 2 \cdot w \cdot w_{\text{dyn}} - 2 \cdot w \cdot h = 0,$$

$$w_{\text{dyn}} = w \pm \sqrt{w^2 + 2 \cdot h \cdot w},$$

$$w_{\text{dyn}} = w \cdot \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{w}} \right),$$

arba

$$w_{\text{dyn}} = k_{\text{dyn}} \cdot w,$$

$$\text{čia } k_{\text{dyn}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{w}}. \quad (16.12)$$

*Pastaba.* Staigiai pridėjus apkrovą ( $h=0$ ) gaunama, kad  $k_{\text{dyn}}=2$ . Taigi jei apkrova pidedama ne statiškai, bet staigiai, tuomet ir įrašos, ir įtempimai, ir deformacijos, ir poslinkiai yra du kartus didesni už atitinkamus statinius dydžius.

■ Formulę (16.12) galima gauti ir kitiems deformavimo tipams. Bendra dinamiškumo koeficiento išraiška turi tokį pavidalą:

$$k_{\text{dyn}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{s}}, \quad (16.13)$$

$h$  – krūvio kritimo aukštis;  $s$  – konstrukcijos taško, ant kurio krinta krūvis, poslinkis smūgio kryptimi, kai veikia statinė apkrova, lygi krintančio kūno svorio jėgai.

■ Jeigu žinomas smogiančio kūno greitis  $v$  (prieš pat smūgį), tai

$$k_{\text{dyn}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g \cdot s}}, \quad (16.14)$$

nes  $h = \frac{v^2}{2 \cdot g}$ .

■ Kai įvertinama konstrukcijos, į kurią smogiama, masė,

$$k_{\text{dyn}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{s} \cdot \frac{1}{1 + \frac{m_0}{m}}}, \quad (16.15)$$

$m_0$  – konstrukcijos masė.

16.3, 16.4 pvz.

\*\*\*

### Kontroliniai klausimai ir uždutys

- 16.1. Kokia apkrova vadinama dinamine?
- 16.2. Kokius žinote dinamiškai veikiamų elementų skaičiavimo atvejus?
- 16.3. Ką teigia d'Alamberto principas?
- 16.4. Kaip nustatoma inercijos jėga? Formulė.
- 16.5. Kaip nustatoma inercijos jėga, kūnui pastoviu kampiniu greičiu sukantis ašies atžvilgiu?
- 16.6. Strypas pastoviu kampiniu greičiu  $\omega$  sukasi ašies, statmenos  $z$  ašiai, atžvilgiu. Nubraižykite inercijos jėgų ir ašinių jėgų diagramas, kai duota  $A$ ,  $g$ ,  $l$ .
- 16.7. Koks dėsnis taikomas skaičiuojant smūgine apkrova veikiamus elementus? Ką jis teigia?
- 16.8. Kokių prielaidų laikomasi skaičiuojant smūgiu veikiamus elementus?
- 16.9. Kam lygus dinamiškumo koeficientas, kai žinomas krūvio kritimo aukštis?
- 16.10. Paaiškinkite formulę:

$$k_{\text{dyn}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g \cdot s}} .$$

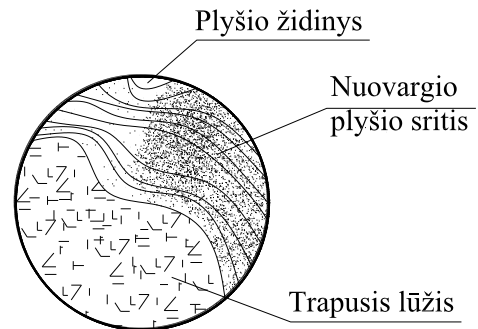
- 16.11. Paaiškinkite formulę:

$$k_{\text{dyn}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{s} \cdot \frac{1}{1 + \frac{m_0}{m}}} .$$

## 17. Cikliškai kintantys įtempimai

### 17.1. Bendrosios žinios apie nuovargio suirimą

■ Cikliškai kintantys įtempimai atsiranda dėl apkrovų, kurios konstrukcijos elementą veikia periodiškai, t. y. daug kartų kintant jų didumui ir kryptčiai. Taip apkrauti būna kai kurie tiltų ir kranų santvarų elementai, vagonų ašys, lingės, alkūniniai velenai, spyruoklės ir kiti elementai. Pastebėta, kad cikliškai veikiami elementai kartais staigiai suyra, nors įtempimai juose būna mažesni ne tik už stiprumo ribą, bet kai kada net ir už proporcingumo ribą. Staigus suirimas ir lūžyje atsirandanti stambiagrūdė medžiagos sandara detalėse, pagamintose iš plastiškos medžiagos, davė pagrindą manyti, kad medžiaga, veikiamą cikliškai krintančių įtempimų, „nuvargsta“ ir, iš plastiškos virsdama trapia, suyra. Todėl staigus medžiagos suirimo reiškinys buvo pavadintas *medžiagos nuovargiu*. Dabar nustatyta, kad medžiagos struktūra, veikiant cikliškai krintantiems įtempimams, nekinta, tačiau terminas *nuovargis* liko, nes yra trumpas ir plačiai paplitęs. Šiuo metu nuovargiu vadinamas laipsniškas medžiagos pažeidimų kaupimosi procesas nuo pirmųjų įtrūkimų iki suirimo, veikiant cikliškai kintantiems įtempimams (17.1 pav.).



17.1 pav.

### 17.2. Ciklinė apkrova

■ Ciklinė apkrova yra periodiškai kintanti kartotinė kintamoji apkrova (žr. 2.5 poskyrį), t. y. kvazistatinė apkrova, kurios didumas, krypttis ir (arba) pridėties taško koordinatės kinta periodiškai. Visuma nuosekliai kintančių įtempimų per vieną jų kitimo periodą vadinama įtempimo ciklu. Šis ciklas apibūdinamas trimis rodikliais (17.2 pav.):

a) asimetrijos koeficientu:

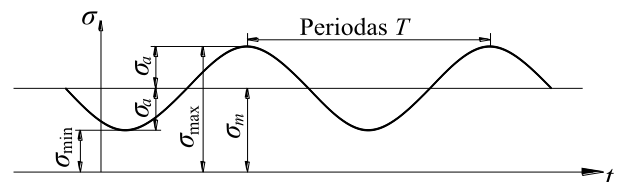
$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}, \quad (17.1)$$

b) vidutiniu įtempimu:

$$\sigma_m = \frac{(\sigma_{\max} + \sigma_{\min})}{2}, \quad (17.2)$$

c) amplitude:

$$\sigma_m = \frac{(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})}{2}, \quad (17.3)$$



17.2 pav.

$\sigma_{\min}$  – mažiausia ciklo įtempimų algebrinė reikšmė;  $\sigma_{\max}$  – didžiausia ciklo įtempimų algebrinė reikšmė.

Čia apibūdinome normalinio įtempimo ciklą, analogiškai apibūdinamas ir tangentinio įtempimo ciklas.

### 17.3. Patvarumo riba

■ Bandymais nustatyta, kad ne visi cikliškai kintantys įtempimai sukelia nuovargio suirimą. Jis gali įvykti tik tuo atveju, kai kintantys įtempimai kuriame nors detalės taške viršija tam tikrą kritinę reikšmę, vadinamą patvarumo riba. Patvarumo riba yra didžiausias ciklo įtempimas, kuriam veikiant bandinys nesuyra dėl nuovargio po bet kurio skaičiaus ciklų. Patvarumo riba žymima simboliu  $\sigma_r$ , čia  $r$  – ciklo asimetrijos koeficientas.

■ Lengviausia patvarumo ribą nustatyti tuomet, kai įtempimų ciklas yra simetrinis (17.3 pav.). Be to, jis kartu yra ir pavojingiausias: toks ciklas greičiausiai (per mažiausią skaičių ciklų) suardo detalę. Simetrinio įtempimo ciklo asimetrijos koeficientas  $r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = -1$ ,

vidutinis įtempimas  $\sigma_m = \frac{(\sigma_{\max} + \sigma_{\min})}{2} = 0$ , amplitudė

$$\sigma_a = \frac{(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})}{2} = \sigma_{\max}.$$

Nustatant patvarumo ribą atliekamas eksperimentas (17.4 pav.), kurio rezultatais remiantis sudaroma nuovargio arba Vėlerio kreivė (17.5 pav.). Ši kreivė parodo ryšį tarp maksimalių ciklo įtempimų ir ciklų skaičiaus, kurį gali atlaikyti varginamas bandinys.

17.1 tekstas ✖ ✖ ✖

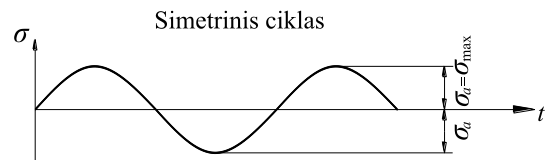
Ciklų skaičius, iki kurio atliekamas bandymas, vadinamas bandymo baze. Bandant plieninius bandinius, nustatyta, kad tuomet, kai bandinys nesuyra po  $10^7$  apkrovimo ciklų, jis nesuyra ir ilgiau varginamas. Spalvotiesiems metalams ir grūdintiesiems stipriesiems plienams nepavyksta nustatyti tokio skaičiaus ciklų, po kurio būtų galima teigti, kad bandinys jau nebesuirs. Tokiais atvejais bandymų bazė padidinama iki  $10^8$  ciklų.

■ Eksperimentais nustatyti patvarumo ribą yra sudėtinga; tokiai operacijai reikia daug darbo. Todėl patvarumo riba empirinėmis formulėmis susiejama su kitais medžiagos mechaniniais rodikliais. Pavyzdžiui, plieno patvarumo riba tempiant  $\sigma_{-1} \cong 0,28\sigma_u$ , lankstant  $\sigma_{-1} \cong 0,40\sigma_u$ , sukant  $\tau_{-1} \cong 0,22\sigma_u$ .

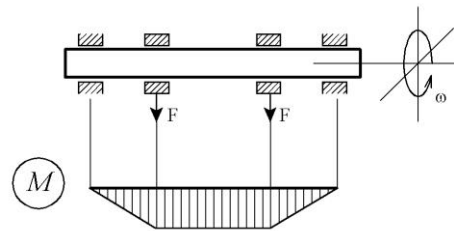
### 17.4. Ribinių amplitudžių diagrama

■ Bandymais nustatyta, kad patvarumo riba, esant asimetriniam ciklui, yra didesnė už patvarumo ribą, esant simetriniam ciklui, ir priklauso nuo ciklo asimetrijos koeficiento  $r$ . Asimetriniais ciklais paprastai bandoma specialiomis mašinomis – hidropulsatoriais bandinį tempiant ir gniuždant arba sukant. Kartais naudojami ir paprastesni prietaisai, pavyzdžiui, prie simetriniu ciklu bandomo bandinio pritvirtinama spyruoklė, sukianti pastovų tempimo įtempimą (bandymo metu prie šio įtempimo prisideda lenkimo įtempimas, kintantis pagal simetrinį ciklą).

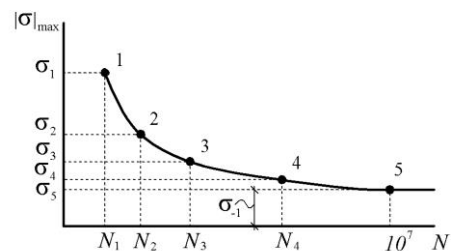
Įvertinus papildomą parametą (ciklo asimetrijos koeficientą) patvarumo ribos nustatymo eksperimentas pasidaro sudėtingesnis, nes reikia bandyti gerokai daugiau vienodų bandinių. Šie bandiniai suskirstomi į grupes, bandomas esant vis kitokiam vidutiniam įtempimui  $\sigma_m$  (kartu ir kitokiam asimetrijos koeficientui).



17.3 pav.



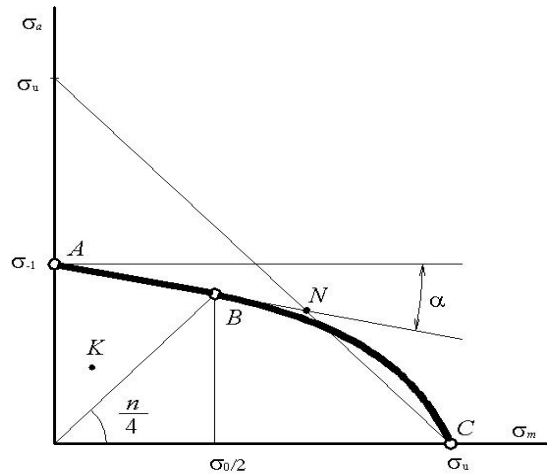
17.4 pav.



17.5 pav.



Kiekvienos bandinių grupės ribinė amplitudė  $\sigma_a$  nustatoma pagal bazinį ciklą skaičių – panašiai kaip ir simetriniam ciklui (gaunama nuovargio kreivė, panaši į pateiktą 17.5 pav., bet, žinoma, jos reikšmės yra kitokios, t. y. priklausančios nuo pasirinkto vidutinio įtempimo  $\sigma_m$ ). Ši reikšmė atidedama plokštumoje  $\sigma_m \sigma_a$  (17.6 pav.). Išbandžius antrosios grupės bandinius, gaunamas antrasis plokštumos taškas ir t. t. Išbandžius keletą bandinių grupių ir gavus pakankamai daug taškų, per juos brėžiama kreivė, kuri vadinama ribinių amplitudžių diagrama (žr. 17.6 pav.). Prisiminkime, kad  $\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a$ , taigi kreivė vaizduoja ribinius įtempimus, veikiant asimetriniam ciklui, t. y. apibrėžia leistinųjų įtempimų ciklų sritį. Tarkime, reikia ištirti bandinio stiprumą veikiant ciklinei apkrovai, kurios ciklas išreiškiamas žinomomis  $\sigma_m$  ir  $\sigma_a$  reikšmėmis. Pažymėjus šį ciklą plokštumoje  $\sigma_m \sigma_a$  tašku  $K$ , galima spręsti apie bandinio stiprumą. Jeigu taškas  $K$  yra kreive apribotoje srityje, tai bandinys atlaikys neribotą skaičių ciklų arba nesuirs iki bazinio ciklų skaičiaus. Jeigu taškas  $K$  yra už kreive apribotos srities, tai bandinys suirs, paveiktas mažesnio ciklų skaičiaus.



17.6 pav.

■ Sudaryti ribinių amplitudžių diagramą yra gana sunku, todėl ji schematizuojama (žr. 17.6 pav.). Diagramoje taškas  $A$  atitinka patvarumo ribą  $\sigma_{-1}$ , veikiant simetriniam ciklui ( $\sigma_m = 0$ ). Taškas  $C$  atitinka stacionarinį apkrovimą ( $\sigma_a = 0$ ). Traপিoms medžiagoms tai yra stiprumo riba ( $\sigma_m = \sigma_u$ ). Viršutinė diagramos dalis aproksimuojama tiese. Norint ją nubrėžti reikia žinoti arba simetrinio ciklo patvarumo ribą  $\sigma_{-1}$  ir pulsuojančiojo ciklo ( $\sigma_m = \sigma_a$ ) patvarumo ribą  $\sigma_0$  (17.6 pav. ji pažymėta raide  $B$ ), arba simetrinio ciklo patvarumo ribą  $\sigma_{-1}$  ir tiesės krypties koeficientą  $\psi_\sigma = \operatorname{tg} \alpha$  (eksperimentiškai nustatyta, kad anglinių plienų  $\psi_\sigma \approx 0,1-0,2$ , o legiruotųjų  $\psi_\sigma \approx 0,2-0,3$ ; sukimo bandymais rastos krypties koeficiento  $\psi_\tau$  reikšmės yra daug mažesnės ir tiems patiems plienams lygios atitinkamai  $0,05-0,1$  ir  $0,1-0,15$ ). Dešinioji ribinių amplitudžių diagramos dalis aproksimuojama tiese, einančia per tašką  $C$  ir sudarančia su koordinačių  $\sigma_m$  ir  $\sigma_a$  ašimis  $\frac{\pi}{4}$  kampus:  $\sigma_m + \sigma_a = \sigma_{\max} = \sigma_u$ . Šios tiesės prasmė taip pat aiški: didžiausias ciklo įtempimas negali viršyti stiprumo ribos.

Taigi ribinių amplitudžių diagrama pakeičiama dviem tiesėmis  $AN$  ir  $NC$ .

### 17.5. Įvairių veiksnių įtaka patvarumo ribos didumui

■ Patvarumo riba  $\sigma_{-1}$  nustatoma, ribinių amplitudžių diagrama sudaroma bandant standartinius bandinius. Tačiau konstrukcijos elementas ar mašinos detalė dažnai labai skiriasi nuo standartinio bandinio savo forma, matmenimis, paviršiaus švarumu ir kitais požymiais. Todėl kai skaičiavimu tikrinamas konstrukcinio elemento patvarumas, eksperimentiškai nustatyta patvarumo riba koreguojama.

■ Įtempimų koncentracijos įtaka išreiškiama efektyviuoju įtempimų koncentracijos koeficientu:

$$k_1 = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1,k}}, \quad (17.4)$$

$\sigma_{-1,k}$  – bandinio, turinčio koncentracijos židinių, patvarumo riba;  $\sigma_{-1}$  – tokio paties bandinio be koncentracijos židinių patvarumo riba.

Tipiškiems ir dažniausiai pasitaikantiems įtempimų koncentracijos atvejams ir pagrindinėms medžiagoms yra sudarytos lentelės ir grafikai efektyviajam koncentracijos koeficientui nustatyti. Jie pateikiami atitinkamuose žinyuose. Kai nėra eksperimentiškai nustatyto efektyviojo koncentracijos koeficiento, jo reikšmei nustatyti naudojama empirinė formulė, susiejanti jį su teoriniu įtempimų koncentracijos koeficientu  $\alpha$  (pvz., normaliniams įtempimams  $\alpha_\sigma = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{nom}}}$ ):

$$k_1 = 1 + q(\alpha_\sigma - 1), \quad (17.5)$$

$q$  – medžiagos jautrumo vietiniams įtempimams koeficientas (jis priklauso nuo medžiagos savybių ir pateikiamas lentelėse, atsižvelgiant į medžiagos stiprumo ribą  $\sigma_u$  ir teorinį įtempimų koncentracijos koeficientą  $\alpha_\sigma$ ).

*Pastaba.* Apie įtempimų koncentraciją kalbėta 5.7 poskyryje.

■ Varginant detalę, plyšiai paprastai pradeda plisti nuo detalės paviršiaus. Todėl detalės paviršiaus apdirbimo kokybė turi didelės įtakos jos stiprumui. Kiekybiškai tai įvertinama paviršiaus kokybės koeficientu:

$$k_2 = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1,d}}, \quad (17.6)$$

$\sigma_{-1}$  – gerai nupoliruotų bandinių patvarumo riba;  $\sigma_{-1,d}$  – tiriamos detalės patvarumo riba.

■ Eksperimentais nustatyta, kad didinant detalės matmenis patvarumo riba mažėja. Toks patvarumo ribos sumažėjimas kiekybiškai įvertinamas mastelio koeficientu:

$$k_3 = \frac{\sigma_{-1,d}}{\sigma_{-1}}, \quad (17.7)$$

$\sigma_{-1}$  – standartinio 7,5 mm skersmens bandinio patvarumo riba;  $\sigma_{-1,d}$  – tiriamos detalės patvarumo riba.

■ Suminė šių trijų veiksnių įtaka detalės stiprumui įvertinama detalės efektyviuoju įtempimų koncentracijos koeficientu.

$$k_{d,\sigma} = \frac{k_1}{k_2 \cdot k_3}. \quad (17.8)$$

Detalės efektyviojo įtempimų koncentracijos koeficiento nustatymo algoritmas buvo aiškinamas tariant, kad tiriamą detalę yra tempiama arba gniuždoma, arba lankstoma. Analogiškai šis koeficientas nustatomas, kai detalė yra sukama. Tuomet jis žymimas simboliu  $k_{d,\tau}$ .

## 17.6. Varginamų detalių skaičiavimas

■ Patvarumo (arba ciklinio stiprumo) sąlyga:

$$n_r \geq n_{\text{adm}}, \quad (17.9)$$

$n_r$  – faktinis atsargos koeficientas;  $n_{\text{adm}}$  – normomis nustatytas leistinasis atsargos koeficientas.

■ Išsiaiškinsime, kaip nustatomas faktinis atsargos koeficientas.

Prisiminkime, kad ribinių amplitudžių diagrama yra aproksimuota dviem tiesėmis (17.7 pav.). Tiesė  $NC$  dabar mūsų nedomina, nes ji išreiškia sąlygą, kad didžiausi ciklo įtempimai neturi viršyti stiprumo ar takumo ribos:

$$|\sigma|_{\max} = \sigma_m + \sigma_a \leq \sigma_u(\sigma_y). \quad (17.10)$$

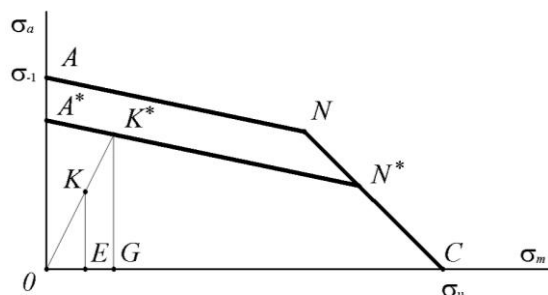
Ši sąlyga tikrinama visuomet, nes konstruktorius, parinkdamas detalės matmenis, pirmiausia turi garantuoti, kad didžiausi įtempimai neviršytų atitinkamo ribinio įtempimo, bei nustatyti reikiamą atsargą, ir tik tuomet, jeigu reikia, patikrinti stiprumo varginant atsargos koeficientą.

Aptarsime atvejį, kai tiesė, išvesta per tašką  $K$ , žymintį nagrinėjamąjį įtempimų ciklą, ir koordinatių pradžios tašką  $O$ , kerta tiesę  $AN$ . Išreikškime įtempimų ciklo amplitudę per simetrinio įtempimų ciklo patvarumo ribą:

$$\sigma_a = \sigma_{-1} - \psi_\sigma \cdot \sigma_m. \quad (17.11)$$

Užrašykime tą pačią išraišką ne standartiniam bandiniui, o detalei (17.7 pav. detalės įtempimų ciklo amplitudės kitimą rodo tiesė  $A^*N^*$ ):

$$\sigma_a = \frac{1}{k_{\sigma,d}}(\sigma_{-1} - \psi_\sigma \cdot \sigma_m). \quad (17.12)$$



17.7 pav.

Proporcingai didindami nagrinėjamo įtempimų ciklo (taškas  $K$ ) komponentus, pasieksime ribinį būvį (taškas  $K^*$ ). Yra sutarta stiprumo varginant atsargos koeficientu laikyti atkarpų  $OK$  ir  $OK^*$  santykį ( $n_r = \frac{OK^*}{OK}$ ). Jis rodo, kiek varginamos detalės darbo sąlygos yra artimos ribinėms.

Dvejopai išreikškime ribinę nagrinėjamo įtempimų ciklo amplitudę:  $\sigma_{a,\lim} = \frac{1}{k_{\sigma,d}}(\sigma_{-1} - \psi_\sigma \cdot \sigma_{m,\lim})$  ir (iš trikampių  $KOE$  ir  $K^*OG$  panašumo)  $\sigma_{a,\lim} = \sigma_{m,\lim} \frac{\sigma_a}{\sigma_m}$ . Sulyginkime išraiškas ir išreikškime ribinį nagrinėjamo įtempimų ciklo vidutinį įtempimą:  $\sigma_{m,\lim} = \frac{\sigma_{-1}}{k_{\sigma,d} \cdot \sigma_a + \psi_\sigma \cdot \sigma_m} \sigma_m$ . Bet atkarpų  $OK^*$  ir  $OK$  santykis lygus atkarpų  $OG$  ir  $OE$  santykiui, t. y.  $\frac{\sigma_{m,\lim}}{\sigma_m} = n_r$ . Taigi stiprumo varginant atsargos koeficientas

$$n_r = \frac{\sigma_{-1}}{k_{\sigma,d} \cdot \sigma_a + \psi_\sigma \cdot \sigma_m}. \quad (17.13)$$

Jeigu detalė yra veikiamą cikliška kintančių tangentinių įtempimų, stiprumo varginant atsargos koeficiento formulės struktūra išlieka tokia pati, keičiasi tik žymėjimai:

$$n_r = \frac{\tau_{-1}}{k_{\tau,d} \cdot \tau_a + \psi_\tau \cdot \tau_m}. \quad (17.14)$$

■ Ne kartą buvo mėginama sukurti hipotezes apie suirimą varginant esant sudėtingam įtempimų būviui. Visi šie mėginimai buvo grindžiami jau žinomų stiprumo hipotezių (žr. 13 skyrių) apibendrinimu ir pritaikymu cikliška kintantiems įtempimams. Praktikoje dažniausiai sutinkamo dviašio įtempimų būvio atvejui (kai reikia įvertinti ir normalinių, ir tangentinių įtempimų įtaką detalės stiprumui ją varginant) šiuo metu plačiausiai naudojama Hafo ir Polardo empirinė formulė:

$$\frac{1}{n_r^2} = \frac{1}{n_\sigma^2} + \frac{1}{n_\tau^2} \quad (17.15)$$

arba

$$n_r = \frac{n_\sigma \cdot n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}}, \quad (17.16)$$

$n_r$  – ieškoma stiprumo varginant atsarga;  $n_\sigma$  – stiprumo varginant atsarga, kai tangentiniai įtempimai lygūs nuliui;  $n_\tau$  – stiprumo varginant atsarga, kai normaliniai įtempimai lygūs nuliui.

Ši formulė taikoma ne tik sinchroniškai kintant normaliniams ir tangentiniams įtempimams, bet ir tokiems ciklams, kai normalinių ir tangentinių įtempimų didžiausiosios reikšmės gaunamos ne vienu metu.

17.1 pvz.    ✖ ✖ ✖

### Kontroliniai klausimai ir užduotys

17.1. Kas yra kartotinė kintamoji apkrova?

17.2. Kas yra nuovargis?

17.3. Nubraižykite strypo skritulinį skerspjūvį, parodykite plyšio židinį, nuovargio plyšio ir trapijojo lūžio sritis.

17.4. Kas yra ciklinė apkrova?

17.5. Kas yra įtempimų ciklas?

17.6. Išvardinkite įtempimų ciklo rodiklius.

17.7. Kas yra įtempimų ciklo asimetrijos koeficientas? Formulė.

17.8. Kas yra įtempimų ciklo vidutinis įtempimas?

17.9. Kas yra įtempimų ciklo amplitudė? Formulė.

17.10. Nubraižykite įtempimų ciklą, parodykite visus jo rodiklius.

17.11. Nubraižykite simetrinį ciklą, užrašykite pagrindinius jo rodiklius.

17.12. Nubraižykite pulsuojantįjį ciklą, užrašykite pagrindinius jo rodiklius.

17.13. Kokie įtempimų ciklai yra panašūs?

17.14. Kas yra patvarumo riba?

17.15. Nubraižykite nuovargio (Violerio) kreivę.

17.16. Nubraižykite ribinių amplitudžių diagramą, grafiškai parodykite aproksimuotą jos variantą.

17.17. Kokie veiksniai turi įtakos patvarumo ribos didumui?

17.18. Paaiškinkite formulę:

$$k_1 = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1,k}}.$$

17.19. Paaiškinkite formulę:

$$k_2 = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1,d}}.$$

17.20. Paaiškinkite formulę:

$$k_3 = \frac{\sigma_{-1,d}}{\sigma_{-1}}.$$

17.21. Paaiškinkite formulę:

$$k_{\sigma,d} = \frac{k_1}{k_2 \cdot k_3}.$$

17.22. Užrašykite patvarumo (stiprumo varginant) sąlygą.

17.23. Paaiškinkite formulę:

$$\sigma_a = \sigma_{-1} - \psi_\sigma \cdot \sigma_m.$$

17.24. Paaiškinkite formulę:

$$n_r = \frac{\sigma_{-1}}{k_{\sigma,d} \cdot \sigma_a + \psi_\sigma \cdot \sigma_m}.$$

17.25. Paaiškinkite formulę:

$$n_r = \frac{n_\sigma \cdot n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}}.$$

## 18. Tamprių-plastinių strypų deformavimas

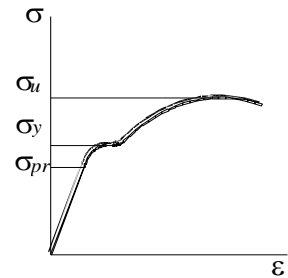
18.1 tekstas ✖✖✖

### 18.1. Tamprių-plastinių medžiagų deformavimo diagramų schematizacija

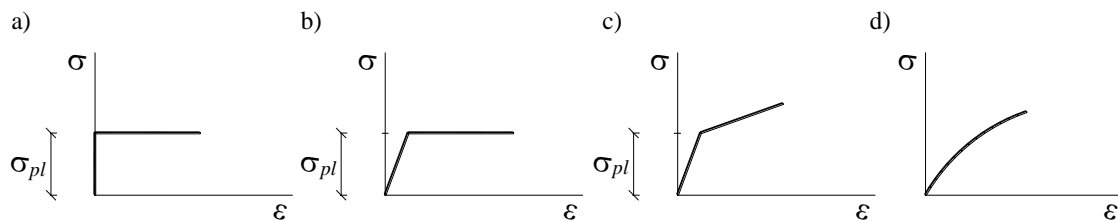
■ Skaičiuojant konstrukcijas, kai naudojamos tamprios, proporcingai besideformuojančios medžiagos modelis, panaudojama tik nedidelė realios medžiagos stiprumo dalis (18.1 pav.). Praplėsti realų konstrukcijų skaičiavimą už proporcingumo ribos trukdo netaisyklinga tempimo diagrama. Todėl ji dažnai pakeičiama pakankamai gerai sutampančiomis laužytomis linijomis arba kreivėmis, kurias galima išreikšti matematinėmis lygtimis (fizinės lygtys). Dažniausiai naudojamos šios schematizuotos medžiagos:

- ideali standi-plastinė medžiaga (18.2a pav.);
- ideali tampri-plastinė medžiaga (18.2b pav.);
- ideali tampri, tiesiškai stiprėjanti medžiaga (18.2c pav.);
- ideali tampri, laipsniškai stiprėjanti medžiaga (18.2d pav.).

*Pastaba.* Toliau naudosime tik idealios tamprios-plastinės medžiagos modelį (jos diagrama yra vadinama Prantlio vardu).



18.1 pav.



18.2 pav.

### 18.2. Idealaus tampraus-plastinio strypo tempimas

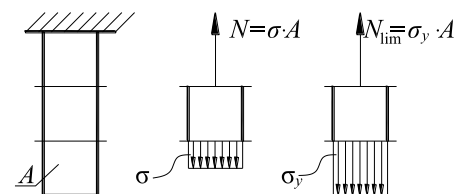
■ Tempimo atveju visame skerspjūvyje įtempimai vienu metu pasiekia takumo ribą (18.3 pav.). Taigi ribinė ašinė jėga

$$N_{\text{lim}} = \sigma_y \cdot A, \quad (18.1)$$

$\sigma_y$  – takumo riba;  $A$  – skerspjūvio plotas.

■ Jeigu konstrukcija statiškai išsprendžiama, tai bent viename strype ašinei jėgai pasiekus ribinį didumą, ji tampa mechanizmu, kuris vadinamas plastinio suirimo mechanizmu (nuo įprasto mechanizmo jis skiriasi tuo, kad jo geometrinis nestabilumas pasireiškia tik tuomet, kai veikia ribinė apkrova).

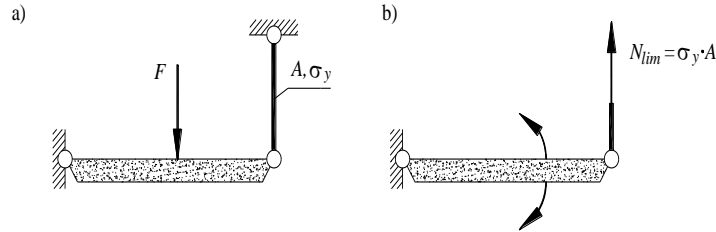
O statiškai neišsprendžiamoje konstrukcijoje viename iš strypų ašinei jėgai pasiekus ribinį didumą, konstrukcija nesuyra, nes apkrovos prieaugį perima kiti strypai. Pavyzdžiui, 18.4a pav. parodyta statiškai išsprendžiama konstrukcija virsta plastinio irimo mechanizmu, vos strypui pradėjus tekėti (18.4b pav.). O pradėjus tekėti vieną kartą statiškai neišsprendžiamos konstrukcijos strypui (18.5a, b pav.), konstrukcija lieka geometriškai stabili. Apkrovos prieaugį perima tampriai besideformuojantis strypas. Konstrukcija virsta plastinio suirimo mechanizmu tik tuomet, kai pradeda tekėti ir antrasis strypas (18.5c pav.). Akivaizdu, kad  $n$  kartų statiškai neišsprendžiama konstrukcija virsta plastinio irimo mechanizmu tuomet, kai teka  $n+1$  strypas. Plastinio irimo mechanizmą atitinkanti ribinė apkrova gaunama užrašius pusiausvyros



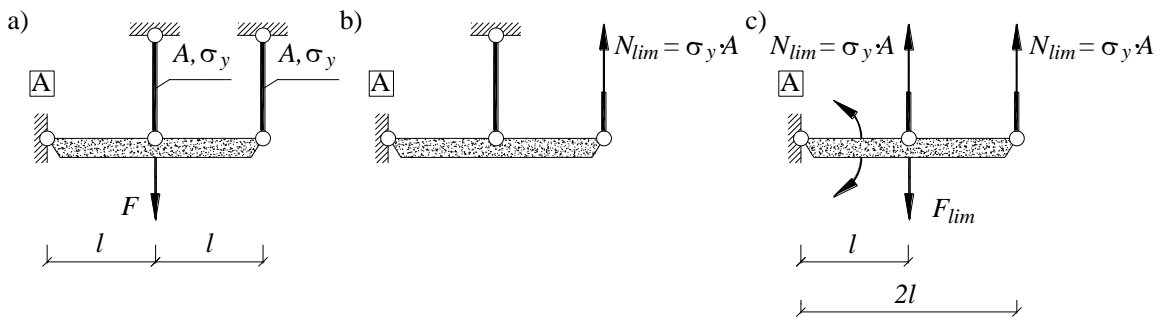
18.3 pav.

lygtį. Pavyzdžiui, 18.5a pav. parodytos konstrukcijos ribinė apkrova gaunama užrašius momentų lygtį atramos A atžvilgiu:  $\sum M_{fa} = 0$ ;  $\sigma_y \cdot A \cdot l + \sigma_y \cdot A \cdot 2l - F_{lim} \cdot l = 0$ ,  $F_{lim} = 3\sigma_y \cdot A$ .

18.1 pvz.    ✱ ✱ ✱



18.4 pav.



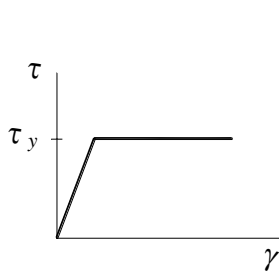
18.5 pav.

### 18.3. Idealaus tampraus-plastinio skritulinio skerspjūvio strypo sukimas

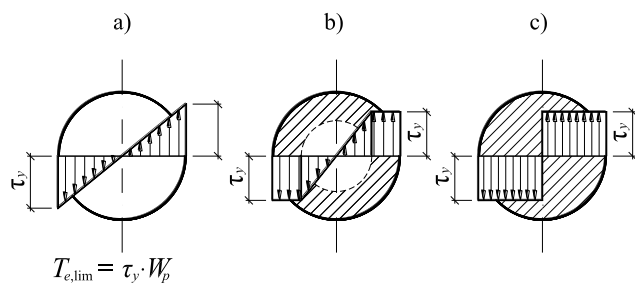
■ Idealaus tampraus-plastinio (18.6 pav.) veleno skrituliniame skerspjūvyje (18.7 pav.) įtempimai pasiskirsto tiesiškai: jie yra didžiausi perimetriniuose taškuose ir lygūs nuliui centre. Todėl plastinės deformacijos pirmiausia atsiranda paviršiniuose veleno sluoksniuose. Didinant apkrovą jos plinta gilyn, skerspjūvio centro link. Vis mažėjant tampriai besideformuojančiai skerspjūvio daliai galiausiai ima tekėti visas veleno skerspjūvis, susidaro vadinamasis plastinis lankstas. Tai idealizuotas mazgas, leidžiantis pasisukti gretimiems veleno skerspjūviams bet kokių kampų vienas kito atžvilgiu. Nuo įprasto lanksto jis skiriasi tuo, kad šis pasisukimas galimas tik tuomet, kai mazge veikia ribinis sukimo momentas. Taigi idealaus tampraus-plastinio skritulinio skerspjūvio veleno deformavimasis gali būti suskirstytas į tris tarpsnius:

a) tampraus deformavimosi tarpsnis (visuose labiausiai apkrauto skerspjūvio taškuose įtempimai mažesni už takumo ribą (18.7a pav.));

b) tampraus-plastinio deformavimosi tarpsnis (labiausiai apkrauto skerspjūvio labiausiai apkrauti taškai teka, likusi skerspjūvio dalis deformuojasi tampriai (18.7b pav.));



18.6 pav.



18.7 pav.

c) plastinio deformavimosi tarpsnis (visuose labiausiai apkrauto skerspjūvio taškuose įtempimai lygūs takumo ribai, skerspjūvis teka (18.7c pav.)).

■ Nustatysime ribinį sukimo momentą (18.8 pav.). Tam išskirkime elementarų plotelį  $dA = \rho \cdot d \cdot d\rho$ . Jame, kaip ir visame skerspjūvyje, plastinio deformavimosi tarpsnyje veikia tangentiniai įtempimai, lygūs takumo ribai:  $\tau = \tau_y$ . Taigi

$$T_{\text{lim}} = \int_A \tau_y \cdot dA \cdot \rho,$$

$$T_{\text{lim}} = \tau_y \int_0^{d/2} \int_0^{2\pi} \rho^2 \cdot d\rho \cdot d = \tau_y \int_0^{d/2} \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} d =$$

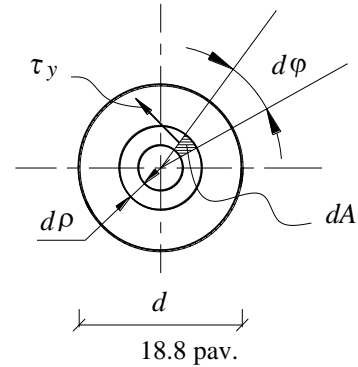
$$\tau_y \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^{d/2} \cdot 2\pi = \tau_y \frac{d^3}{24} 2\pi = \tau_y \frac{\pi \cdot d^3}{12},$$

arba

$$T_{\text{lim}} = \tau_y \cdot W_{p,pl}, \quad (18.2)$$

čia

$$W_{p,pl} = \frac{\pi \cdot d^3}{12}. \quad (18.3)$$



Geometrinis rodiklis  $W_{p,pl}$  vadinamas poliniu plastiniu atsparumo momentu.

■ Sulyginkime ribinį ir tamprųjų ribinį sukimo momentus:  $\beta = \frac{T_{\text{lim}}}{T_{e,\text{lim}}} = \frac{\tau_y \cdot W_{p,pl}}{\tau_y \cdot W_p} = \frac{\pi \cdot d^3 \cdot 16}{12 \cdot \pi \cdot d^3} = \frac{4}{3}$ . Taigi

išnaudojus plastines medžiagos savybes galima  $\frac{4}{3}$  karto padidinti statiškai išsprendžiamo veleno laikomąją galią.

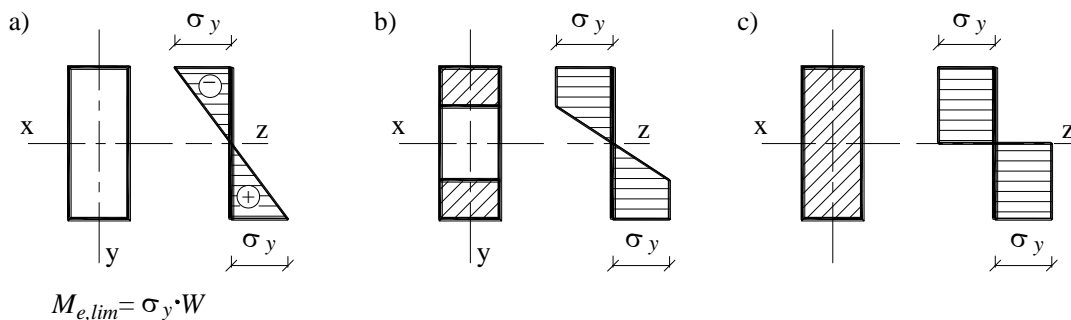
18.2 pvz. ■■■

#### 18.4. Idealaus tamprus-plastinio strypo lenkimas

■ Kaip ir skritulinio skerspjūvio velenuose sijos skerspjūvyje įtempimai pasiskirsto tiesiškai. Taigi sijos skerspjūvio deformavimasis turi tris aiškiai apibrėžtus tarpsnius:

- tamprus deformavimosi tarpsnį (18.9a pav.);
- tamprus-plastinio deformavimosi tarpsnį (18.9b pav.);
- plastinio deformavimosi tarpsnį (18.9c pav.).

■ Nustatysime ribinį lenkimo momentą, t. y. momentą, kuriam veikiant tekės visas sijos skerspjūvis. Nagrinėsime skerspjūvį, turintį tik vieną simetrijos ašį (18.10 pav.). Nagrinėjamoju atveju (tamprus-plastinio deformavimo atveju) kita centrinė ašis ( $x$ ) nesutaps su neutraliąja linija, nes įtempimai, prasidėjus plastinėms deformacijoms, kinta ne tiesiškai. Taigi pirmiausia reikia nustatyti neutraliosios linijos padėtį.



$$M_{e,\text{lim}} = \sigma_y \cdot W$$

18.9 pav.

Ją gausime užrašę sąlygą, kad ašinė jėga sijos skerspjūvyje turi būti lygi nuliui:

$$N = \int_{A_t} \sigma_y \cdot dA - \int_{A_c} \sigma_y \cdot dA = \sigma_y \cdot (A_t - A_c) = 0,$$

$$A_t = A_c. \quad (18.4)$$

$A_t, A_c$  – atitinkamai tempiamos ir gniuždomos skerspjūvio dalių plotai.

Taigi neutralioji linija dalo skerspjūvį į dvi lygiaplotes dalis. Akivaizdu, kad skerspjūviui, simetriškam abiejų savo centrinių ašių atžvilgiu, centrinė ašis ir neutralioji linija sutampa (stačiakampis, skritulys ir pan.).

Žinant neutraliosios linijos padėtį nesunku apskaičiuoti ribinį lenkimo momentą:

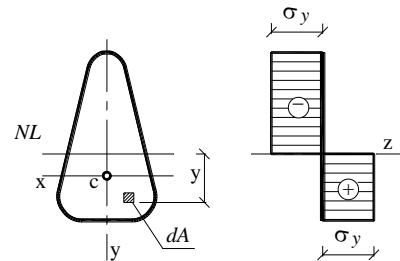
$$M_{\text{lim}} = \int_{A_t} \sigma_y \cdot y \cdot dA + \int_{A_c} \sigma_y \cdot y \cdot dA = \sigma_y \cdot (S_t + S_c),$$

$S_t, S_c$  – tempiamos ir gniuždomos dalių statiniai momentai neutraliosios linijos atžvilgiu. Jų suma vadinama plastiniu atsparumo momentu:

$$W_{pl} = S_t + |S_c|, \quad (18.5)$$

taigi

$$M_{\text{lim}} = \sigma_y \cdot W_{pl}. \quad (18.6)$$



18.10 pav.

■ Nustatysime santykį tarp ribinio ir tampriojo ribinio lenkimo momentų:  $\beta = \frac{M_{\text{lim}}}{M_{e,\text{lim}}} = \frac{\sigma_y \cdot W_{pl}}{\sigma_y \cdot W} = \frac{W_{pl}}{W}$ .

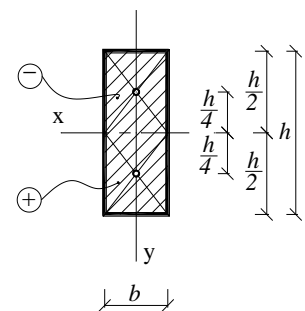
Taigi koeficientas  $\beta$  priklauso nuo skerspjūvio matmenų ir formos. Gaukime jo reikšmę stačiakampiam

skerspjūviui (18.11 pav.):  $W_{pl} = \frac{b \cdot h}{2} \cdot \frac{h}{4} + \left| \frac{b \cdot h}{2} \cdot \left(-\frac{h}{4}\right) \right| = \frac{b \cdot h}{4}$ ,  $\beta = \frac{b \cdot h^2 \cdot 6}{4 \cdot b \cdot h^2} = \frac{3}{2}$ . Taigi išnaudojus plastines

medžiagos savybes galima  $\frac{3}{2}$  karto padidinti stačiakampio skerspjūvio statiskai išsprendžiamos sijos laikomąją galią.

■ Analogiškai gaunami plastiniai atsparumo momentai ir kitokios formos skerspjūviams. Įdomu palyginti jų koeficientus  $\beta$ : skritulio  $\beta = 1,70$ , trikampio  $\beta = 2,36$ , valcuotojo plieno dvitėjo profilio  $\beta = (1,14 - 1,18)$ , idealiojo skerspjūvio (visa medžiaga sutelkta kraštiniuose sluoksniuose)  $\beta = 1$ .

Koeficientas  $\beta$  rodo, kokiai skerspjūvio formai esant geriausiai išnaudojama medžiaga, kai neleidžiama atsirasti plastinėms deformacijoms (kuo  $\beta$  mažesnis, tuo skerspjūvio forma geresnė).



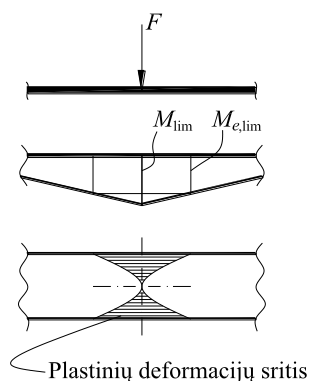
18.11 pav.

18.2 tekstas, 18.3 pav.

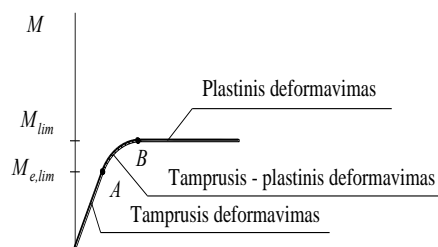
\*\*\*

■ Kai sijos skerspjūvis yra realus, plastinės deformacijos pasklinda tam tikrame sijos ruože (18.12 pav.). Plastinės srities pavidalas priklauso tiek nuo sijos skerspjūvio formos, tiek nuo jos apkrovimo pobūdžio. Pavyzdžiui, 18.12 pav. parodyta stačiakampio skerspjūvio sijos plastinė sritis ties skerspjūviu, kuriame veikia sutelktoji apkrova. Dėl šios priežasties lenkimo momento ir sijos kreivio priklausomybė yra sudaryta ne iš dviejų tiesių ruožų (kaip Prantlio diagrama), o iš dviejų tiesių, sujungtų tampraus-plastinio deformavimosi ruožo (ruožas AB, 18.13 pav.).





18.12 pav.

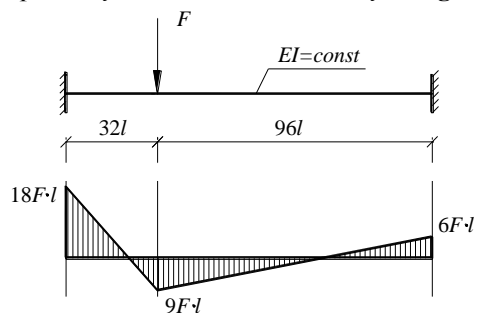


18.13 pav.

### Kontroliniai klausimai ir užduotys

- 18.1. Kodėl schematizuojamos medžiagos deformavimo diagramos?
- 18.2. Nubraižykite idealios standžios-plastinės medžiagos deformavimo diagramą.
- 18.3. Nubraižykite idealios tamprios-plastinės medžiagos deformavimo (Prandtlio) diagramą.
- 18.4. Nubraižykite tamprios, tiesiškai stiprėjančios medžiagos deformavimo diagramą.
- 18.5. Nubraižykite tamprios, laipsniškai stiprėjančios medžiagos deformavimo diagramą.
- 18.6. Kas yra plastinio suirimo mechanizmas?
- 18.7. Kam lygi ribinė ašinė jėga? Formulė.
- 18.8. Nubraižykite vieną kartą statiškai neišsprendžiamą tempiamą arba gniuždomą strypinę konstrukciją, apkrautą jėga  $F$ . Naudodami formalius parametrus  $l, A, E, \sigma_y$  apskaičiuokite ribinį jėgos didumą ( $F_{lim}$ ).
- 18.9. Nubraižykite Prandtlio diagramą tangentiniams įtempimams.
- 18.10. Nubraižykite tris sukamo skritulinio skerspjūvio deformavimosi tarpsnius.
- 18.11. Kam lygus tamprusis ribinis sukimo momentas? Formulė.
- 18.12. Kam lygus plastinis ribinis sukimo momentas? Formulė.
- 18.13. Kam lygus skritulio polinis plastinis atsparumo momentas? Formulė.
- 18.14. Nubraižykite tris sijos stačiakampio skerspjūvio deformavimosi tarpsnius.
- 18.15. Kam lygus tamprusis ribinis lenkimo momentas? Formulė.

- 18.16. Kam lygus plastinis ribinis lenkimo momentas? Formulė.
- 18.17. Kam lygus plastinis atsparumo momentas? Formulė.
- 18.18. Kaip sijos skerspjūvyje susidariusi plastiniam lankstui nustatoma neutraliosios linijos padėtis?
- 18.19. Kam lygus sijos stačiakampio skerspjūvio plastinis atsparumo momentas? Formulė.
- 18.20. Kas yra plastinis lankstas?
- 18.21. Duota idealiai tampri-plastinė sija ir jos lenkimo momentų diagrama. Parodykite plastinių lankstų susidarymo seką sijoje, sudarykite lenkimo momentų, atitinkančių plastinį suirimo mechanizmą, diagramą.



- 18.22. Kada plastinės deformacijos susitelkia viename skerspjūvyje?
- 18.23. Parodykite, kaip pasiskirsto plastinės deformacijos realioje sijoje ties skerspjūviu, kuriame veikia plastinio lanksto atsivėrimą sukėlusio jėga.
- 18.24. Realus skerspjūvio sijoje nuo apkrovos atsivėrė plastinis lankstas. Nubraižykite lenkimo momento ir kreivio ryšio grafiką ( $M = f(\kappa)$ ).

# 19. Irimas

## 19.1. Bendrosios žinios

■ Irimą galima nagrinėti dvejopai: pirmuoju atveju objektas yra konstrukcija, antruoju – medžiaga. Konstrukcijos irimas yra jos perėjimas į būseną, kai ji dėl kokių nors priežasčių neatitinka savo paskirties. Konstrukcijos irimą gali sukelti dideli poslinkiai, negrįžtamas geometrijos pasikeitimas, atraminių dalių išdilimas, svarbaus mazgo lūžimas arba trūkimas ir pan. Tačiau aiškiai matomo ir net palyginti didelio plyšio susidarymas ne visada laikomas konstrukcijos irimu. Medžiagų mechanikos kurse paprastai taip plačiai irimo klausimai nenagrinėjami. Dažniausiai apsiribojama medžiagos, tiksliau, metalo irimu.

Bet koks medžiagos irimas prasideda nuo mikroplyšių. Dažniausiai jie atsiranda ties vienokiais ar kitokiais įtempimų koncentratoriais, nes čia veikiančys didesni už nominalius įtempimai gali viršyti vidines medžiagos dalelių sukibimo jėgas ir atplėšti daleles vieną nuo kitos. Padidėję plyšiai gali būti labai pavojingi, todėl svarbu pažinti jų atsiradimo ir kitimo dėsningumus kietuosiuose kūnuose. Juos tiria kietojo deformuojamo kūno mechanikos šaka – irimo mechanika.

■ Suirimas yra bandinio (konstrukcinio elemento) laikomosios galios praradimas, atsiradęs dėl neriboto plastinio tekėjimo (neriboto formos pokyčio) arba dėl laipsniško pažeidimų kaupimosi ir plyšio plitimo.

Pagal suirimo paviršiaus orientaciją įtempimų atžvilgiu skiriami du suirimo atvejai: plyšimas (suirimo paviršius statmenas maksimaliems normaliniams įtempimams) ir kirpimas (suirimo paviršius lygiagretus su tangentiniais įtempimais).

Pagal fizikinį pobūdį idealios medžiagos suirimas skirstomas į du tipus: plastinį (19.1a pav.) ir trapųjį (19.1b pav.). Realių medžiagų suirimas turi ir plastinio ir trapiojo suirimo bruožų. Sąlygiškai prie plastiškų medžiagų priskiriamos medžiagos, kurių santykinis liekamasis bandinio ilgio pokytis  $\delta \geq 6\%$ . Jei  $\delta \leq 3\%$ , tai medžiaga laikoma trapia.

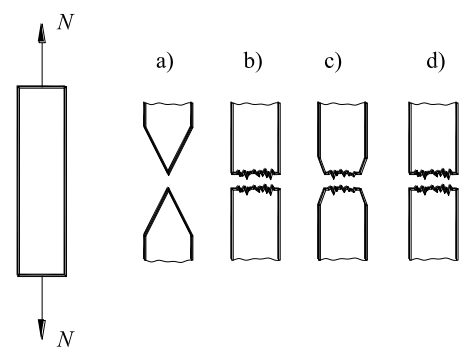
Plastinį realios medžiagos suirimą (trūkį) lydi didelės plastinės deformacijos. Medžiagai plastiškai deformuojantis, apie kietą intarpą susidaro plyšiai, kurie plinta deformacijos kryptimi erdmėje tarp intarpo ir pagrindinio metalo masės. Atsiranda daug mikroskopinių ertmių ir sąsajų. Tam tikru momentu sąsajos dėl šlyties suyra, o mikroskopinės erdvės susijungdamos padidėja iki mikroplyšio. Vėliau mikroplyšiai susijungdami sudaro vieną plyšį ties bandinio centru. Kitoje irimo fazėje likusi medžiagos dalis (arčiau perimetro) yra šliejama ir atotrūkis įvyksta beveik 45 kampu į bandinio ašį. Dėl šių priežasčių plyšimo dalis yra dubens formos (19.1c pav.).

Realių medžiagų trapusis trūkis nuo idealios medžiagos trapiojo trūkio praktiškai nesiskiria (19.1d pav.). Pagrindinis trapiojo trūkio požymis – nėra plastinių deformacijų arba jos labai mažos. Plyšimas vyksta statmenai normaliniams įtempimams.

■ Medžiagos irimo problema labai plati (jai skirti ištisi vadovėliai), todėl dar labiau tenka susiaurinti nagrinėjamų klausimų ratą, nes medžiaga įvairiomis sąlygomis suyra iš esmės skirtingai. Pavyzdžiui, irimas veikiant cikliškai kintantiems įtempimams nagrinėjamas atskirai, nors tai yra tik atskiras bendrųjų medžiagos savybių pasireiškimas. Irimo reiškinį galima nagrinėti ir mėginant įvertinti apkrovimo istoriją arba prieš irimą atsiradusias plastines deformacijas; atskirai reiktų nagrinėti bandinio ir medžiagos irimo ypatumus ir pan. Dėl šių priežasčių šiame konspekte apsiribosime tik trapiojo irimo nagrinėjimu.

## 19.2. Trapusis irimas

■ Trapioju irimu vadinamas spartus savaiminis (nestabilus) plyšio plitimas, net nedidėjant apkrovai. Trapųjį irimą nagrinėjo, kritinio plyšio sąvoką pradėjo vartoti ir jo susidarymo sąlygas nustatė anglų mokslininkas A. Grifitsas. Pagrindinės idėjos buvo paskelbtos XX a. pradžioje. Jos iki šiol yra populiarios ir vadinamos Grifitso irimo teorija.



19.1 pav.

■ Nagrinėsime tempiamą ( $\sigma = \text{const}$ )  $t$  storio ir neriboto ilgio plokštelę, kurioje yra  $2l$  ilgio plyšys, statmenas tempimo kryptčiai (19.2 pav.). Reikia nustatyti kritinį plyšio ilgį, t. y. ilgį, kuriam esant plyšys yra nestabilus, linkęs plėstis, ilgėti.

Tarkime, kad į abi puses nuo plyšio yra elipsės formos sritis, kurioje nėra įtempimų (jie išnyko dėl susidariusio plyšio). Akivaizdu, kad iš srities kartu išnyko ir potencinė deformavimo energija, kuri yra proporcinga įtempimų kvadratui. Prisiminkime, kad visoje plokštelėje  $\sigma = \text{const}$ , taigi plyšys savaime ilgėti gali tik tuo atveju, kai energija, kurios reikia naujam medžiagos paviršiu susidaryti, yra mažesnė už potencinę deformavimo energiją, atpalaiduojamą didėjant elipsės formos sričiai.

■ Suteikime šiems samprotavimams matematinę išraišką.

Elipsinės srities tūris  $V = 2\pi \cdot l^2 \cdot t$ . Plyšiui ilgėjant jis padidėja dydžiu  $\frac{\partial V}{\partial l} = 4\pi \cdot l \cdot t$ .

Prisiminkime (žr. 4 skyrių), kad tūrio vienetui tenkanti potencinė deformavimo energija  $e_p = \frac{\sigma^2}{2E}$ , taigi plyšiui ilgėjant atpalaiduojamos energijos kiekis

$$\frac{\partial E_p}{\partial l} = e_p \frac{\partial V}{\partial l} = \frac{2\pi \cdot \sigma^2 \cdot l \cdot t}{E}. \quad (19.1)$$

Abiejų plyšio paviršių (viršutinio ir apatinio, žr. 19.2 pav.) plotas  $A = 4l \cdot t$ . Plyšiui ilgėjant jo plotas padidėja dydžiu  $\frac{\partial A}{\partial l} = 4t$ . Tokiam plyšio ploto prieaugiui susidaryti reikia energijos (reikia atlikti darbą):

$$\frac{\partial W}{\partial l} = \gamma \frac{\partial A}{\partial l} = 4\gamma \cdot t, \quad (19.2)$$

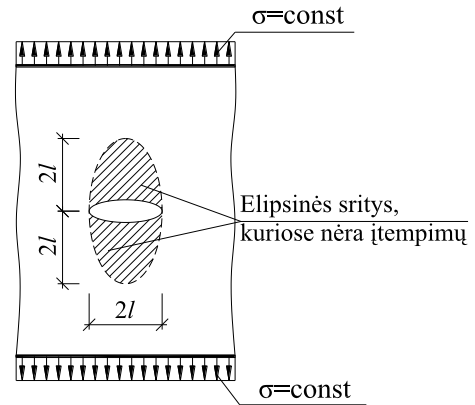
$\gamma$  – energijos kiekis, kurio reikia naujo medžiagos paviršiaus ploto vienetui sudaryti, pavyzdžiui, plieno  $\gamma \approx 1 \frac{\text{J}}{\text{m}^2}$ .

Sulyginkime potencinę deformavimo energiją, kuri atpalaiduojama plečiantis elipsinei sričiai, su darbu, reikalingu naujam plyšio paviršiu sudaryti:  $\frac{2\pi \cdot \sigma^2 \cdot l_{cr} \cdot t}{E} = 4\gamma \cdot t$ . Gavome, kad kritinis plyšio ilgis

$$l_{cr} = \frac{2\gamma \cdot E}{\pi \cdot \sigma^2}. \quad (19.3)$$

Taigi kuo medžiagos mechaninių savybių rodikliai yra geresni ( $\gamma$ ,  $E$ ), tuo kritinis plyšio ilgis yra didesnis, ir kuo veikia didesni įtempimai ( $\sigma$ ), tuo kritinio plyšio ilgis yra mažesnis. Kai yra žinomas plyšio ilgis, galima rasti kritinius įtempimus:

$$\sigma_{cr} = \sqrt{\frac{2\gamma \cdot E}{\pi \cdot l}}. \quad (19.4)$$



19.2 pav.

■ A. Grifitso pateikta plyšio didėjimo schema yra gana tikroviška. Kai kurioms panašioms į stiklą trapioms medžiagoms skaičiavimo rezultatai visiškai atitinka bandymo rezultatus. Tačiau tikrasis šio reiškinio vaizdas yra daug sudėtingesnis. A. Grifitso modelyje medžiagos struktūra laikoma vienalyte. Tačiau tų metalo tūrio dalių, kuriuose yra plyšių, negalima laikyti vienalyte medžiaga. Plyšys plinta metalo grūdelių paviršiais arba ir per pačius grūdelius, jeigu juose pasitaiko vietinių defektų arba dislokacijų. Kartu atsiranda ir plastinė deformacija, kuri taip pat iš esmės keičia plyšio didėjimo sąlygas. Būna ir taip, kad plyšys nustoja plisti, pavyzdžiui, kai jis pakeliui sutinka kito, statmeno jam, plyšio paviršių. Be to, formulėje (19.3) nėra parametro, įvertinančio plyšio viršūnės smailumą, taigi A. Grifitso sąlyga, nusakanti kritinį plyšio ilgį, yra būtina, bet nepakankama.

### **Kontroliniai klausimai ir užduotys**

- |  |   |
|--|---|
| <p>19.1. Nuo ko prasideda medžiagos irimas?</p> <p>19.2. Kas yra irimo mechanika?</p> <p>19.3. Kas yra suirimas?</p> <p>19.4. Parodykite, kaip suvra idealiai plastiška, idealiai trapi, reali plastiška ir reali trapi medžiaga.</p> <p>19.5. Kas yra trapusis irimas?</p> <p>19.6. Kas yra kritinis plyšio ilgis?</p> <p>19.7. Nubraižykite trapiaus plyšio plitimo skaičiuojamąją schemą pagal A. Grifitso.</p> | <p>19.8. Kuo remiantis gaunama kritinio plyšio ilgio formulė?</p> <p>19.9. Paaiškinkite formulę:</p> $l_{cr} = \frac{2\gamma \cdot E}{\pi \cdot \sigma^2}$ <p>19.10. Nurodykite priežastis, dėl kurių A. Grifitso sąlyga yra nepakankama, kad prasidėtų trapiusis medžiagos irimas.</p> |
|--|---|

**Kęstutis Vislavičius**  
**MEDŽIAGŲ MECHANIKA 2**  
**Kontūriniai paskaitų tekstai statybos inžinieriams**

Redagavo V. Tamoševičienė

SL 136. 2005 01 20. 7,5 apsk. leid. 1. Tiražas 300 egz.

Leido Vilniaus Gedimino technikos universiteto leidykla „Technika“, Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius.  
 Spausdino UAB „Sapnų sala“, S. Moniuškos g. 21-10, LT-08121 Vilnius.