Tikimybių teorija

Įvadas

Gerai žinoma matematinių modelių reikšmė, nagrinėjant realiojo pasaulio dėsningumus. Vieni modeliai apbūdina reiškinius (įvykius, dydžius, procesus), kuriuos galima tiksliai prognozuoti, t. y. žinodami eksperimento sąlygas, galime vienareikšmiškai nustatyti eksperimento (bandymo) rezultatą. Tai *determinuoti* reiškiniai. Tokių determinuotų reiškinių matematinių modelių klasikiniai pavyzdžiai yra Euklido geometrija, Niutono mechanika ir t.t. Visus determinuotus reiškinius galima nustatyti taip: realizavus tam tikrą sąlygų kompleksą K (atlikus eksperimentą) įvyksta įvykis A. Tai būtinas įvykis sąlygų komplekso K atžvilgiu.

Tikimybių teorijos objektas yra nedeterminuoti reiškiniai, tokie, kurių negalime vienareikšmiškai nustatyti kol neatliktas eksperimentas. Tai atsitiktiniai reiškiniai. Atliktus reiškinius galime apibūdinti sekančia schema: realizavus sąlygų kompleksą K, įvykis A gali įvykti arba neįvykti. Tokį įvykį vadiname atsitiktiniu įvykiu, o šitokius eksperimentus atsitiktiniais, tikimybiniais arba stochastiniais eksperimentais. Pvz: metame monetą ir žiūrime kaip ji nukris. Čia atliekame eksperimentą arba bandymą. Šiame eksperimente galėjo iškristi herbas- vienas įvykis, bet galėjo iškristi skaičius- tai kitas įvykis. Kadangi niekas iš anksto negali pasakyti kuria puse atsivers moneta, tai sakoma, kad herbo atsivertimas yra atsitiktinis įvykis. Tikimybių teorija dažnai taikoma bandymams, kurie gali būti daug kartų kartojami tomis pačiomis sąlygomis.

Atsitiktinumas kartais yra mūsų nežinojimo rezultatas. Taip yra pavyzdžiui su monetos mėtymu. Tarkime atsivertė herbas. Tai atsitiko dėl daugelio konkrečių priežasčių. Jei jas visas žinotume tai galėtume prieš eksperimentą tiksliai pasakyti ar atsivers herbas ar neatsivers. Tačiau tai neišsprendžiamas uždavinys, todėl tenka atsisakyti šio reiškinio determinavimo ir nagrinėti jį tikimybiniais metodais.

Panagrinėkime klasikinį fizikos pavyzdį : dujų slėgimo priklausomybę nuo temperatūros. Dujų slėgis į indo sieneles yra chaotiško atsitiktinio molekulių judėjimo, jų smūgio rezultatas. Slėgį sukuria atsitiktinumas. Be to atsitiktiniai įvykiai, jų visuma paklūsta tam tikriems dėsningumams. Vadinasi šį reiškinį reikia nagrinėti tikimybiniais metodais. Taip ir daroma statistinėje fizikoje. Aišku, galima ir determinuotu būdu kurti šio reiškinio matematinį modelį: dujų molekulių judėjimą aprašyti diferencialinių lygčių sistema. Tačiau kai molekulių daug, tai gauname milžinišką antros eilės diferencialinių lygčių sistemą. Tokios sistemos praktiškai neįmanoma išspręsti. O jei pavyktų, tai turėtume atsakymus apie pavienių molekulių judėjimą, o ne apie jų sumarinį elgesį: dujų slėgį. Taigi, čia deterministinio kelio reikia atsisakyti. Tikimybinis modelis paprastesnis ir pranašesnis.

Beveik visose žmogaus kūrybos srityse yra situacijų, kada eksperimentus galima atlikti daug kartų nepasikeitus sąlygoms. Tokie eksperimentai vadinami masiniais. Abstraktieji tikimybiniai modeliai praktikoje interpretuojami masinių atsitiktinių reiškinių dėsningumais. Pvz.: mėtome simetrišką monetą. Jei metimų nedaug, tai dėsningumų nėra. Tačiau, kai eksperimentų skaičius, didelis pastebimi įdomūs dėsningumai:

Tarkime n kartų metame monetą. Herbas atsivers n_h kartų. Pasirodo herbo atsivertimo santykinis dažnis n_h/n, kai eksperimentų skaičius n didelis, yra artimas ½. Tai gana bendro pobūdžio reiškinys: įvykio pasirodymo santykinis dažnis didelėje eksperimentų serijoje stabilizuojasi ir yra artimas tam tikram skaičiui p, kuris yra iš intervalo 0, 1; $p \in [0,1]$. Toks santykinių dažnių stabilumas patikrintas eksperimentiškai. Tai objektyvus gamtos dėsnis, kuris yra tikimybių teorijos praktinio taikymo pagrindas.

Tikimybių teorijos sąvokas pradėjo formuoti XVI a. nagrinėjant azartinių lošimų klausimus. XVII a. pagarsėja prancūzų filosofas literatas Š. Merė (1607-1648). Kalbama, kad jis siekė praturtėti lošdamas kauliukais. Tuo tikslu sugalvodavo įvairių sudėtingesnių lošimo taisyklių. Pvz: kauliukas metamas keturis kartus. Jei bent vieną kartą pasirodo 6, laimi Merė. Jei 6 neiškrenta laimi priešininkas. Vėliau išmoksime apskaičiuoti šį žaidimą. Kitas pvz: kokia akučių suma gaunama dažniau: metant iškart tris kauliukus: 11 ar 12? Šie uždaviniai liko istorijoje nes Merė susirašinėjo su B. Paskaliu, kuris jau mokėjo tokius uždavinius spręsti. Visuomenės ydos- azartiniai lošimai- gal ir nėra rimtas užsiėmimas, tačiau jis iškėlė uždavinius, kurie tuo metu dar nebuvo išspręsti egzistavusiuose matematinio modelio rėmuose.

Jau XVII a. pb. tikimybių teorija pasitelkiama draudžiant laivus nuo nelaimių. Buvo apskaičiuojama tikimybė, kad laivas grįš į uostą nepatyręs nelaimių. Tokie skaičiavimai padėdavo nustatyti kokią draudimo sumą turi mokėti laivo savininkas, kad įvykus nelaimei galima būtų gauti norimą kompensaciją.

Eilių teorija. Daugelis iš mūsų negali apsieiti be parduotuvių, be poliklinikos ar kirpyklos. Kyla klausimas: kaip bus tenkinami mūsų poreikiai, jei yra įrengta n aptarnavimo punktų. Atrodytų, kad klausimas beviltiškas: nerealu tikėti sužinoti, kuriais laiko momentais ateis kiekvienas lankytojas ir kiek laiko prireiks jam aptarnauti. Tačiau pasirodo, kad nustačius lankytojų srauto intensyvumą ir vidutinį aptarnavimo laiką, galima gan patikimai sužinoti ar įstaigoje kaupsis eilė, ar ji bus be darbo. Juk per didelis aptarnavimo vietų skaičius taip pat nuostolingas. Šie visi pavyzdžiai toli gražu neatspindi visų tikimybių teorijos taikymo sričių. Norint plačiau suvokti šios matematikos šakos galimybes, reikia susipažinti su tikimybių teorijos sąvokomis ir teiginiais.

Pirmieji naujos teorijos idėjų, sąvokų kūrėjai, gyvenę XVII a. buvo Ch. Hinigensas, B. Paskalis ir P. Ferma. Tikimybių teorijos formavimuisi ir tolesnei raidai, milžinišką įtaką turėjo J. Bernulio darbai. Jis pirmasis įrodė vieną svarbiausių tikimybių teorijos teoremų, vadinamąjį didžiųjų skaičių dėsnį (1713m). XVIII ir XIX a. šią teoriją patvirtino svarbiais rezultatais P. Laplasas, K. Gausas, S. Puasonas. XIX a. II pusėje ir XX a. pr. gamtos mokslai, technika, iškėlė rimtas problemas, kurių sprendimas skatino toliau intensyviai plėtoti tikimybių teoriją ir matematinę statistiką. Čia pasireiškė rusų matematikai:

- P. Čebyšovas
- A. Markovas
- A. Liapunovas

1993 m. A. Kolmogorovas sukuria tikimybių teorijos aksiomų sistemą. Tikimybių teorija tampa griežtu, aksiominiu mokslu.

Senas tradicijas tikimybių teorija turi ir Lietuvoje. Jau XVIIIa. VU buvo dėstoma tikimybių teorija ir matematinė statistika. Ypatingi pasiekimai šioje mokslo srityje įvyko per pastaruosius 30 metų. Čia reiktų paminėti akademiką J. Kubilių, V. Statuliavičių ir B. Grigelionį.

Šiandien ypač plačiai tikimybių teorijos ir matematinės statistikos metodai taikomi statistinėje fizikoje, branduolinėje fizikoje, radijo fizikoje, sistemų automatinio valdymo teorijoje, kokybės ir kontrolės, aptarnavimo ir kitose teorijose. Pastaruoju metu tikimybių teorijos ir matematinės statistikos metodai sėkmingai pritaikomi ekonomikoje, medicinoje, biologijoje. Tikimybių teorija ir matematinė statistika vis labiau skverbiasi į įvairias mokslo ir technikos sritis, spartindama jų progresą.

I skyrius
Tikimybinė erdvė

Atstiktiniai įvykiai

Eksperimentus skirsime į determinuotus ir atsitiktinius. Jeigu, žinodami eksperimento sąlygas, galime vienareikšmiškas nusakyti jo rezultatą, tai eksperimentas vadinamas determinuotu. Tikimybių teorijai būdingi tokie eksperimentai, kuriuos kartodami galime gauti skirtingus rezultatus, priklausančius iš anksto žinomai rezultatų aibei. Tai atsitiktiniai eksperimentai. Reiškiniai, vykstantys realizavus tokius eksperimentus, vadinami atsitiktiniais reiškiniais.

Tikimybių teorija- atsitiktinių reiškinių (įvykių, dydžių, procesų) matematinių modelių sudarymo ir jų analizės teorija. Kiekvienu konkrečiu atveju reikia patikrinti ar teorinis tikimybinis modelis atitinka realų praktinį modelį. Pvz: herbo atsivertimo tikimybė lygi ½. Ši tikimybė grindžiama gana įtikinamai:

a) galimi du įvykiai- atvirto herbas, atvirto skaičius; nė vienam jų negalima teikti pirmenybės, nes moneta simetriška.
b) Daug kartų metant monetą, herbo atsivertimo santykinis dažnis artimas ½.

Pirmoji šio aiškinimo dalis yra atsitiktinio reiškinio matematinio modelio kūrimas, o antroji
modelio atitikimo fiziniam reiškiniui (adekvatiškumo) eksperimentinis tikrinimas. Dabar patikslinsime intuityvią atsitiktinio įvykio sąvoką ir formaliai apibrėšime tikimybes.

Elementarieji įvykiai

Elementarųjį įvykį žymėsime w (dažnai su indeksais). Šių įvykių visumą vadinsime elementariųjų
įvykių erdve ir žymėsime raide Ω. Elementariojo įvykio sąvoka yra pirminė, matematiškai neapibrėžiama. Paaiškinsime pavyzdžiais.

Pavyzdys 1: Metame lošimo kauliuką (eksperimentas). Įvykį- “atvirto k akučių” pažymėsime w_k. Šio eksperimento elementariųjų įvykių erdvė $\Omega=\{ w_k|k=1,6\}$. Tai neskaidomų ir negalinčių pasirodyti kartu įvykių aibė. Bet kuris atsitiktinis įvykis, siejamas su šiuo eksperimentu yra erdvės Ω poaibis. Pvz: įvykį “iškrito lyginis akučių skaičius” išreiškiame elementariaisiais įvykiais $(w_2, w_4, w_6)\subset\Omega$.

Pavyzdys 2: Eksperimentas- radijo lempos ilgaamžiškumo tyrimas. Šiuo atveju veiksmo t elementariųjų įvykių erdvė $\Omega=\{w=t|t\in[0,\infty)\}$.

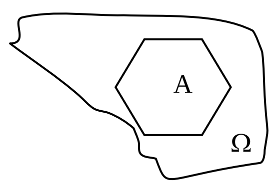
Fizine prasme elementarieji įvykiai neskaidomi ir kartu pasirodyti negalį įvykiai. Eksperimento realizacija- vieno, bet kurio iš Ω elementariojo įvykio pasirodymas. Elementariųjų įvykių erdvė $\Omega=\{w\}$ gali būti baigtinė suskaičiuojama ir dar galingesnė- nesuskaičiuojama.

Atsitiktiniai įvykiai. Veiksmai

Intuityviai įvykį nusakome šitaip: atlikus eksperimentą (bandymą), įvykis gali pasirodyti, bet gali ir nepasirodyti, tai jį vadiname atsitiktiniu. Šiame skyrelyje formalizuosime įvykio sąvoką.

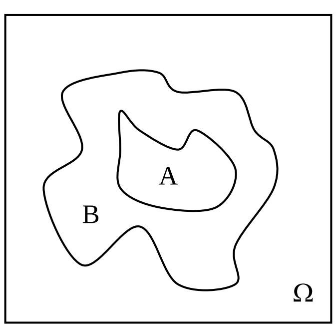
Atsitiktinius įvykius žymėsime raidėmis A, B, C… (dažnai su indeksais). Sakysime, duota elementariųjų įvykių erdvė Ω. Įvykį, kuris visuomet įvyksta, kai įvyksta bet kuris iš erdvės Ω elementariųjų įvykių, vadiname būtinu ir žymime Ω. Įvykį, atitinkantį tuščią elementariųjų įvykių aibę, vadiname negalimu įvykiu ir žymime $\varnothing$. Įvykis, kuris atliekant eksperimentą būtinai įvyksta, vadinamas būtinuoju. Tarkime, kad elementariųjų įvykių erdvė yra diskrečioji (baigtinė arba suskaičiuojama): $\Omega=\{w_k|k=1,n\}$ arba $\Omega=\{ w_k|k=1,\infty\}$

Apibrėžimas 1: Atsitiktiniu įvykiu A vadiname bet kurį elementarųjį įvykių erdvės poaibį, t.y. $A\subset\Omega$.



Bet kurios Ω (nebūtinai diskrečios) erdvės atveju, atsitiktiniais įvykiais laikome ne visus šios erdvės poaibius, bet tik tuos, kuriems galima apibrėžti tikimybę. Kaip sudaroma ši poaibių klasė F (algebra arba sigma algebra) aptarsime po veiksmų su įvykiais. Kadangi atsitiktiniai įvykiai yra aibės Ω poaibiai, todėl algebrinių įvykių veiksmai sutampa su aibių veiksmais. Skiriasi tik terminologija ir interpretacija. Ryšį tarp įvykių su veiksmais iliustruosime Veno diagramomis.

Apibrėžimas 2: Sakykime, kad įvykis A yra įvykio B atskiras atvejis, jei kiekvienas elementarusis įvykis, priklausantis A, priklauso ir B. Rašysime $A\subset B$ arba $B\supset A$. Realiame eksperimente $A\subset B$ reiškia, kad įvykus įvykiui A, įvyktų ir įvykis B.



Pvz: Eksperimentas- metame lošimo kamuoliuką. Įvykis A- “iškrito dvi akutės”, įvykis B- “iškrito lyginis akučių skaičius”. Tuomet $A\subset B$, nes $A=\{w_2\}$, B=$\{ w_2, w_4, w_6\}$. Bet kuriems įvykiams $\varnothing, A, B, C, \Omega$ teisingos šios savybės:

- $\varnothing\subset A\subset\Omega$
- $A\subset A$

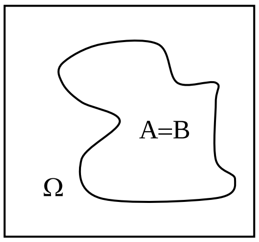
➢ $A \subset B$, $B \subset C$, tai $A \subset C$

Apibrėžimas 3:. Du įvykius vadiname lyginiais, jei juos sudarančios elementariųjų įvykių aibės yra lygios. Rašome: kai $A \subset B$ ir $B \subset A$, tai $A=B$, Savybės

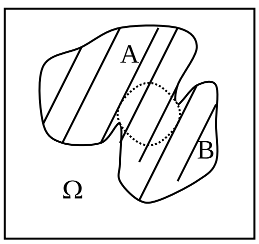
➢ $A=A$

➢ $A=B$, tai $B=A$

➢ $A=B$, $B=C$, tai $A=C$



Apibrėžimas 4: Dviejų įvykių A ir B sąjunga (suma) vadiname įvykį, sudarytą iš elementariųjų įvykių, priklausančiam bent vienam iš įvykių A ir B. Žymime: $A \cup B=\{w|w \in A$, arba $w \in B\}$. Realiame eksperimente įvykis $A \cup B$ reiškia, kad pasirodė bent vienas iš įvykių A ir B. Šį jungimo (sudėties) veiksmą analogiškai galima apibrėžti ir didesniam įvykių skaičiui: $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \cup^n{}_{k=1} A_n$.



Pavyzdys: Metame lošimo kauliukus. Elementariųjų įvykių aibė užrašoma taip: $\Omega=\{w_1, w_2 \ldots w_6\}$.

Sprendimas: Įvykis $\{w_1\}$=”Iškrito viena akutė”. $\{w_2\}$=”Iškrito dvi akutės” ir t.t. Įvykį A=”Iškrito dvi arba trys akutės” galima užrašyti taip: $A=\{ w_2, w_3\}=\{w_2\} \cup \{w_3\}$. Įvykį B=”Iškrito lyginis akučių skaičius arba dvi akutės” galima užrašyti taip: $B=\{ w_2, w_4, w_6\} \cup \{w_2\}=\{w_2\} \cup \{w_4\} \cup \{w_6\}$. Savybės:

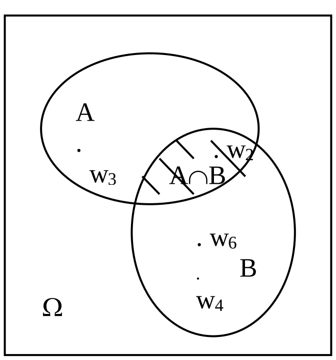
➢ $A \cup B=B \cup A$ (komutatyvumas)

➢ $(A \cup B) \cup C=A \cup (B \cup C)$ (asociatyvumas)

➢ $A \subset B$, tai $A \cup B=B$

Atskiru atveju gauname $\varnothing \cup A=A$, $A \cup \Omega=\Omega$, $A \cup A=A$.

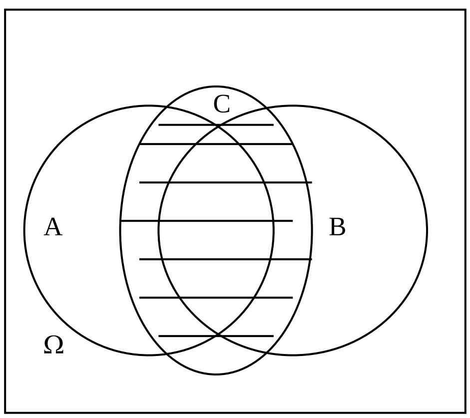
Apibrėžimas 5: Dviejų įvykių A ir B sankirta (sandauga) vadiname įvykį sudarytą iš visų elementariųjų įvykių, priklausančių įvykiams A ir B. Žymėsime $A \cap B=\{w|w \in A$ ir $w \in B\}$. Įvykis $A \cap B$ reiškia, kad eksperimento metu pasirodo ir įvykis A ir įvykis B.



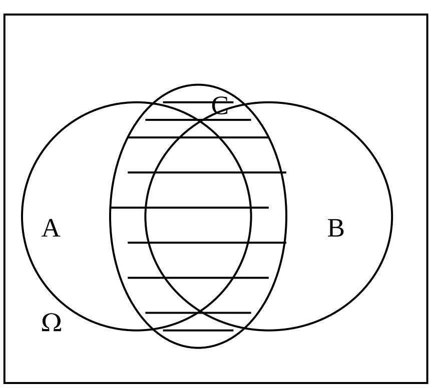
Pavyzdys 1: $A=\{w_2, w_3\}$, $B=\{w_2, w_4, w_6\}$; tad $A\cap B=\{ w_2\}$-“Iškrito dvi akutės”.
Pavyzdys 2: Į elektrinę grandinę nuosekliai sujungti du jungikliai. Kiekvienas jų gali būti įjungtas arba išjungtas. Nagrinėsime įvykius:
A=”Įjungtas 1-as jungiklis”
B=”Įjungtas 2-as jungiklis”
B=”Grandine teka elektros srovė”, tada sujungus tą grandinę $C=A\cap B$.
Savybės:

- $A\cap B=B\cap A$ (komutatyvumas)
- $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ (asociatyvumas)
- $A\subset B$, tai $A\cap B=A$

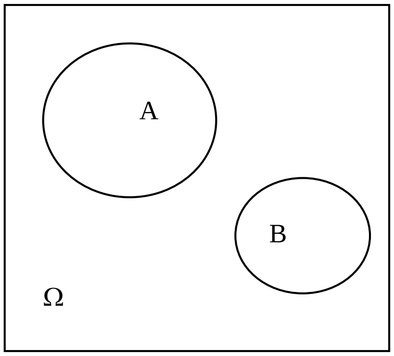
Įvykių sąjungos ir sankirtos veiksmai susieti lygybėmis:
$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,



ir $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

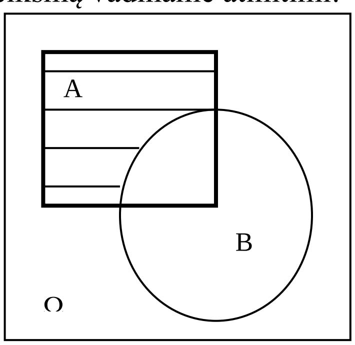


Apibrėžimas 6: Įvykius *A* ir *B* vadiname nesutaikomais, jei jų sankirta yra negalimas įvykis: $A\cap B=\varnothing$. Taigi, įvykiai nesutaikomi, kai eksperimento metu jie negali pasirodyti kartu. Pav:



Piešinyje yra standartinės ir nestandartinės detalės. Įvykis A-“Atsitiktinai paiimta detalė standartinė”. B-“Atsitiktinai paiimta detalė nestandartinė”. Kokie šie įvykiai? Įvykis- “Atsitiktinai paiimta detalė tuo pačiu metu standartinė ir nestandartinė”- negalimas ($\varnothing$), t.y. $A\cap B=\varnothing$.

Apibrėžimas 7: Dviejų įvykių A ir B skirtumu vadiname įvykį, sudarytą iš visų elementariųjų įvykių, priklausančių A, bet nepriklausančių B. Žymėsime: $A\backslash B=\{w|w\in A$, bet $w\notin B\}$. Įvykis $A\backslash B$ reiškia, kad eksperimente įvykis A pasirodo, bet nepasirodo B. Šį veiksmą vadiname atimtimi:

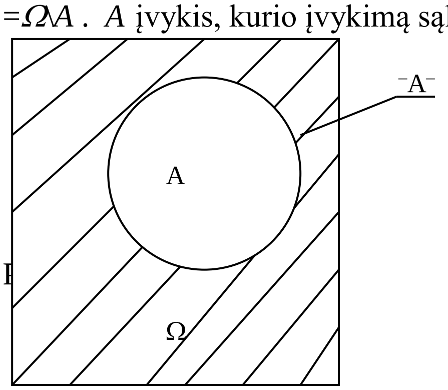


Pavyzdys: Metame du lošimo kauliukus. Įvykis A-“Abiejų kauliukų iškritusių akučių suma yra lyginė”, B-“Abiejų kauliukų viršutinėse sienelėse akučių skaičiai lyginiai”. Tuomet $A\backslash B$-įvykis “Abiejų kauliukų viršutinėse sienelėse akučių skaičiai nelyginiai”.

Savybės:

- $A\backslash B=A\backslash(A\cap B)$
- $A\subset B$, tai $A\backslash B=\varnothing$
- $A\cap B=\varnothing$, tai $A\backslash B=A$

Apibrėžimas 8:. Įvykį $\Omega\backslash A$ vadiname įvykiu, priešingu įvykiui A. Žymėsime $\overline{A}$ $=\Omega\backslash A$. $\overline{A}$ įvykis, kurio įvykimą sąlygoja įvykio A neįvykimas.



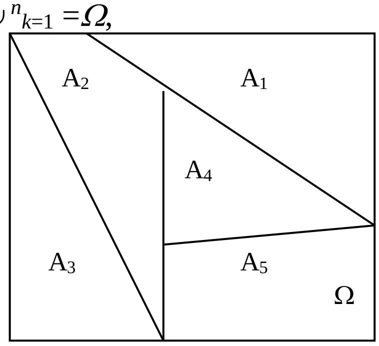
Vieną kartą šauname į taikinį. Įvykis A-“Pataikymas į taikinį”, $\overline{A}$-“Nepataikymas į taikinį”.

Savybės:

1. $\overline{(\bar{A})}=A$
1. $A\cup \overline{A} = \Omega$
2. $A\cap \overline{A} =\varnothing$
4. $\overline{A\cup B}= \bar{A} \cap \bar{B}$
5. $\overline{A\cap B}= \bar{A} \cup \bar{B}$

Apibrėžimas 9: Sakoma, kad įvykiai A_k, k=1,2,…,n sudaro pilnąją įvykių grupę, jei jų sajunga yra būtinas įvykis:

$\cup^{n}_{k=1} =\Omega,$



Kaip matome aibės teorijos simboliai ∪, ∩, \ naudojami ir teorijoje. Tačiau norėdami, kad užrašas būtų lakoniškesnis, tikimybių teorijoje dažnai sankirtos simbolį praleidžiame, t.y. rašome AB vietoje $A\cap B$. Analogiškai kartais rašomo $A+B$, vietoj $A\cup B$ ir A-B, vietoje $A\backslash B$. Pavadinimus: suma ir sąjunga, sandauga ir sankirta vartosime kaip sinonimus.

Tikimybių teorijos aksiomos

Apskritai kalbant, tikimybių teorija konstruojama kaip ir bet kuri kita formali matematinė disciplina. Iš pradžių įvedami tam tikri idealizuoti objektai ir keletas taisyklių nusakančių jų tarpusavio ryšius. Žinoma, reikia, kad įvestosios aksiomos tiktų idealizuotų objektų realiems prototipams.

Tikimybių teorija dažnai grindžiama Kolmogorovo pasiūlyta aksiomatika, kuri remiasi aibių ir mato teorija. Pirmajame etape nusakoma bandymų (eksperimentų) rezultatų aibė, kurią vadiname elementariųjų įvykių erdve, kurią paprastai žymime raide Ω, o elementus ω. Atsitiktinį įvykį apibrėžiame kaip aibę, sudaromą iš elementariųjų įvykių aibės (erdvės) poaibį.

Tikimybių teorijoje dažniausiai nagrinėjamos dvi aibės Ω poaibių (įvykių) sistemos- algebra ir σ algebra (sigma algebra). Netuščią įvykių aibę F vadiname algebra (Bulio algebra), kai ji tenkina šias sąlygas:

1. Elementariųjų įvykių aibė $\Omega \in F$.

2. Jei įvykiai $A \in F$, tai ir $\overline{A} \in F$.
3. Jei $A \in F$, $B \in F$, tai ir $A \cup B \in F$

Algebrą F vadiname σ algebra, kai ji tenkina papildomą sąlygą: jei A_i, $i = 1,2,...$ yra suskaičiuojama F priklausančių aibių sistema, tai $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$.

Pavyzdys. Metant lošiamąjį kauliuką įvykiai $w_1, w_2, ..., w_6$ (w_i - įvykis reiškiantis atvirtusių akučių skaičių lygus *i*) yra elementarieji. Todėl elementariųjų įvykių erdvė $\Omega = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6)$. Šiuo atveju elementariųjų įvykių aibės Ω poaibių sistema (algebra)

$$
\begin{aligned}
F = \{ &\{w_1\},\{w_2,w_3,...,w_6\},\{w_2\},\{w_1,w_3,...,w_6\},...,\{w_6\},\{w_1...w_5\},\{w_1,w_2\},\\
&,\{w_3...w_6\},\{w_1,w_3\},\{w_2,w_4,w_5,w_6\},...,\{w_1,w_6\},\{w_2,...,w_5\},\{w_2,w_3\},\{w_1,w_4,w_5,w_6\},\\
&,\{w_2,w_4\},\{w_1,w_3,w_5,w_6\},...,\{w_2,w_6\},\{w_1,w_3,w_4,w_5\},\{w_3,w_4\},\{w_1,w_2,w_5,w_6\},\\
&\{w_3,w_5,\},\{w_1,w_2,w_4,w_6\},\{w_3,w_6\},\{w_1,w_2,w_4,w_5\},\{w_4,w_5\},\{w_1,w_2,w_3,w_6\},\{w_4,w_6\},\\
&,\{w_1,w_2,w_3,w_5\},\{w_5,w_6\},\{w_1,w_2,w_3,w_4\},\{w_1,w_2,w_3\},\{w_4,w_5,w_6\},,\{w_1,w_2,w_4\},\\
&,\{w_3,w_5,w_6\},\{w_1,w_2,w_5\},\{w_3,w_4,w_6\},\{w_1,w_2,w_6\},\{w_3,w_4,w_5\},\{w_1,w_3,w_4\},\\
&,\{w_2,w_5,w_6\},\{w_1,w_3,w_5\},\{w_2,w_4,w_6\},\{w_1,w_3,w_6\},\{w_2,w_4,w_5\},\{w_1,w_4,w_5\},\{w_2,w_3,w_6\},\\
&,\{w_1,w_4,w_6\},\{w_2,w_3,w_5\},\{w_1,w_5,w_6\},\{w_2,w_3,w_4\},\{\Omega\},\{\varnothing\}\}
\end{aligned}
$$

Nesunku įsitikinti, kad taip sudaryta elementariųjų įvykių aibės Ω poaibių sistema *F* bus algebra, kuri sudaryta iš 64 atsitiktinių įvykių. Įvykių algebroje (σ - algebroje) *F* yra surašyti visi įvykiai, kurių tikimybes tyrėjas gali apskaičiuoti.

Trečiasis pagrindinis tikimybinio modelio elementas yra pati tikimybė. Tikimybių teorijoje kiekvienam algebros *F* elementui *A* (įvykiui) priskiriamas skaičius *P*(*A*), kuris vadinamas atsitiktinio įvykio *A* tikimybe, jei patenkintos šios aksiomos:

1. $P(A) \geq 0, \forall A \in F$ (neneigiamumo),
2. $P(\Omega) = 1$, kai $\Omega \in F$ (būtino įvykio tikimybė lygi 1),
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, jei įvykiai *A* ir *B* nesutaikomi, t.y. $A \cap B = \varnothing$ (adytivumo aksioma).

Visas šias aksiomas įvedė A. Kolmogorovas 1933 m.

Funkcija *P* yra σ - adityvi: jei sekos $A_1, A_2...$ įvykiai poromis nesutaikomi, t.y. $A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j, i, j = 1,2,...,$ tai $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$. Jau kalbėjome, kad įvykiais laikome ne visus elementariųjų įvykių aibės Ω poaibius, nes priešingu atveju susidurtume su matematiniais sunkumais. Pasirodo, paėmus platesnę už σ - algebrą poaibių sistemą, ne visada galime įvesti tikimybę. Jei sistema *F* yra baigtinė, tai iš tikimybės pakanka reikalauti tik baigtinio adityvumo, t.y. kad 3 aksioma galiotų tik baigtiniam įvykių skaičiui.

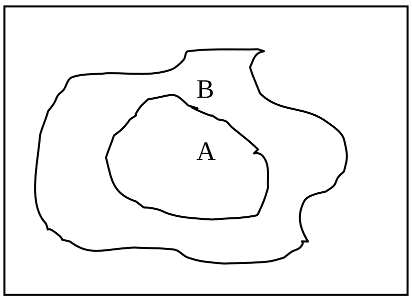
Apibrėžimas: Trejetą (Ω, F, P) vadiname tikimybine erdve. Atitinkama tikimybinė erdvė ir yra atsitiktinio eksperimento matematinis modelis.

Paprasčiausiu tikimybinės erdvės atveju, kai elementariųjų įvykių erdvė $\Omega=\{w_i, i=1,2,...,n\}$ yra baigtinė (sudaryta iš baigtinio skaičiaus elementariųjų įvykių), užtenka taip apibrėžti elementariųjų įvykių $w_i, i=1,2,...,n$ tikimybes $P(w_i)$, kad $0 \le P(w_i) \le 1$, $\sum_{w_i \in A} P(w_i)=1$. Įvykiu *A* vadinamas bet kuris aibės Ω poaibis, o jo tikimybė apibrėžiama lygybe $P(A)=\sum_{w_i \in A} P(w_i)$.

Iš aksiomų gaunamos šios tikimybės savybės:

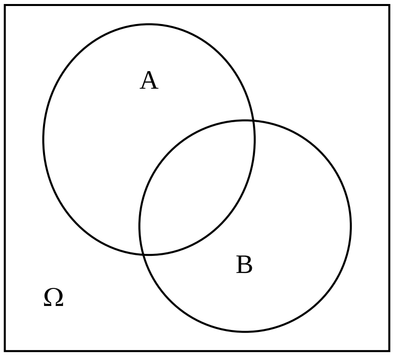
1. Jei $A \subset B$, tai $P(B \backslash A)=P(B)-P(A)$.

Iš tikrųjų $B=A \cup (B \backslash A)$ ir $A \cap (B \backslash A)=\varnothing$.



Pagal trečią aksiomą:

2. $P(A \cup (B \backslash A))=P(A)+P(B \backslash A)$. Iš čia $P(B)=P(A)+P(B \backslash A)$ arba $P(B \backslash A)=P(B)-P(A)$
3. Jei $A \subset B$, tai $P(A) \le P(B)$. Tai seka iš 1-oios savybės: $A \subset C$, tai $P(B \backslash A)=P(B)-P(A) \ge 0$ => $P(B) \ge P(A)$.
4. Bet kokiam atsitiktiniui įvykiui $A \in F$: $0 \le P(A) \le 1$. Pirmiausia pateiksime, kad negalimo įvykio $\varnothing$ tikimybė $P(\varnothing)=0$. Tai seka $\varnothing \cup \Omega$ ir $\varnothing \cap \Omega=\varnothing$. $P(\varnothing \cup \Omega)=P(\varnothing)+P(\Omega)=P(\varnothing)+1=P(\varnothing \cup \Omega)=P(\Omega)=1$. Pagal antrąją aksiomą $P(\Omega)=1$. Kadangi bet koks įvykis $A \in F$ yra elementariųjų įvykių erdvės Ω poaibis, tiksliau $A \subset \Omega$, tai pagal antrąją savybę $P(A) \le P(\Omega)=1$. Be to pagal pirmąją aksiomą $P(A) \ge 0$. Taigi parodėme, kad $0 \le P(A) \le 1$.
5. nes $A \cup \overline{A}=\Omega, ir A \cap \overline{A}=\varnothing$. Tuomet $P(A \cup \overline{A})=P(A)+P(\overline{A})=P(\Omega)=1 => P(\overline{A})=1-P(A)$.
6. Poromis nesutaikomiems įvykiams $P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k)=\sum_{k=1}^{k} P(A_k)$, jei $A_i \cap A_j=\varnothing, \quad i \ne j,$ $i, j=\overline{1,n}.$ Savybės neįrodysime.
7. Bet kokiems atsitiktiniams įvykiams A_k, k=1,2,…,n yra teisinga nelygybė $P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \le \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$.
8. Bet kokiems atsitiktiniams įvykiams A ir B yra teisinga nelygybė $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$. Iš tikrųjų $A \cup B=A \cup (B \backslash (A \cap B))$ ir $A \cap (B \backslash (A \cap B))=\varnothing$,



$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus (A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$ Ši savybė dažnai vadinama tikimybinės sudėties teorema.

Klasikinis tikimybės apibrėžimas.

Sakysime, kad eksperimentas sudaro klasikinę bandymų schemą, jeigu jo elementariųjų įvykių aibė yra baigtinė, o elementarūs įvykiai yra vienodai galimi, vienodai tikimi. Vienodo galimumo, vienodo tikimumo sąvokos yra pirminės, => visi eksperimento įvykiai turi vienodas galimybes, vienodas tikimybes įvykti. Tarkime, kad atlikome eksperimentą, kurio elementariųjų įvykių aibė $\Omega = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$, o iš jos sudaryta įvykių algebra *F*. Elementarūs įvykiai w_{i_1}, w_{i_2}, …, w_{i_m}, $m=1, 2,…,n$, $i_1<i_2<…i_m$, $i_e=1, 2,…,n$, nusakantys įvykį *A*, vadinami jam palankiais įvykiais, o į elementarią įvykių aibę Ω įeinantys elementarūs įvykiais vadinami visais galimais įvykiais.

Iš eksperimento sąlygų (visų galimų įvykių yra n, palankių- m, $1 \le m \le n$), galima daryti prielaidą, kad santykinis įvykio *A* dažnumas svyruos apie skaičių *m/n*. Į tai atsižvelgiama apibrėžiant tikimybę.

Apibrėžimas. Klasikinėje bandymų schemoje įvykių *A* tikimybe vadinamas skaičius, kuris yra lygus palankių įvykių skaičiaus ir visų galimų galimų įvykių skaičiaus santykiui, t.y.

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Toks įvykio *A* tikimybės apibrėžimas vadinamas klasikiniu. Taip apibrėžta tikimybė tenkina Kolmogorovo aksiomas:

1. $P(A) \ge 0,$
2. $P(\Omega) = 1,$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B),$ jei $A \cap B = ø.$

Pastarąją aksiomą gauname iš šių samprotavimų. Įvykis $A \cup B$ yra nesutaikomų įvykių sąjunga. Jei visų galimų įvykių yra *n*, įvykis *A* gali įvykti m_1 kartų, o įvykis *B*- m_2 kartų. Tai įvykis $A \cup B$ (arba įvykis *A* arba įvykis *B*) gali įvykti m_1+m_2 kartus. Tada $P(A \cup B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A) + P(B).$

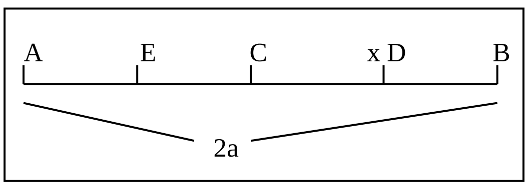
Pavyzdys. Urnoje yra 10 baltų ir 6 juodi kamuoliukai. Atsitiktinai ši urnos imame vieną kamuoliuką. Kokia tikimybė, kad jis baltą kamuoliuką?

Srendimas. Kiekvieno kamuoliuko paėmimą laikome elementariu įvykiu. Tai sudarys vienodai galimų elementariųjų įvykių aibę $\Omega = \{w_1, w_2, ..., w_{16}\}$. Įvykis A- atsitiktinai paiimtas kamuoliukas yra baltas. Jam palankių įvykių skaičius lygus 10. Vadinasi $P(A) = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$.

Geometrinė tikimybė

Pateiksime tikimybės apibrėžimą, kai eksperimento elementariųjų įvykių aibė Ω turi ba galo daug elementų, kurie užpildo baigtinio matavimo geometrinę sritį. Iš pradžių panagrinėkime pora pavyzdžių:

Pavyzdys1. Turime atkarpą *AB,* kurios ilgis *2a*. Tarkime, kad *C* yra tos atkarpos vidurio taškas. Atsitiktinai parenkame atkarpos tašką *x*. Kokia tikimybė, kad taško *x* atstumas nuo taško *C* bus mažesnis už d $(d \leq a)$?



Kol kas uždavinys yra neapibrėžtas. Mes dar nežinome, ką reiškia "atsitiktinai". Įvesime čia vienodo galimumo sąvoką. Tai reiškia, kad pasirinkdami taškus, laikytumės "demokratijos" principų- visi taškai bus "lygiateisiai". Tiksliau kalbant, tai reikš, jog įvykis, kad taškas parankamas ši kurio nors intervalo, esančio atkarpoje *AB*, ir įvykis, kad taškas parenkamas iš kito to paties ilgio intervalo (esančio, suprantama taip pat atkarpoje *AB*), yra vienodai galimi. Todėl natūralu manyti, kad tikimybė pasirinkti tašką iš kurio nors intervalo yra proporcinga jo ilgiui. Vadinasi, jei taškas *D* ir *E* yra nutolę atstumu *d* nuo taško *C*, tai nagrinėjamoji tikimybė lygi atkarpų *DE* ir *AB* ilgių santykiui, t.y. $\frac{2d}{2a} = \frac{d}{a}$.

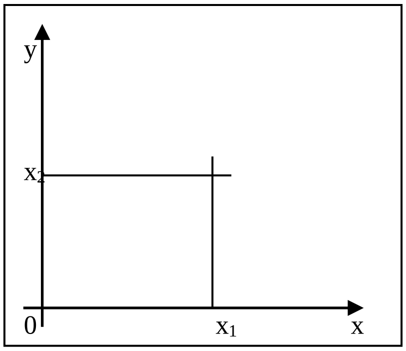
Pavyzdys2

Tarkime, kad ilgio *a* atkarpoje *AB* atsitiktinai yra nepriklausomai vienas nuo kito parenkami du taškai. Kokia tikimybė, kad atstumas tarp jų bus ne didesnis už d $(d \leq a)$?

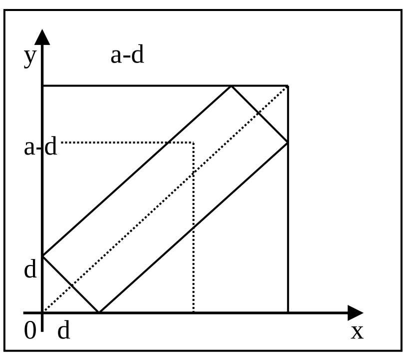
Sprendimas. Naudosimės šitokiu modeliu. Pažymėkime x_1 pirmojo taško, x_2 antrojo taško atstumu nuo *A*.

Imkime stačiakampią koordinačių sistemą. Abscisių ašyje atidėkime x_1, o ordinačių- x_2. Visos galimos taškų (x_1, x_2) padėtys sudarys kvadratą, kurio kraštinė *a*. Taškai, atitinkantys tiriamąjį įvykį, sudarys sritį

$$|x_1 - x_2| \le d,$$
$$-d \le x_1 - x_2 \le d,$$
$$x_2 - d \le x_1 \le x_2 + d.$$



Tarkime, kad šiuo atveju teisingas vienodo galimumo principas. “Atsitiktinai ir nepriklausomai” reikš, kad du įvykiai, kai parenkamas taškas iš dviejų lygiagrečių kvadrato sričių, yra vienodai galimi. Šiuo atveju natūralu teigti, kad tikimybė, jog taškas *(x_1, x_2)* pateks į kurią nors sritį, yra proporcinga tos srities plotui. Vadinasi, ieškomoji tikimybė bus santykis ploto, kurį nuo kvadrato atkerta tiesės $x_2 = x_1 \pm d$, su viso kvadrato plotu: $y = x \pm d$, $\frac{a^2-(a-d)^2}{a^2} = \frac{2ad-d^2}{a^2} = \frac{d}{d}(2-\frac{d}{a})$.



Pateiksime brandesnį geometrinės tikimybės apibrėžimą. Tarkime, jog nagrinėjame atsitiktinį eksperimentą, kurio elementariosios baigtys sudaro sritį Ω s-matėje Euklido (graikų matematika, 365-300) R^s. Tarkime, kad sritis Ω turi Lebego (prancūzų matematika. 1875-1941) matą *m(Ω)*, kai *s=1*, tai bus ilgio, kai *s=2*- plotas, kai *s=3*- tūris ir t.t. Imkime σ - algebros *F* visų aibės Ω poaibių *A*, turinčių Lebego matą *m(A)*. Laikysime, kad galioja vienodo galimumo principas: turint dvi sritis $A_1 \in F$ ir $A_2 \in F$. Kurių tūriai vienodi, o forma ir padėtis srityje Ω gali skirtis, nėra pagrindo manyti, kad parinkti tašką iš vienos tų sričių yra daugiau galimybių, negu iš kitos. Jei ši sąlyga tenkinama, tai įvykio- atsitiktinai parinkti tašką iš srities *A*- tikimybe laikome santykį $\frac{m(A)}{m(\Omega)}$. Šis apibrėžimas nėra griežtas, bet jis gerai derinasi su praktine patirtimi.

Taip apibrėžta tikimybė turi panašias savybes, kaip ir klasikinės tikimybė, Kai $A \in F$, $B \in F$, $A_k \in F$, $k = 1,2,...,$ tai

1. $0 \le P(A) \le 1,$
2. $P(\Omega) = 1,$
3. $P(ø)=0,$
4. $A \subset B,$ tai $P(A) \le P(B),$
5. Jei $A \cap B = ø,$ tai $P(A \cup B) = P(A) + P(B),$
6. $P(\overline{A}) = 1 - P(A),$
7. Jei $A_k \cap A_j = ø,\ (k \ne j)$
8. $P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$

Sąlyginės tikimybės

Dažnai tenka nagrinėti įvykių tikimybes, kai žinoma papildomos sąlygos. Dažnai papildoma sąlyga būna koks nors įvykis *E*. Gauname platesnį sąlygų kompleksą K_1, sudarytą iš sąlygų *K* ir papildomos sąlygos *E*. Įvykio *A* tikimybe patogu natūralu vadinti sąlygine tikimybe su papildoma sąlyga *E*. Tokią tikimybę žymėsime $P(A \mid E)$ arba $P_E(A)$. Skaitysime:"įvykio *A* tikimybė kai yra įvykęs įvykis *E*" arba "įvykio *A* tikimybė su sąlyga *E*. Tada įvykio tikimybes pildomas sąlyga *E*, galėtume vadinti absoliučiomis, arba nesąlyginėmis.

Kaip galima apibrėžti sąlygines tikimybes? Kad būtų aiškiau išnagrinėkime pavyzdį.

Pavyzdys

Tarkime, kad *n* asmenų kolektyve yra *v*>0 vyrų ir *n*-*v* moterų; tarp jų *d* dešiniarankių ir (*n*-*d*) kairiarankių. Tarp vyrų yra v_d dešiniarankių. Iš visų kolektyvo narių atsitiktinai parankamas vienas asmuo (sąlygų kompleksas *K*). Tarkime, kad tinka vienodo galimumo principas. Pažymėkime *V* vyro pasirinkimą, *D*- dešiniarankio. Tikimybė, kad atsitiktinai parinktas asmuo bus dešiniarankis, yra $P(D) = d/n$. Mus domina ne visi asmenys, o bet tik vyrai. Tikimybė pasirinkti dešiniarankį vyrą (sąlyga *V*) bus lygi $P(D \mid V) = \frac{v_d}{v} = \frac{v_d/n}{v/n} = \frac{P(D \cap V)}{P(V)}$. Matome, kad sąlyginė tikimybė *P*(*D*|*V*) išreiškiama dviejų tikimybių santykiu.

Analogišką formulę galima gauti ir bendresniu atveju, kai tinka klasikinis tikimybės apibrėžimas.

Tarkime, kad turime elementariųjų įvykių aibę erdvę Ω, iš *n* vienodai galimų įvykių. Sakykime, įvykį *E* sudaro *k*, $0 < k \le n$ elementariųjų įvykių, o įvykį $A \cap E$ sudaro γ $(0 \le \gamma \le k)$ įvykių. Tada, skaičiuojant įvykio *A* sąlygines tikimybes su sąlyga *E*, visa elementariųjų įvykių erdvė bus sudaryta iš *k* vienodai galimų elementariųjų įvykių, o tarp jų palankių įvykiui *A* bus γ. Vadinasi $P(A \mid E) = \frac{r}{k} = \frac{r/n}{k/n} = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$. Iš čia išplaukia lygybė $P(A \cap E) = P(A \mid E)P(E)$ t.y. tikimybė įvykiams *A* ir *E* įvykti drauge yra lygi įvykio *E* tikimybei, padaugintai iš įvykio *A* tikimybės su sąlyga, kad įvykis *E* yra įvykęs. Šis teiginys kartais vadinamas *tikimybių daugybos teorema*.

Iš šių samprotavimų paaiškėja, kaip reikia įvesti sąlygines tikimybes aksiomatiškai. Tarkime, kad turime tikimybių erdvė (Ω, F, P). Jei *A* ir *E* yra įvykiai, t.y. $A \in F$ ir *P*(*E*)>0, tai įvykio *A* sąlygine tikimybe su sąlyga, kad įvykis *E* yra įvykęs, vadinsime $P(A \mid E) = \dfrac{P(A \cap E)}{P(E)}$. Sąlyginė tikimybė apibrėžiama tik tuo atveju, kai sąlyga *E* tikimybei *P*(*E*)>0. Todėl visur, kalbėdami apie sąlygines tikimybes, turime galvoje, kad sąlygos tikimybė nėra lygi nuliui.

Pavyzdys

Dėžutėje yra 3 balti ir 6 juodi rutuliai, kurie skiriasi tik spalva. Atsitiktinai ištraukiamas vienas rutulys ir nebegražinamas į dėžutę. Po to atsitiktinai traukiamas antras rutulys. Apskaičiuosime tikimybę ištraukti baltą rutulį antruoju traukimu, kai yra žinoma, kad pirmą kartą buvo ištrauktas baltas rutulys.

Sprendimas. Kadangi po pirmojo trukimo dėžėje liko tik 2 balti ir 6 juodi rutuliai, tai ieškomoji tikimybė yra 2/8=1/4. Pažymėkime *A*-“pirmas ištrauktas rutulys yra baltas”, *B*-“antras ištrauktas rutulys yra baltas”. Elementariųjų įvykių aibė sudaryta iš 9*8=72 įvykių (w_1, w_2); čia w_1 yra kurio nors fiksuoto rutulio iš 9 ištraukimas pirmuoju traukimu, w_2 fiksuotas rutulio iš likusių 8 ištraukimas antruoju traukimu. Tarp jų palankių įvykiui $(A \cap B)$ (abu kartus ištraukti balti rutuliai) yra 3*2=6, o palankių įvykiui *A*- 3*8=24. Tad $P(A) = 1/3$, $P(A \cap B) = 1/12$. Iš čia $P(B \mid A) = P(B \cap A)/P(A) = 1/4$; čia $P(A) = 24/72 = 1/3$, $P(A \cap B) = 6/72 = 1/12$.

Panagrinėkime sąlygines tikimybių savybes:

1. $P(A \mid E) \geq 0,$
2. $P(\Omega \mid E) = 1,$
3. Jei A_1 ir A_2 yra nesutaikomi įvykiai, t.y. $A_1 \cap A_2 = \varnothing,$ tai $P(A_1 \cap A_2 \mid E) = P(A_1 \mid E) + P(A_2 \mid E)$.

Kaip matome, sąlyginė tikimybė tenkina tikimybių teorijos aksiomas. Vadinasi (Ω, F, P_E) sudaro tikimybių erdvę. Todėl (kai *E* fiksuotas) sąlyginėms tikimybėms tinko tos pačios formos, kurias įvedėme nesąlyginėms tikimybėms. Iš pavadinimo išplauktų, kad sąlyginė tikimybė įvykiui *E* įvykti, kai *E* yra įvykęs, turi būti lygi 1. Taip ir yra: *P*(*E*|*E*)=1.

Iš sąlyginės tikimybės išplaukia, kad $P(E \mid E) = \dfrac{P(E \cap E)}{P(E)} = \dfrac{P(E)}{P(E)} = 1$. Nagrinėsime tokioms sąlyginių tikimybių savybes.

3(daugybos) teorema. Jei įvykiai $A \in F$ ir $E \in F$, tai a) $P(A \cap E) = P(A \mid E)P(E) = P(E \mid A)P(A)$.

b) jei $n \geq 2$, tai $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_2 \cap A_1)\ldots P(A_n \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$.

Nepriklausomi įvykiai

Nepriklausomumo sąvoka labai svarbi tikimybių teorijoje. Sakykime, kad įvykiai $A \in F$, $B \in F$ ir $P(B) > 0$ (tik. Erdvė (Ω, F, P)). Jei

$$P(A \mid B) = P(A),$$

tai natūralu įvykį A laikyti nepriklausomu nuo įvykio B. Tada iš tikimybių teoremos išplaukia, kad $P(AB) = P(A|B)P(B) = P(A)P(B)$, t.y. $P(AB) = P(A)P(B)$. Dabar iš sąlyginės tikimybės apibrėžimo ir šios lygybės gauname: $P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} = \dfrac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B),$ kai $P(A) > 0.$

Vadinasi, įvykių A ir B nepriklausomumo sąlyga simetrinė: jai A nepriklauso nuo B, tai ir B nepriklauso nuo A.

1.Apibrėžimas. Du įvykius A ir B vadiname nepriklausomais, jei $P(AB) = P(A)P(B)$. Jei taip nėra, įvykius vadiname priklausomais.

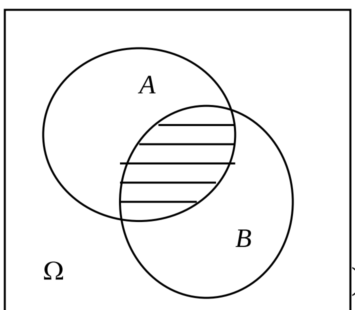
1 pavyzdys. Iš 52 kortų kaladės atsitiktinai traukiame vieną kortą. Įvykiai: A={ištrauktas tūzas}, B={ištraukta pikų korta} nepriklausomi, nes $P(AB) = 1/52,$ $P(A) = 4/52 = 1/13,$ $P(B) = 13/52 = 1/4$ ir $P(AB) = 1/52 = 1/13 \cdot 13/52 = P(A)P(B).$

2 pavyzdys. Du kartus metame simetrišką monetą. Įvykiai H_1={herbas iškrito pirmą kartą} ir H_2={herbas iškrito antrą kartą}yra nepriklausomi, nes $P(H_1H_2)$=1/4=$1/2 \cdot 1/2 = P(\mathrm{H}_1)P(\mathrm{H}_2)$.

1.teorema. Bet koks įvykis $A \in F$ ir būtinas įvykis Ω yra nepriklausomi. Tikrai, nes $P(A\Omega) = P(A) = P(A)P(\Omega)$.

2.teorema. Bet koks įvykis $A \in F$ ir negalimas įvykis $\varnothing$ yra nepriklausomi. Tikrai $P(A\varnothing)=P(\varnothing)=P(A)P(\varnothing)$.

3.*teorema*. Jei įvykiai A ir B nepriklausomi, tai nepriklausomi $\bar{A}$ ir B. $P(B) = P(B(A \cup \bar{A}B)) = P(AB) + P(\bar{A}B) = P(A)P(B) + P(\bar{A}B).$ Iš čia $AB \cap \bar{A}B = \varnothing$ (nesutaikomi).



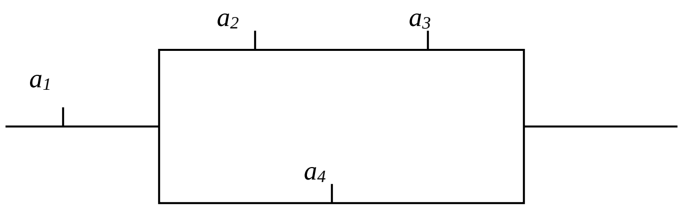
$P(\bar{A}B) = P(B) -$ ... $) = P(B)P(\bar{A}).$

Apibendrinsime nepriklausomumo sąvoką bet kuriam įvykių skaičiui.

2.Apibrėžimas. Sakoma, kad įvykiai $A_1, A_2, ..., A_n$ yra visumoje nepriklausomi, jei $P(A_{j1}, A_{j2}, ..., A_{jm}) = P(A_{j1})P(A_{j2})...(A_{jm}),$ $j_1, j_2, ...j_m = \overline{1,n},$ $m = \overline{2,n}.$ Kai turime du įvykius šis apibrėžimas sutampa su ankstesniuoju. Jei yra trys įvykiai, tai jų nepriklausomumą nustatys keturios savybės:

1. $P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2),$
2. $P(A_1A_3) = P(A_1)P(A_3),$
3. $P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3),$
4. $P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3).$

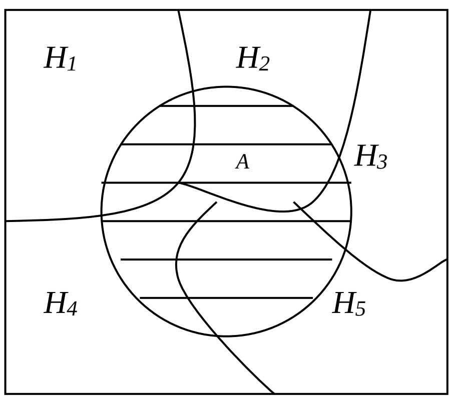
3 pavyzdys. Grandinėje sujungti keturi nepriklausomai vienas nuo kito veikiantys elementai. Jų patikimumai (tikimybės, kad jie veiks t valandų) yra atitinkamai p_1, p_2, p_3, p_4. Koks sistemos patikimumas? Pasižymėkime įvykius: A={sistema veiks t valandų}, A_i={a_i elementas veiks t valandų}.



Tada $A = A_1(A_2A_3 \cup A_4)$. Sistemos patikimumas $P(A) = P(A_1(A_2A_3 \cup A_4))$. Kadangi įvykiai A_i, $i = \overline{1,n}$ yra nepriklausomi ir sutaikomi, tai $P(A) = P(A_1)(P(A_2A_3)) + P(A_4) - P(A_2A_3A_4) = p_1(p_2p_3 + p_4 - p_2p_3p_4$.

Pilnosios tikimybės formulė

Tarkime, kad įvykis A gali įvykti kartu su bent vienu poromis nesutaikomu įvykių seka H_1, H_2,...H_n, kurie sudaro pilnų įvykių grupę $H_iH_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1,n}$. $H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4 \cup H_5 = \Omega$.



Teorema. (pilnosios tikimybės formulė). Jei įvykiai H_1, H_2,...H_n, sudaro pilnąją įvykių grupę, tai bet kokio įvykio A tikimybei $P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A \mid H_k)P(H_k)$. $P(H_j) > 0$, $j = \overline{1,n}$.

Iš sudėties ir daugybos veiksmų distributyvumo išplaukia, kad $A = A\Omega = A(\bigcup_{k=1}^{n} H_k) = \bigcup_{k=1}^{n} AH_k$. Kadangi bet kuriam $k \neq j$, tai $(AH_k)(AH_j) = (AA)(H_kH_j) = A\varnothing = \varnothing$. t.y. kas du nesutaikomi, tai pasirėmę 3-aja aksioma, gauname: $P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(AH_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A \mid H_k)P(H_k)$. Įvykiai H_k, $k=1,2,...,n$ vadinami hipotezėmis!.

Pavyzdys. 15 egzamino bilietų yra po 2 napasikartojančius klausimus. Studentai gali atsakyti tik į 25 klausimus. Egzamino išlaikymui reikia atsakyti į abu bilieto klausimus arba į vieną bilieto klausimą ir į vieną papildomą iš likusių kalusimų. Kokia tikimybė, kad studentai išlaikys egzaminą?

Sprendimas. A={studantas išlaikys egzaminą}, H_1={studantas atsakys į abu bilieto klausimus}, H_2={studantas atsakys į vieną klausimą iš bilieto ir į vieną papildomą iš likusių klausimų}, H_3={studantas neatsakys nei į vieną bilieto klausimą }, H_4={studantas neatsakys į vieną bilieto klausimą ir į papildomą klausimą iš visų likusių klausimų}.

$H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4 = \Omega,$

$P(A) = P(A \mid H_1)P(H_1) + P(A \mid H_2)P(H_2) + P(A \mid H_3)P(H_3) + P(A \mid H_4)P(H_4).$

Kombinatorikos pradmenys

Tegu turime n skirtingų elementų $a_1, a_2,...,a_n$ aibę. Bet kokią sutvarkytą k elementų $(a_{j1},a_{j2},...,a_{jk})$ aibę vadinsime *gretiniu* iš n elementų po k. Čia galimi 2 parinkimo būdai: elementai renkami iš eilės, kiekvieną parinktąjį elementą grąžinant atgal arba renkami negrąžinant atgal. 1-uoju atveju turėsime gretinius su pasikartojimais, 2-uoju – gretinius be pasikartojimo.

1 teiginys: skirtingų gretinių su pasikartojimais iš n elementų po k skaičius yra lygus $B_n^k = n^k$.

2 teiginys: skirtingų gretinių be pasikartojimų iš n elementų po k skaičius yra lygus $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)...1}{(n-k)(n-k-1)} = n(n-1)(n-2)...(n-k-1).$

Pavyzdys. turiu skaičius 1,2,3,4. Kiek bus gretinių be pasikartojimo? $A_4^3 = \frac{4!}{1!} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Kėliniais iš n elementų vadinami tokie junginiai $(a_{j1},a_{j2},...,a_{jn})$, kai į kiekvieną jų įeina visi duotieji elementai ir vienas nuo kito skiriasi tik elementų tvarka (gretiniai iš n elementų po n be pasikartojimų).

3 teiginys: skirtingų kėlinių iš n elementų skaičius yra lygus $P_n=n!=n(n-1)(n-2)...3 \cdot 2 \cdot 1$. Pastaba: $P_n = A_n^n$.

Deriniais iš n elementų po k vadinami tokie junginiai $(a_{j1},a_{j2},...,a_{jk})$, kuriuos sudaro bet kuri duotųjų n elementų dalis, turinti k elementų (elementų tvarka neturi reikšmės).

4 teiginys: skirtingų derinių iš n elementų po k skaičius yra lygus $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$; $A_n^k = k!C_n^k$.

5 teiginys: tegu turime k skirtingų grupių. I-oje grupėje yra n_1 elementų; II-oje grupėje – n_2 elementų; ...; k-toje grupėje – n_k elementų. Tada skirtingų kombinacijų $(a_{j1},a_{j2},...,a_{jk})$, į kurių kiekvieną įeina po 1 elementą iš kiekvienos duotosios grupės skaičius $N=n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$.

Niutono binomas: $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + ... + C_n^r a^{n-r} b^r + ... + C_n^n b^n$. Pastaba: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$, $C_{n+1}^r = C_n^r + C_n^{r-1}$- Paskalio lygybė. $C_n^{n-1} = C_n^1 = n$. $C_n^n = C_n^{n-0} = C_n^0 = 1$.

Pavyzdys: 15-je egzamino bilietų yra po 2 nepasikartojančius klausimus. Studentai gali atsakyti tik į 25 klausimus. Egzamino išlaikymui reikia atsakyti į abu bilieto klausimus arba į vieną klausimą iš bilieto ir į vieną papildomą iš likusių klausimų. Kokia tikimybė studentui išlaikyti egzaminą?

Sprendimas: A={studentas išlaikys egzaminą}; $P(A)$=?

H_1={studentas atsakys į abu bilieto kl.}, H_2={studentas atsakys į 1 iš bilieto kl ir į duotą papildomą kl iš visų likusių.}, H_3={studentas neatsako nei į vieną bilieto kl.}, H_4={studentas neatsako į 1 bilieto kl ir į papildomą klausimą iš visų likusių}. $H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4 = \Omega$. $P(A)=P(A|H_1)P(H_1)+ P(A|H_2)P(H_2)+ P(A|H_3)P(H_3)+ P(A|H_4)P(H_4)\approx 0{,}9359$. $P(A|H_3)=0$. $P(A|H_4)=0$, $P(H_1)=\dfrac{C_{25}^2}{C_{30}^2}$, $P(A|H_1)=1$, $P(H_2)=\dfrac{5\cdot 25}{C_{30}^2}\cdot\dfrac{24}{28}$, $P(A|H_2)=1$. Tuomet $P(A)=0.9359$.

Iš tikimybių daugybos teoremos ir pilnosios tikimybių formulės išplaukia svarbi Bejeso formulė:

Bejeso teorema: jei įvykiai $H_1, H_2, ..., H_N$ sudaro pilnąją įvykių grupę, tai tikimybė: $P(H_j|A)=\dfrac{P(H_j)P(A|H_j)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(A|H_k)}$, $j=\overline{1,n}$. $P(A)>0$. Pilnosios tikimybės formulė $\mathrm{P(A)}=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P(A|H_k)P(H_k)},\ \mathrm{P(H_k)}>0,\ \mathrm{j}=\overline{1,\mathrm{n}}$. Iš daugybos teoremos turime: $P(H_j|A)=P(H_j|A)P(A)=P(A|H_j)P(H_j)$ => $P(H_j|A)=\dfrac{P(H_j)P(A|H_j)}{P(A)}=\dfrac{P(H_j)P(A|H_j)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(A|H_k)}$, $j=\overline{1,n}$. Ši teorema vadinama *hipotezių tikimybių teorema***.** Įvykius H_k vadinsime *hipotezėmis***.** Tarkime, kad iš anksto žinomos hipotezių tikimybės $P(H_k)$ (apriorinės tikimybės, t.y. prieš eksperimentą) ir tikimybės, kad įvyks įvykis A, jei įvyko įvykis $H_k(P(A|H_k))$. Tada remiantis šia teorema galima apskaičiuoti tikimybes $P(H_j|A)$ (aposteorinės tikimybės, t.y. po eksperimento), kad buvo teisinga hipotezė H_j, jei įvykis A įvyko. Ši teorema atsako, kaip pasikeitė hipotezių tikimybės po eksperimento.

Pavyzdys: į surinkimo cechą iš I-jo automato patenka 60% detalių, o iš II-jo automato patenka 40% detalių. I-is automatas gamina 80% I-os rūšies detalių, II-is - 70% I-os rūšies detalių. Į surinkimo cechą pateko I-os rūšies detalių. Kokia tikimybė, kad ją pagamino I-is automatas?

Sprendimas: A={į surinkimo cechą pateko I-as rūšies det}; H_1={detalę pagamino I-is automatas}; H_2={detalę pagamino II-is automatas}; $P(H_1|A)$=? Tuomet pagal Bejeso f-lę turime:

$$P(H_1|A)=\frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)}=\frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{8}{10}}{\frac{3}{5}\cdot\frac{8}{10}+\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{10}}=0.63$$

$P(H_1)$=60/100=3/5; $P(H_2)$=40/100=2/5; $P(H_1)$+ $P(H_2)$=3/5+2/5=1. Iki eksperimento hipotezės H_1 apriorinė tikimybė buvo 0,6 ($P(H_1)$=0,6), o po eksperimento ir įvykio A pasirodymo šios hipotezės sąlyginė tikimybė (aposteriorinė) su sąlyga A, t.y. $P(H_1|A)$=0,63. Naujai įvertinome hipotezės tikimybę.

Nepriklausomi bandymai Bernulio formulėje

Iki šiol nagrinėjome tikimybinius modelius, kurie praktikoje buvo interpretuojami vieno eksperimento rezultatais. Dabar nagrinėsime eksperimentų seriją, apibūdinsime tik paprasčiausią nepriklausomų eksperimentų schemą – Bernulio eksperimentus. Jei įvykiai atitinkantys vieną eksperimentą nepriklauso nuo įvykių, atitinkančių kitą eksperimentą, tai juos vadiname *nepriklausomais* eksperimentais. Nepriklausomi eksperimentai, kurių kiekvieno metu gali įvykti tik įvykis A arba priešingas $\overline{A}$, vadinami *Bernulio* eksperimentais. Visuose Bernulio eksperimentuose tikimybė $P(A)=p$ yra ta pati. Nekinta ir tikimybė $P(\overline{A}) = 1 - p = q$

Pavyzdys: dėžėje yra N rutulių, tarp kurių M-balti. Atsitiktinai traukiame rutulį ir patikrinę ar jis baltas, grąžiname į dėžę. Po to kartojame eksperimentą. Tai Bernulio eksperimentų schema. A={ištrauktas baltas rutulys}. Įvykio A pasirodymo tikimybė kiekviename eksperimente $P(A) = p = \dfrac{M}{N}$. Sakykime, kad atlikome n Bernulio eksperimentų ir $P(A)=p$, $P(\overline{A}) = q$, ($p+q=1$). Kokia tikimybė, kad įvykis A pasirodys k kartų ($0\le k\le n$)?. Šią tikimybę žymėsime $P_n(k)$ (tikimybė, kad atlikus n nepriklausomų eksperimentų, įvykis A pasirodys k kartų.). Įrodysime teoremą, kuri istoriškai buvo pirmasis rimtas tikimybinis modelis nepriklausomų eksperimentų schemoje.

Teorema: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, $\forall k = \overline{0,n}$.

Įrodymas: pažymėkime įvykį A_k:={k-tajame eksperimente pasirodė įvykis A}. Viena iš realizacijų (iš n eksperimentų įvykis A pasirodė k kartų) yra ši: $A_1A_2...A_k\overline{A}_{k+1}\overline{A}_{k+2}...\overline{A}_n$. Kadangi įvykiai nepriklausomi, tai $P(A_1A_2...A_k\overline{A}_{k+1}\overline{A}_{k+2}...\overline{A}_n) = P(A_1)...P(A_k)P(\overline{A}_{k+1})...P(\overline{A}_n) = p...pq...q = p^k q^{n-k}$. Visų skirtingų realizacijų skaičius lygus C_n^k, o jų tikimybės vienodos ir lygios p^kq^{n-k}. Tuomet iš adityvumo išplaukia Bernulio formulė, kad $P_n(k)$= $C_n^kp^kq^{n-k}$. Bernulio formule išreikštos tikimybės vadinamos binominiu pasiskirstymo dėsniu.

Pavyzdys1: lošimo kauliuką metame 10 kartų. Kokia tikimybė, kad akutė "6" iškris 3 kartus?

Sprendimas: n=10, p=1/6, q=5/6.

$$P_{10}(3) = C_{10}^3 (\frac{1}{6})^3 (\frac{5}{7})^7 = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 5^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 6^{10}} = 0.155...$$

Pavyzdys2: Kas labiau tikėtina: laimėti 2 partijas iš 3 ar 3 partijas iš 5 žaidžiant jas su lygiaverčiais žaidėjais?

Sprendimas: $p=q=1/2$. $P_3(3)=C_3^2(\frac{1}{2})^2\frac{1}{2}=C_3^2(\frac{1}{2})^3=3\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$.

$P_5(3)=C_5^2(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2})^2=C_5^2(\frac{1}{2})^5=\frac{5!}{3!\cdot 2!}(\frac{1}{2})^5=\frac{5}{16}$. Taigi $P_3(2)>P_5(3)$.

Bernulio eksperimentų schemą galima apibendrinti taip: tarkime, kad kiekvieno eksperimento metu gali pasirodyti įvykiai $A_1, A_2, ..., A_s$, kurių tikimybės $p_1=P(A_1)$, $p_2=P(A_2), ..., p_s=(A_s)$ nekinta kiekviename eksperimente, be to $p_1+p_2+...+p_s=1$. Sakykime atliekame eksperimentą. Pažymėję $P_n(k_1,k_2,...,k_s)$ tikimybe, kad įvykis A_1 pasirodys k_1 kartų, įvykis A_2 – k_2 kartų, ..., įvykis A_s – k_s kartų, analogiškai Bernulio formulei gauname apibendrintą Bernulio f-lę: $P_n(k_1,k_2,...k_s)=\frac{n!}{k_1!k_2!...k_s!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}...p_s^{k_s}$,

$k_1+k_2+...+k_s=n$– apibendrinta Bernulio formulė. Atskiru atveju: $P_n(k_1,k_2)=\frac{n!}{k_1!k_2!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^kq^{n-k}=P_n(k)$.

Bernulio formulės asimptotika

(n ir k dideli). Kai n ir k dideli, Bernulio f-lė $P_n(k)=C_n^kp^kq^{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^kq^{n-k}$ praktiniams skaičiavimams yra nepatogi. Ieškosime apytikslės formulės, tinkamai įvertinančios tikimybę $P_n(k)$.

Sakykime, kad eksperimentų skaičius n – didelis, o įvykių A tikimybė $p=P(A)$ – maža. Pažymėkime įvykį: A_{nk}:={atlikus n eksperimentų, įvykis A pasirodė k kartų}. Čia $k=0..n$, $n=0,1,2,...$ Tuomet turime įvykių seriją:

A_{00}

A_{10}, A_{11}

A_{20}, A_{21}, A_{22}

...

A_{n0}, A_{n1}, ... ,A_{nn}.

Pasirinkime n-tąją seriją (atlikta n eksperimentų) ir tarkime, kad šioje serijoje įvykio B_n:={n-joje serijoje pasirodė įvykis A} tikimybė $P(B_n)=P(A)=p_n$ priklauso nuo serijos numerio. Vadinasi gauname eksperimentų schemą su kintamomis iš serijos į seriją įvykio pasirodymo tikimybėmis $p_0, p_1, ..., p_n$. Tai *Puasono* eksperimentų schema.

Puasono teorema: jei $n\to\infty$ ir $p_n\to 0$, be to taip, kad $np_n=\lambda\to\lambda<\infty$ (artėja į baigtinį dydį), tai $\lim\limits_{n\to\infty}P_n(k)=P_n(k)\to p_k(\lambda)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, $\forall k=0,1,2...$;

Įrodymas: iš $n{\cdot}p_n=\lambda_n \Rightarrow p_n=\lambda_n/n$ ir Bernulio f-lės $P_n(k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}p_n^k(1-p_n)^{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}(\frac{\lambda_n}{n})^k(1-\frac{\lambda_n}{n})^{n-k}=$

$$=\frac{\lambda_n^k}{k!}\frac{(1-\frac{\lambda_n}{n})^n}{(1-\frac{\lambda_n}{n})^k}\frac{n(n-1)...(n-(k-1))}{n^k}=\frac{\lambda_n^k}{k!}\frac{(1-\frac{\lambda_n}{n})^n}{(1-\frac{\lambda_n}{n})^k}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})...(1-\frac{1}{n})(1-\frac{k-1}{n})$$

Kai n->∞, tai $(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})...(1-\frac{1}{n})(1-\frac{k-1}{n})\to 1$, $\lambda_n\to\lambda$, $(1-\frac{\lambda_n}{n})^n=(1-\frac{\lambda_n}{n})^{(-\frac{n}{\lambda_n})(-\frac{n}{\lambda_n})n}$, ,

$\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{\lambda_n}{n})^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[(1-\frac{\lambda_n}{n})^{(-\frac{n}{\lambda_n})}\right]^{-\frac{\lambda_n}{n}n}=e^{-\lambda}$. Taigi $\lim\limits_{n\to\infty}P_n(k)=P_n(k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$. F-jai $\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ yra sudarytos lentelės.

Pavyzdys: vidutiniškai kairiarankiai sudaro 1% gyventojų. Kokia tikimybė, kad tarp atsitiktinai parinktų 200 gyventojų bus 4 kairiarankiai?

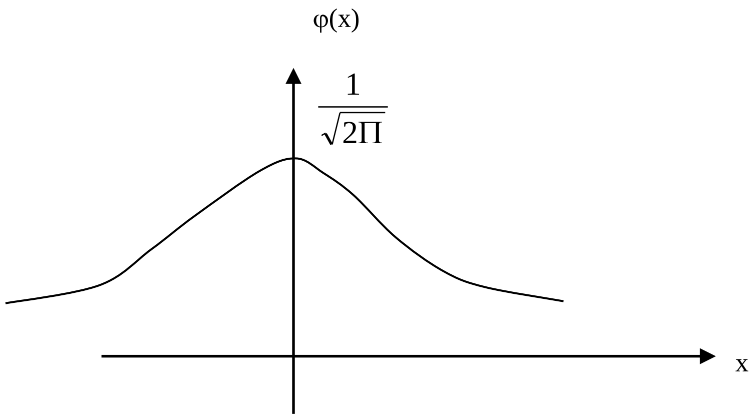
Sprendimas: Įvykis A-atsitiktinai pasirinktas žmogus kairiarankis. $p=P(A)=0{,}01$.

$\lambda_n=n{\cdot}p=200{\cdot}0{,}01=2$, $k=4$.

Tuomet pagal Puasono formulę $P_{200}(4)\approx\frac{e^{-2}2^4}{4!}=0{,}09022.$ Pagal Bernulio formulę gautume $P_{200}(4)=0{,}0902196.$

Sakykime, kad eksperimentų skaičius n – didelis, o įvykių A tikimybė $p=P(A)$ – nėra maža. Tada taikytinos teoremos, kurias pateiksime be įrodymo.

Teorema 2: (Muavro-Laplaso lokalinė teorema): jei tikimybė p pastovi (idealiausia, kai $p=1/2$, t.y.ji nėra maža) ir dydis $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ – aprėžtas, tai $P_n(k)-\frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}\to 0$, kai $n\to\infty$. Čia $\varphi(x)\approx\frac{1}{\sqrt{2\Pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$. F-jai $\varphi(x)$ yra sudarytos lentelės.



Vadinasi galima naudotis apytiksle Laplaso aproksimacija $P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(\frac{k-np}{\sqrt{npq}})$

Pavyzdys: elektroninėje schemoje yra 400 vienodų elementų. Tikimybė, kad kiekvienas iš jų suges lygi 0,2. Kokia tikimybė, kad per metus sugedo 80 elementų?

Sprendimas: Taikysime Muavro-Laplaso lokalinę teoremą, t.y. $P_{400}(80) \approx \frac{\varphi(0)}{8} = \frac{1}{\sqrt{2\Pi} \cdot 8} \approx 0{,}0499.$ n=400, np=400 0,2=80, k=80, p=0,2 , q=0,8. $\frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{80-80}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 0$. $\sqrt{npq} = \sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} = 8$. Tikslus rezultatas būtų: $P_{400}(80)=C_{400}^{80} \cdot (0{,}2)^{80} \cdot (0{,}8)^{320}$, gauti gana sunku.

Teorema 3: (Muavro-Laplaso integralinė teorema): tarkime, kad n- didelis, o p nėra maža. Tada $P_n(a \le k \le b) - \int_{x_1}^{x_2} \varphi(t)dt \to 0,\ n \to \infty.$ Čia $x_1 = \frac{a-np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{b-np}{\sqrt{npq}}$.

Tegul $\psi(x) = \int_0^x \varphi(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$ (Laplaso funkcija). Tuomet, kai n didelis $P_n(a \le k \le b) \approx \psi(x_2) - \psi(x_1)$. Nesunku pastebėti, kad $\psi(-x) = -\psi(x)$.

Pavyzdys: 60% įmonės gaminamos produkcijos yra pirmos rūšies gaminiai. Kokia tikimybė, kad iš 500 atsitiktinai paimtų bus ne mažiau, kaip 290 ir ne daugiau, kaip 330 pirmos rūšies gaminių?

Sprendimas:

$\sqrt{npq} = \sqrt{500 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4} = 10{,}95.$ $np = 500 \cdot 0{,}6 = 300,$ $x_2 = \frac{330-300}{10{,}95} = 2{,}74$,

$$x_1 = \frac{290 - 300}{10{,}95} = -0{,}915.$$

$$npq = 300 \cdot 0{,}4 = \psi(2{,}74) - \psi(-0{,}915) = \psi(2{,}74) + \psi(0{,}915) = 0{,}44969 + 0{,}3199 = 0{,}8168$$

III skyrius
Atsitiktiniai dydžiai

Atsitiktinio dydžio apibrėžimas. Pasiskirstymo funkcija

Matematinėje erdvėje nagrinėjame funkcijas, apibrėžtas realiųjų skaičių erdvės R poaibiuose. Šią funkcijos sąvoką galima išplėsti. Tikimybių teorijoje nagrinėjamos funkcijos, kurios apibrėžtos elementariųjų įvykių aibėje. Tokias funkcijas vadiname atsitiktiniais dydžiais.

Pavyzdys 1. Iš kosmoso į Žemės paviršių krinta įvairios dalelės. Dalelių patekusių į apibrėžtą Žemės plotą per tam tikrą laiko tarpą, skaičius yra atsitiktinis dydis.

Pavyzdys 2. Matuojame atstumus tarp abiejų Žemės paviršiaus taškų. Matavimo prietaisus veikia daugybė atsitiktinių faktorių: temperatūros svyravimai, virpesiai, vėjas ir t.t. Matavimo rezultatas yra atsitiktinis dydis.

Atsitiktinius dydžius tenka nagrinėti ir įvairiose mokslo ir technikos srityse. Kiekvienas šių dydžių, veikiant atsitiktinėms aplinkybėms gali įgyti skirtingas reikšmes, kurių iš anksto pasakyti negalime. Todėl, norint apibūdinti atsitiktinį dydį, pirmiausia reikia žinoti, kokias reikšmes jis gali įgyti. Tačiau to nepakanka, kad būtų galima daryti kokias nors esmines išvadas. Aprašant atsitiktinius dydžius turime žinoti ne tik kokias reikšmes gali jis įgyti, bet ir kaip dažnai, t.y. su kokia tikimybe tos reikšmės įgyjamos.

Atsitiktiniai dydžiai labai įvairūs. Jų įgyjamos reikšmių aibės gali būti baigtinės, suskaičiuojamos ir nesuskaičiuojamos, reikšmės gali būti išsidėsčiusios diskrečiai arba užpildžiusios ištisus intervalus. Norint vienu ir tuo pačiu būdu užrašyti tikimybes, su kuriomis įgyjamos atsitiktinio dydžio reikšmės, natūralu nagrinėti elementariųjų įvykių aibės poaibius, kuriuose atsitiktinio dydžio reikšmės yra mažesnės už bet kurį realųjį skaičių X.

Tarkime (Ω, F, P)- tikimybinė erdvė. Nagrinėsime funkcijas, kurios apibrėžtos elementariųjų įvykių aibėje Ω. Jas žymėsime graikiškomis raidėmis $\xi, \eta ...$ o jų įgyjamas reikšmes- mažosiomis lotyniškomis raidėmis $x, y, \dots$. Taigi nagrinėsime tokias funkcijas $\xi = \xi(w)$, $w \in \Omega$, kurios elementariųjų įvykių aibę Ω atvaizduoja į realiųjų skaičių aibės R: $\Omega \xrightarrow{\xi} R$.

1 apibrėžimas. Vienareikšmė realioji funkcija $\xi = \xi(w)$, apibrėžta aibėje Ω, vadinama atsitiktiniu dydžiu, jei su kiekvienu realiuoju x aibė $\{w \mid \xi(w) < x\} \in F$. Šis reikalavimas turi prasmę. Žinome, kad F- tai įvykis, kuriems apibrėžtas tikimybė. Apibrėžime nurodytas reikalavimas reiškia, kad su kiekvienu realiuoju x galime apibūdinti įvykio $\{w \mid \xi(w) < x\}$tikimybę.

Vadinasi vienareikšmė funkcija $\xi = \xi(w)$, $w \in \Omega$, įgyjanti realias reikšmes, vadinama atsitiktiniu dydžiu, jei su kiekvienu realiuoju x nusakyta tikimybė $P(w \mid \xi(w < x)$. Žymėsime $F_\xi(x) := P(w \mid \xi(x) < x) = P(\xi < x)$.

1 apibrėžimas. Funkcija $F_\xi(x) = P(\xi < x)$ vadiname atsitiktinio dydžio ξ skirstinio funkcija.

Pastaba. Jei nagrinėjamas vienas atsitiktinis dydis, tai vietoje $F_\xi(x)$ dažnai rašoma $F(x)$.

Pavyzdys. Metame simetrišką lošimo kauliuką. Tada $\Omega = \{w_1, w_2, ...w_6\}$. Apibrėšime atsitiktinį dydį:

$$\xi = \xi(w) = \begin{cases} 0, \\ 1, \\ 2. \end{cases}$$

Čia 0-jei iškrito 1 arba 2 akutės; 1-jei iškrito 3 arba 4, arba 5 akutės; 2- jei iškrito 6 akutės. Kitaip sakant, jei atlikus bandymą įvyko w_1, tai $\xi(w_1) = 0$, jei įvyko įvykis w_3, tai $\xi(w_3) = 3$ ir t.t. Matome, kad ξ įgyja reikšmes 0, 1, 2. Apskaičiuosime tikimybes, su kuriomis įgyja šias reikšmes:

$P(w_i) = 1/6$, $i = \overline{1,6}$.

Atsitiktinis dydis ξ įgis reikšmę 0, jei įvyks w_1 arba w_2, todėl $\{w \mid \xi(w) = 0\} = \{w_1 \cup w_2\} \in F$, iš čia $P(\xi(w) = 0) = P(w_1) + P(w_2) = 1/6 + 1/6 = 1/3$.

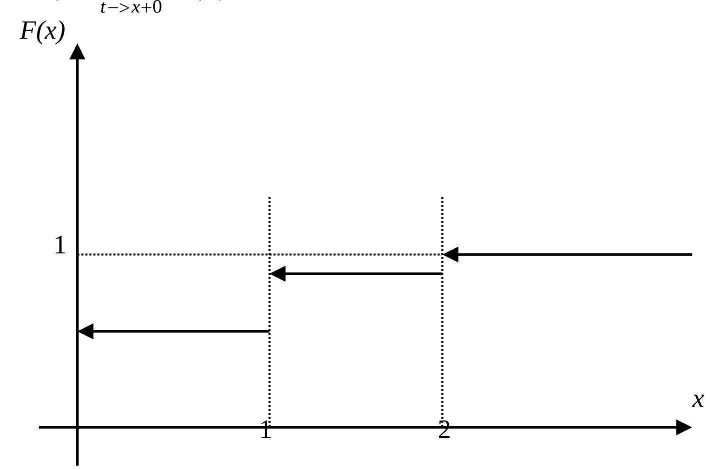
Analogiškai $P(\xi(w) = 1) = P(w_3) + P(w_4) + P(w_5) = \frac{1}{6} \cdot 3 = 1/2$ ir $P(\xi(w) = 2) = P(w_6) = 1/6$.

ξ	0	1	2
p	1/3	1/2	1/6

Vadinasi atsitiktinis dydis įgyja reikšmes 0, 1, 2 su tikimybėmis 1/3, ½, 1/6. Pažymėkime funkciją *F(x):*

$$F(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0, & kai\, x \le 0, \\ 1/3, & kai\;\, 0 < x \le 1, \\ 1/3 + 1/2 = 5/6, & kai\;\, 1 < x \le 2, \\ 1, & kai\; x \ge 2. \end{cases}$$

$F(x+0) = \lim\limits_{t->x+0} F(x)$.



Matome, kad pasiskirstymo funkcija *F(x)* apibrėžta visoms realioms *x* reikšmėms, kinta tarp 0 ir 1, yra mažėjanti, tolydi iš kairės. Funkcijos atidėjimo taškai yra ξ įgyjamos reikšmės, šuolio aukštis lygus tikimybei, su kuria dydis ξ įgyja šią reikšmę.

Pasiskirstymo funkcijos savybės

Atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija visiškai nusako atsitiktinį dydį. Iš pasiskirstymo funkcijos analizinės išraiškos aišku, kurias reikšmes įgyja atsitiktinis dydis ir kaip tikimybės pasiskirsto pagal šias įgyjamas reikšmes. Todėl svarbu žinoti jų savybes:

1. Pasiskirstymo funkcija $F(x) = P(\xi < x)$ įgyja reikšmes iš intervalo [0,1], t.y. $0 \le F(x) \le 1$. Ši savybė išplaukia iš *F(x)* apibrėžimo $F(x) := P(\xi < x)$.

2. *F(x)* mažėjanti funkcija: kai $x_1 < x_2$, tai $F(x_1) \le F(x_2)$.

Įrodymas. Jei $x_1 < x_2$, tai $\{w \mid \xi(w) < x_2\} = \{w \mid \xi(w) < x_1\} \cup \{w \mid x_1 \le \xi(w) < x_2\}$. Kadangi įvykiai $\{\xi < x_1\}$ ir $x_1 \le \xi < x_2$ nesutaikomi, tai $P(\xi < x_2) = P(\xi < x_1) + P(x_1 \le \xi < x_2)$. Iš čia seka, kad $P(\xi < x_2) - P(\xi < x_1) = P(x_1 \le \xi < x_2)$ arba $F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 \le \xi < x_2)$. Bet $P(x_1 \le \xi < x_2) \ge 0,$ todėl $F(x_2) - F(x_1) \ge 0$ arba $F(x_2) \ge F(x_1)$.

Pastaba. Iš įrodymo seka, kad $P(x_1 \le \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$. Žinome, kad apibrėžta funkcija turi aibę, kai argumentas artėja į $-\infty$ arba $+\infty$. Pažymėkime $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty)$ ir $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = F(+\infty)$.

3. $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$. Monotoniška funkcija kiekviename taške turi ribas iš kairės $F(x-0)$ ir iš dešinės $F(x+0)$. Šios ribos nesutampa, kai funkcija *F(x)* nėra tolydi taške *x*. Kai $F(x_0 - 0) = F(x_0)$, t.y. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$, tai sakoma, kad funkcija tolydi taške x_0 iš kairės.

4. Pasiskirstymo funkcija *F(x)* yra tolydi iš kairės, t.y. $F(x-0) = F(x)$, $\forall x \in R$.

5. $P(\xi < x\ ) = F(x+0)$, $\forall x \in R$, $F(x_0 + x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} F(x)$.

6. $P(\xi = x_2) = F(x+0) - F(x)$, $\forall x \in R$.

7 teorema. Jei x_1 ir x_2 - bet kurie realieji skaičiai, tai:

$P(x_1 \le \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$, $P(x_1 \le \xi \le x_2) = F(x_2 + 0) - F(x_1)$,

$P(x_1 < \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1 + 0)$, $P(x_1 < \xi \le x_2) = F(x_2 + 0) - F(x_1 + 0)$,

$P(\xi \ge x_1) = 1 - P(\xi < x_1) = 1 - P(x_1)$, $P(\xi > x_1) = 1 - F(x_1 + 0)$, kur $F(x_i) = P(\xi < x_i), \quad i = 1{,}2, \quad F(x_i + 0) = P(\xi < x_i + 0) = \lim\limits_{x \to x_i + 0} F(x)$. Skirstinio funkcija gali turėti trūkio tašką *x*, kuriuose $F(x+0) + F(x-0) = F(x+0) - F(x) > 0$. Šis skirtumas vadinamas funkcijos šuoliu taške *x*.

Skirstinio funkcija turi ne daugiau kaip suskaičiuojamą aibę trūkio taškų.

Apibendrinimui galima pasakyti, kad pasiskirstymo funkcija *F(x)* yra reali vienareikšmė, tolydi iš kairės ir tenkinanti sąlygas $F(x) \to 0$, kai $x \to -\infty$ ir $F(x) \to 1$, kai $x \to +\infty$, funkcija.

Yra teisingas ir atvirkščias teiginys.

Teorema. Kiekviena reali vienareikšmė $F(x)$ funkcija, kuri
Nemažėja
Tolydi iš kairės
$F(x) \to 0$, $x \to -\infty$; $F(x) \to 1$, kai $x \to +\infty$
yra tam tikro atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija.

Diskretieji atsitiktiniai dydžiai

Iš visų atsitiktinių dydžių išskirsime tuos, kurie įgyja baigtinę arba suskaičiuojamą aibę reikšmių.

1 apibrėžimas. Atsitiktinis dydis vadinamas diskrečiuoju, jei visos jų galimos reikšmės sudaro baigtinę arba suskaičiuojamą aibę.

1 pavyzdys. Metame monetą tris kartus. Iškrito skaičius- diskretusis atsitiktinis dydis, kurio galimos reikšmės 0, 1, 2, 3

Dažnai atsitiktinis dydis charakterizuojamas ne skirstinio funkcija, o kokiu nors kitu būdu. Kiekviena tokia charakteristika vadinama atsitiktinio dydžio skirstinio dėsniu, jei iš jos galima gauti skirstinio funkciją.

Diskretųjį atsitiktinį dydį galima apibūdinti nurodant įgyjamas reikšmes ir tikimybes su kuriomis jos įgyjamos.

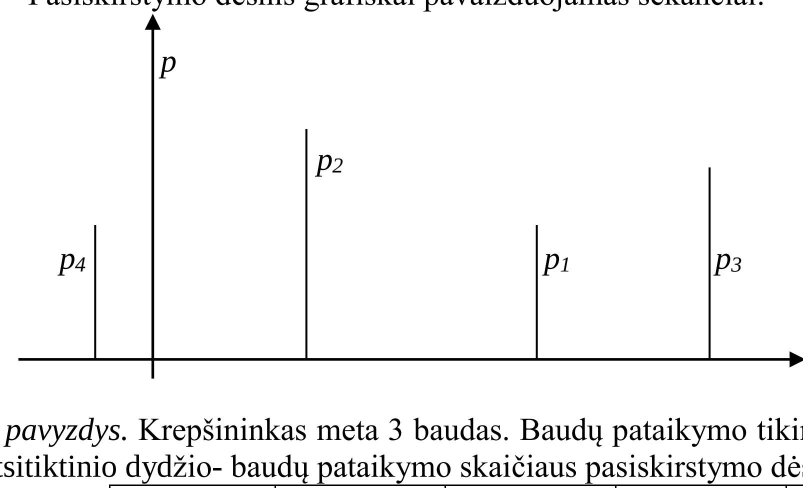
2 apibrėžimas. Diskrečiojo atsitiktinio dydžio dėsniu vadiname visumą porų (x_i, p_i) kur x_i-galimos atsitiktinių dydžių reikšmės, o p_i- tikimybės, su kuriomis tos reikšmės įgyjamos. Be to $\sum_i p_i = 1$.

Atsitiktinio dydžio ξ pasiskirstymo dėsnį patogu užrašyti lentele:

ξ	x_1	x_2	…	x_I	…
$P(\xi = x_i)$	p_1	p_2		p_I	

Čia $p_i = P(\xi = x_i), \quad i = 1,2...$ ir $\sum_i p_i = 1$.

Pasiskirstymo dėsnis grafiškai pavaizduojamas sekančiai:



2 pavyzdys. Krepšininkas meta 3 baudas. Baudų pataikymo tikimybė p=0,8. Sudaryti atsitiktinio dydžio- baudų pataikymo skaičiaus pasiskirstymo dėsnį.

ξ	0	1	2	3
p	0,008	0,096	0,384	0,512

Taigi

$P(\xi = 0) = C_3^0 (0{,}8)^0 \cdot (0{,}2)^3 = 0{,}008$,

$P(\xi = 1) = C_3^1 \cdot 0{,}8 \cdot (0{,}2)^2 = 0{,}096$,

$P(\xi = 2) = C_3^2 \cdot (0{,}8)^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}384$,

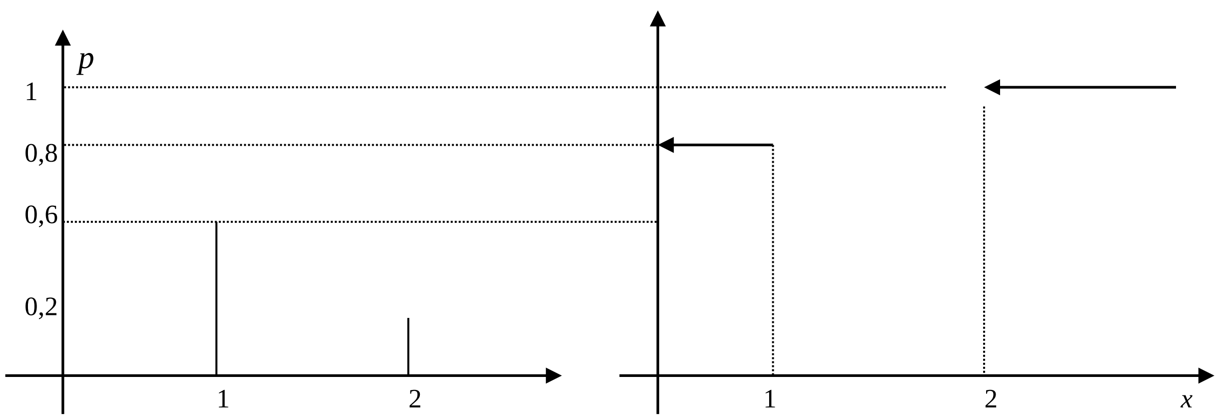
$P(\xi = 3) = C_3^3 \cdot (0{,}8)^3 \cdot (0{,}2)^0 = 0{,}512$.

Pastaba. Sakome, kad atsitiktinis dydis ξ yra pasiskirstęs pagal geometrinį dėsnį, jei jis įgyja reikšmes 1, 2, 3…

Su tikimybe $P(\xi = k) = p(1-p)^{k-1}, k = 1, 2, ...$

Dabar parašysime diskrečiojo atsitiktinio dydžio ξ skirstinio funkciją: $F(x) = \sum\limits_{x_i < x} p_i$, kur $p_i = P(\xi = x_i), i = 1, 2, ...$ ir sunumeruojame pagal visus indeksus *i*, kuriems $x_i < x$.

Tai laipsninė funkcija, kurios trūkio taškai yra x_i, o tarp jų funkcija yra pastovi. Funkcijos $F(x)$ šuolio dydis taške x_i lygus $F(x_i + 0) - F(x_i) = p_i$.



ξ	0	1	2
p	0,2	0,6	0,2

Atsitiktinio dydžio ξ pasiskirstymo funkcija atrodys taip:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & kai\, x \le 0, \\ 0{,}2, & kai\ 0 < x \le 1, \\ 0{,}8, & kai\ 1 < x \le 2, \\ 1, & kai\, x > 2. \end{cases}$$

Absoliučiai tolydieji atsitiktiniai dydžiai

Be diskrečiųjų atsitiktinių dydžių kita svarbi atsitiktinių dydžių klasė yra tolydieji atsitiktiniai dydžiai. Atsitiktinį dydį ξ vadiname tolydžiuoju, jei jo pasiskirstymo funkcija $F(x) = P(\xi < x)$ yra tolydi. Diskrečiojo atsitiktinio dydžio skirstinio funkcija turi pirmo tipo trūkį tuose taškuose *x*, kuris yra jo galimos reikšmės. Jei $F(x)$ tolydi, tuomet $\forall x, x \in R$.

$P(\xi = x) = F(x+0) - F(x) = 0$.

Kadangi $F(x)$ tolydi iš kairės, tai $P(\xi = x) = F(x+0) = F(x+0) - F(x) = 0$, $F(x+0) = \lim\limits_{t \to x+0} F(t)$. Kadangi pasiskirstymo funkcija tolydi iš kairės, tai $\forall x,\ x \in R,\ F(x) = F(x-0)$. Taigi $P(\xi = x) = F(x+0) - F(x-0) = 0,$ (dėl $F(x)$ tolydumo).

Tolydieji atsitiktiniai dydžiai skirstomi į absoliučiai tolydžiuosius ir singuliarinius. Praktiniuose taikymuose singuliarieji pasiskirstymai nevartojami, todėl toliau nagrinėsime absoliučiai tolydžiuosius pasiskirstymus.

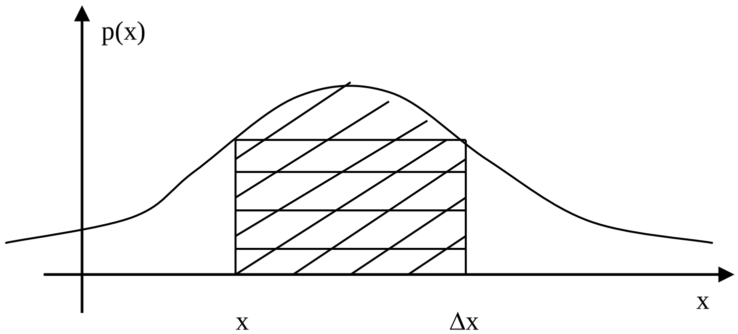
Apibrėžimas: Atsitiktiniu dydžiu ξ vadinamas absoliučiai tolydžiuoju, jei egzistuoja neneigiama funkcija $p(x)$ tokia, kad $\forall x \in R.\ F_\xi(x) = P(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} p(y)dy.$ Funkciją $p(x)$ vadiname atsitiktinio dydžio ξ tankio funkcija. Tankio funkcija turi šias savybes:

1. Tankio funkcija $p(x)$ yra neneigiama ir normuota:
   1.1. $p(x) \geq 0$ (pagal apibrėžimą),
   1.2. $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1,$ nes $F_\xi(+\infty) = 1.$
2. Tikimybė, kad absoliučiai tolydusis atsitiktinis dydis įgis reikšmę, priklausančią intervalui $[a,\ b)$, apibrėžiama lygybe $P(a \leq \xi \leq b) = \int_a^b p(x)dx,$ nes
   $$P(a \leq \xi \leq b) = F_\xi(b) - F_\xi(a) = P(\xi < b) - P(\xi < a) = \int_{-\infty}^{b} p(y)dy - \int_{-\infty}^{a} p(y)dy =$$
   $$= \int_a^b p(y)dy.$$
   Žinome, kad $P(\xi = x) = 0,\ \forall x \in R,$ jei ξ tolydinis. Todėl $P(a \leq \xi \leq b) = P(a \leq \xi \leq b) + P(\xi = b) = P(a \leq \xi < b).$ Analogiškai $P(a < \xi \leq b) = P(a \leq \xi < b)$ ir $P(a < \xi < b) = P(a \leq \xi \leq b).$
3. Jei $p(x)$ tolydi taške x, tai $p(x) = \dfrac{d}{dx}F(x).$ $F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(y)dy,$ tai išplaukia iš integralo su kintamu viršutiniu rėžiu savybės.

Dėl šios savybės tankio funkcija $p(x)$ kartais vadinama diferencialine skirstinio funkcija, o skirstinio funkcija $F(x)$- integraline skirstinio funkcija.

Paaiškinsime tikimybių tankio funkcijos prasmę. Iš lygybės $p(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{P(x \leq \xi < x + \Delta x)}{\Delta x},$ turime $\int_x^{x+\Delta x} p(y)dy$. Taigi $P(x \leq \xi < x + \Delta x) \approx p(x)dx.$!!!

jei $\Delta x > 0$ kiek norima mažas, tada tikimybė, kad atsitiktinis dydis įgys reikšmę iš intervalo $[x,\ x + \Delta x]$ apytiksliai lygi tankio funkcijos reikšmės taške x ir intervalo ilgio Δx santykiui.



Užbrūkšniuotos figūros plotas lygus $P(x \le \xi < x + \Delta x)$, o du kartus užbrūkšniuotas figūros plotas lygus $p(x)\Delta x$.

Apskritai, kiekviena realioji neneigiama funkcija $p(x)$ yra tam tikro absoliučiai tolydžiojo atsitiktinio dydžio tankio funkcija, jei ji neneigiama ir normuota:

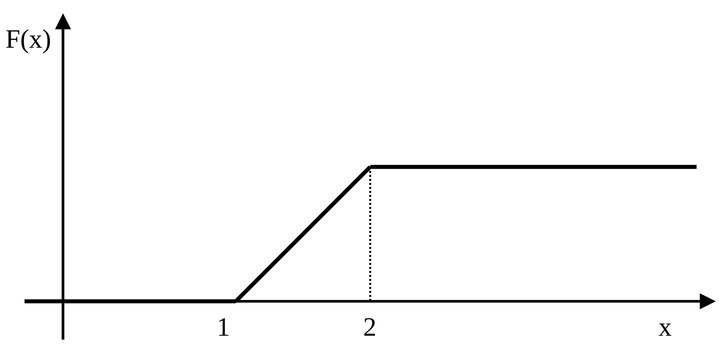
a) $p(x) \ge 0$,

b) $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$.

Pavyzdys: Duota atsitiktinio dydžio skirstinio funkcija:

$$F_\xi(x) = F(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0, & kai\ x \le 1, \\ \frac{1}{2}(x^2 - x), & kai\ 1 < x \le 2, \\ 1, & kai\ x > 2. \end{cases}$$

Rasti tankio funkciją $p(x)$. Nubrėžti $p(x)$ ir $F(x)$ grafikus.



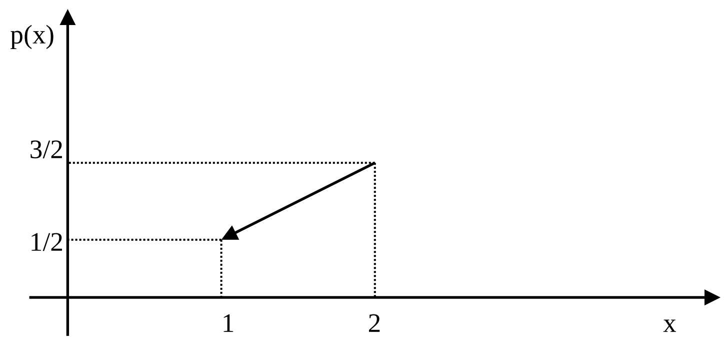
$$F(1) = 0, \quad F(1-0) = \lim_{t \to 1-0} F(+) = 0,$$

$$F(1+0) = 0, \quad F(1+0) = \lim_{t \to 1+0} F(+) = 0,$$

$$F(2) = \frac{1}{2}(2^2 - 2) = \frac{1}{2}(4-2) = 1, \quad F(2+0) = 1.$$

Šiuo atveju $F(\underline{x})$ tolydi, todėl $p(x) = F'(\underline{x})$:

$$p(x)=\begin{cases}0, & kai\ x\le 1,\\ x-\dfrac{1}{2}, & kai\,1<x\le 2,\\ 0, & kai\ x>2.\end{cases}$$



$$p(1)=0,\quad p(1-0)=\lim_{t\to 1-0}p(+)=0,$$

$$p(1+0)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\quad p(2)=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

Pavyzdys: Atsitiktinį dydį ξ vadiname tolygiai pasiskirsčiusiu atkarpoje [a,b], kuriai priklauso visos galimos jo reikšmės, jei tankio funkcija yra pastovi toje atkarpoje. Rasime tankio funkciją $p(x)$ ir pasiskirstymo funkciją $x\in[a,b]$.rasime ją iš sąlygos $\int_a^b p(x)dx=\int_a^b cdx=1.\ cx\Big|_a^b=1,\ c(b-a)=1,\ c=\dfrac{1}{b-a}$.Taigi

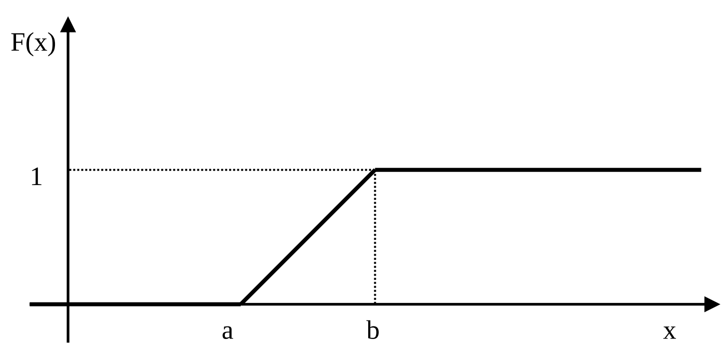
$$p(x)=\begin{cases}0, & kai\ x\le a,\\ \dfrac{1}{b-a}, & kai\ a\le x\le b,\\ 0, & kai\ x>b.\end{cases}$$

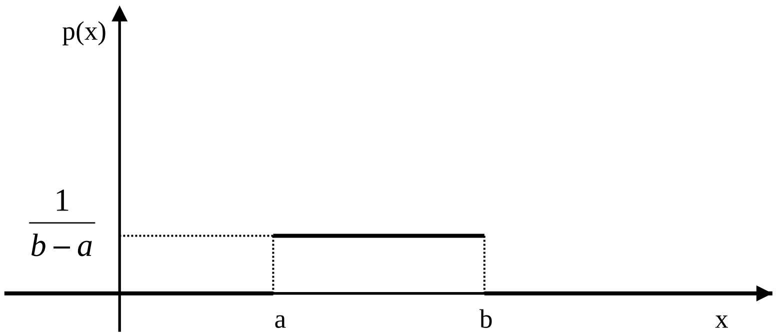
Rasime $F(x)$:

kai $x\le a,\ F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(y)dy=\int_{-\infty}^{x}0dy=0.$

kai $a\le x\le b$, $F(x)=\int_{-\infty}^{a}p(y)dy+\int_a^b p(y)dy=\int_a^x\dfrac{1}{b-a}dy=\dfrac{1}{b-a}y\,|_a^x=\dfrac{x-a}{b-a}.$

kai $x>b$, $F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(y)dy=\int_{-\infty}^{a}p(y)dy+\int_a^b p(y)dy+\int_b^x p(y)dy=0+\int_a^b\dfrac{1}{b-a}dy+0=$ $=\dfrac{b-a}{b-a}=1.$





Atsitiktinių dydžių skaitinės charakteristikos

Atsitiktinį dydį visiškai apibūdina jo tikimybių pasiskirstymo funkcija. Tačiau praktiškai dažnai pakanka ir ne tokių išsamių atsitiktinio dydžio charakteristikų.

6.1 Vidurkis

Tai viena iš svarbiausių atsitiktinių dydžių skaitinių charakteristikų. Tarkime N kartų išmatavę dydį ξ gavome jo reikšmes $x_1, x_2, ... x_m$. Reikšmė x_1 pasikartojo k_1 kartų,…, reikšmė x_m - k_m kartų. Aritmetinis vidurkis

$$\xi = \frac{x_1 k_1 + x_2 k_2 + ... + x_m k_m}{k_1 + k_1 + ... + k_m} = \sum_{i=1}^{m} x_i \frac{k_i}{N}, \qquad (1)$$

Kai matavimų skaičius N didelis apibūdina dydžio ξ galimų reikšmių grupavimosi centrą (vidutinę reikšmę).

Empirinėje (1) vidurkio skaičiavimo formulėje, keisdami santykinį dažnį k_i/n tikimybėmis $p_i = P(\xi = x_i)$, gausime tikimybių teorijoje ir matematinėje statistikoje naudojamą teorinio vidurkio sąvoką. Dabar ją ir apibrėšime. Sakykime, kad atsitiktinis dydis ξ yra diskretusis su pasiskirstymo dėsniu:

ξ	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
$p_i = P(\xi = x_i)$,	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

1 apibrėžimas. Diskrečiojo atsitiktinio dydžio ξ vadiname skaičių $E\xi = \sum_i x_i p_i$ (2). Tarkime, kad atsitiktinis dydis ξ tolydusis ir jo tankis yra $p_\xi(x)$.

2 apibrėžimas. Absoliučiai tolydžiojo atsitiktinio dydžio ξ vidurkiu vadiname skaičių $E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x p_\xi(x) dx$ (3)

Apibrėžimuose reikalaujame, kad eilutė ir integralas konverguotų absoliučiai. Vidurkis yra vienetinis tikimybių masės pasiskirstymo tiesėje centro koordinatė. Tai atsitiktinio dydžio įgyjamų reikšmių grupavimosi centras.

1 pavyzdys. Dviejų šaulių pataikymo į taikinį tikimybių pasiskirstymo dėsniai yra:

ξ	10	9	8
p_i	0,6	0,2	0,2

η	10	9
q_i	0,5	0,5

Kuris šaulys taiklesnis, jei taiklumo kriterijus- surinktų taškų vidurkis?

Tarkime ξ ir η - surinkti taškai. Tada vidurkiai:

$E\xi = 10\cdot 0{,}6 + 9\cdot 0{,}2 + 8\cdot 0{,}2 = 9{,}4$

$E\eta = 10\cdot 0{,}5 + 9\cdot 0{,}5 = 9{,}5$

Suprantame, pa 10 šūvių pirmasis šaulys surinks vidutiniškai 94, o antrasis 95 taškus. Šio kriterijaus pažiūriu antrasis šaulys yra taiklesnis.

2 pavyzdys. Tikimybė, kad variklis užsives pasukus raktu, lygi p. Kiek vidutiniškai kartų reikės pasukti raktu, kad variklis užsivestų?

Tarkime, raktą pasukome ξ kartų. Kadangi, tai Bernulio eksperimentai (atlikus eksperimentą įvyksta A arba $\overline{A}$ ir pasirodymo įvykio tikimybė A pastovi) tai ξ pasiskirstymo dėsnis yra metrinis: $P(\xi = k) = pq^{k-1},\ \forall k \ge 1,\ q = 1-p.$ Vidurkis

$$E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} kp(\xi = k) = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = p(\sum_{k=1}^{\infty} q^k)' = p\left(\frac{q}{1-q}\right)' = p\frac{1-q+q}{(1-q)^2} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

Aišku, jei tikimybė p maža, tuomet vidutinis bandymų skaičius kad variklis užsives yra didelis.

Toliau aptarsime atsitiktinių dydžių funkcijos vidurkių skaičiavimą. Tarkime, kad atsitiktinis dydis ξ yra diskretusis ir $\eta = f(\xi)$. Pritaikę vidurkio apibrėžimą, gauname $E\eta + Ef(\xi) = \sum_k y_k P(\eta = y_k) \quad (4)$. Tačiau, prisiminę atsitiktinio argumento funkcijos pasiskirstymo skaičiavimą, gausime: $E\eta + Ef(\xi) = \sum_k f(x_k) P(\xi = x_k) \quad (5)$. Taigi, norint apskaičiuoti atsitiktinio argumento funkcijos $\eta = f(\xi)$ vidurkį, nebūtina žinoti atsitiktinio dydžio η pasiskirstymo dėsnį, pakanka žinoti tik atsitiktinio dydžio ξ pasiskirstymo dėsnį.

Jei atsitiktinis dydis ξ absoliučiai tolydusis su tankio funkcija $p_\xi(x)$ ir atsitiktinis dydis $\eta = f(\xi)$, tai $E\eta = \int_{-\infty}^{\infty} y p_\eta(y) dy \quad (6)$ arba, kaip ir diskrečiuoju atveju $E\eta = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p_\xi(x) dy \quad (7)$.

3 pavyzdys. Kvadrato kraštinės ilgis ξ tolygiai pasiskirstys intervale (0,2). Rasti šio kvadrato ploto vidutinę reikšmę.

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 1/2, & 0 < x < 2, \\ 0, & x \notin (0,2). \end{cases}$$

Kvadrato plotas $\eta = \xi^2$. Panaudoję (7) formulę, gausime $E\eta = E\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_\xi(x)dx = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{4}{3}$.

Tarkime, kad (ξ, η)- dvimatis atsitiktinis vektorius ir atsitiktinis dydis $\xi = f(\xi, \eta)$. Tuomet analogiškai vienmačiui atvejui

(8) $E\zeta = Ef(\xi,\eta) = \sum_i \sum_j f(x_i, y_j)P(\xi = x_i, \eta = y_j)$, kai ξ ir η- diskretieji atsitiktiniai dydžiai, ir (9) $E\zeta = Ef(\xi,\eta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)p_\zeta(x,y)dxdy$, kur $p_\zeta(x,y)$- atsitiktinio dydžio ζ tankio funkcija, o ξ ir η tolydieji atsitiktiniai dydžiai.

6.2 Vidurkio savybės

Tarkime, kad atsitiktinio dydžio ξ vidurkiai egzistuoja. Tuomet iš eilučių ir integralo savybių gausime pagrindines vidurkio savybes.

SAVYBĖS:

1. *EC=C, C*-konstanta. Tikrai, mes pastovų dydį *C* imame nagrinėti kaip diskretųjį atsitiktinį dydį ξ su $P(\xi = C) = 1$. Tuomet $E\xi = C \cdot 1 = C$
2. $|E\xi| \le E|\xi|$
3. Jei $\xi \ge 0$, tai $E\xi \ge 0$, tai seka iš apibrėžimo.
4. Bet kuriems atsitiktiniams dydžiams ξ ir η, $E(\xi+\eta) = E\xi + E\eta$. Šią savybę įrodysime absoliučiai tolydiesiems atsitiktiniams dydžiams. Pasinaudoję (9) formule, atsitiktiniams dydžiui $\zeta = \xi + \eta$, gauname
$$E(\xi+\eta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)p_\zeta(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} x(\int_{-\infty}^{\infty} p_\zeta(x,y)dy)dx +$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty} y(\int_{-\infty}^{\infty} p_\zeta(x,y)dx)dy = \int_{-\infty}^{\infty} xp_\zeta(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} y_\eta(y)dy = E\xi + E\eta.$$
Tegul $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$- bet kokie atsitiktiniai dydžiai. Tuomet $E(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) = E\xi_1 + E\xi_2 + ... + E\xi_n)$.
5. Jei atsitiktiniai dydžiai ξ ir η nepriklausomi, tai $E\xi\eta = E\xi + E\eta.$ šią savybę įrodysime diskretiems atsitiktiniams dydžiams. Jei ξ ir η nepriklausomi, tai $P(\xi = x_i, \eta = y_j) = P(\xi = x_i)P(\eta = y_j)$. Tuomet
$$E\xi\eta = \sum_i\sum_j x_i y_j P(\xi = x_i, \eta = y_j) = \sum_i\sum_j x_i y_j P(\xi = x_i)P(\eta = y_j) =$$
$$= \sum_i x_i P(\xi = x_i)\sum_j y_j P(\eta = y_j) = E\xi E\eta.$$
6. $Ec\xi = cE\xi$. $Ec\xi = \sum_i cx_i p_i = c\sum_i x_i p_i = cE\xi$. ξ - diskretusis atsitiktinis dydis.

Dispersija

Atsitiktinis dydžio (a.d) ξ vidurkis *E*ξ apibūdina reikšmės grupavimosi centrą. Dabar apibrėšime išskalidymo šio centro atžvilgiu charakteristiką- dispersiją.

1 ap. A.d. dispersija *D*ξ vadiname šio dydžio nuokrypio nuo vidutinio kvadrato vidurkį: $D\xi=E(\xi-E\xi)^2$.

Iš apibrėžimo išplaukia:

$$D\xi=\sum_i (x_i-E\xi)^2 P(\xi=x_i),$$ kai ξ diskretusis dydis ir

$$D\xi=\int_{-\infty}(x-E\xi)^2 p_\xi(x)dx,$$ kai ξ tolydusis a.d.

2 ap. A.d. ξ standartiniu nuokrypiu arba standartu vadiname kvadratinę šaknį iš dispersijos $\sigma=\sqrt{D\xi}$

Standarto σ dispersija sutampa su dydžio ξ dispersija.

Pvz. Turime a.d., tolygiai pasisikirsčiusį intervalw (a,b):

$$p_\xi(x)=\begin{cases}1/(b-a), & x\in(a,b)\\ 0, & x\notin(a,b)\end{cases}$$. Apskaičiuosime dispersiją:

$$E\xi=\int_{-\infty}^{\infty}xp_\xi(x)dx=\int_{-\infty}^{a}+\int_a^b+\int_b^{\infty}=\int_a^b xp_\xi(x)dx=$$

$$=\int_a^b x\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\frac{x^2}{2}\Big|_a^b=\frac{1}{2(b-a)}(b^2-a^2)=\frac{a+b}{2}$$

$$D\xi=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\frac{a+b}{2})^2 p_\xi(x)dx=\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})^2\frac{1}{b-a}dx=$$

$$=\frac{1}{b-a}(\int_a^b x^2dx-(a+b)\int_a^b xdx+\frac{1}{4}(a+b)^2\int_a^b dx)=$$

$$=\frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3-a^3}{3}-\frac{(b^2-a^2)(b-a)}{2}+\frac{(b-a)^2(b-a)}{4}\right)=$$

$$=\left(\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{(a+b)^2}{2}+\frac{(a+b)^2}{4}\right)=$$

$$=\frac{4b^2+4ab+4a^2-3a^2-6ab-3b^2}{12}=\frac{a^2-2ab+b^2}{12}=\frac{(a-b)^2}{12}$$

Standartas

$$\sigma=\sqrt{D\xi}=\frac{|b-a|}{2\sqrt{3}}=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$ (b>a).

Dispersijos savybės

$D\xi=E(\xi-E\xi)^2$.

$D\xi>0$

$D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2$

Iš apibrėžimo seka, kad
$D\xi=E(\xi-E\xi)^2=E(\xi^2-\xi E\xi+(E\xi)^2)=E\xi^2-E(2\xi E\xi)+E(E\xi)^2=E\xi^2-2E\xi E\xi+(E\xi)^2=$
$=E\xi^2-(E\xi)^2=E\xi^2-E\xi^2$.
DC=0. Tikrai $DC=E(C-EC)^2=E(C-C)^2=E0=0$.
Jei a.d. ξ ir η nepriklausomi, tai $D(\xi+\eta)=D\xi+D\eta$, jei $E\xi\eta=E\xi E\eta$. Iš tikrųjų
$D(\xi+\eta)=E(\xi+\eta-E(\xi+\eta))^2=E(\xi+\eta-E\xi-E\eta)^2=E((\xi-E\xi)+(\eta-E\eta))^2=E(\xi-E\xi)^2+2E(\xi-E\xi)(\eta-E\eta)+E(\eta-E\eta)^2=D\xi+D\eta$, nes jei ξ ir η nepriklausomi, tai $E(\xi-E\xi)E(\eta-E\eta)=0*0=0$.

1 išvada. Baigtinio skaičiaus kas du nepriklausomų dydžių sumos dispersija yra lygi dispersijų sumai:

$$D(\sum_{k=1}^{n}\xi_k)=\sum_{k=1}^{n}D\xi_k.$$

2 išvada. $D(\xi+C)=D\xi+DC=D\xi$.

1 pvz.
Atsitiktinis dydis ξ pasiskirstęs pagal Koši pasisikristymo dėsnį, t.y. $p_\xi(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)},\ x\in R.$ Koks bus šio dėsnio vidurkis ir dispersija?

$E\xi$ egzistuoja tada, kai $\int_{-\infty}^{\infty}|x|\,p_\xi(x)dx<\infty.$
Košy pasiskirstymo atveju

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x|\frac{dx}{\pi(1+x^2)}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{xdx}{1+x^2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\ln(1+x^2)\Big|_0^{\infty}=\infty$$

Taigi integralas diverguoja. Vidurkis neegzistuoja, kartu neegzistuoja ir dispersija.

Aukštesnių eilių momentai

Be jau nagrinėtų skaitinių charakteristikų vidurkio ir dispersijos atsitiktinius dydžius apibūdina ir kitos skaitinės charakteristikos.
1 ap. A.d. ξ, k-osios eilės pradiniu momentu λ_n vadiname jo k-ojo laipsnio vidurkį, t.y. $\lambda_k=E\xi^k$, k=1,2,3… Iš šio apibrėžimo seka tokie teiginiai:

Jei a.d. ξ yra diskretusis, kurio paskirstymo dėsnis yra toks:

ξ	x_1	x_2	…	x_n	…
$P(\xi=x_i)$	p_1	p_2		p_n	

tai jo k-asis pradinis (paprastasis) momentas
$\lambda_k=E\xi^k=\sum_i x_i^k p_i$, o absoliutusis pradinis momentas $\beta_k=E|\xi|^k=\sum_i |x_i|^k p_i$.

Jei a.d. ξ yra tolydusis su tankio funkcija $p_\xi(x)$, tai $\lambda_k = E\xi^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p_\xi(x)dx,$ o absoliutusis pradinis momentas $\beta_k = E|\xi|^k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|^k p_\xi(x)dx.$ Pirmos eilės pradinis momentas yra jaunagrinėtas vidurkis. Toliau apibrėšime centrinius momentus.

2 ap. A.d. ξ, k-tosios eilės centriniu momentu μ_n vadiname jo nuokrypio nuo vidurkio k-tojo laipsnio vidurkį, t.y.

$\mu_k = E(\xi - E\xi)^k, k = 2,3...$ $\mu_1 = 0$ bet kokiam ξ.

Kai a.d. ξ yra diskretusis, tai $\mu_k = E(\xi - E\xi)^k = \sum_i (x_i - E\xi)^k p_i$, o jei a.d. ξ- tolydusis, tai $\mu_k = E(\xi - E\xi)^k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\xi)^k p_\xi(x)dx.$

Analogiškai apibrėžiami ir k-tosios eilės centriniai absoliutieji momentai:

$$\upsilon_k = E|\xi - E\xi|^k = \sum_i |x_i - E\xi|^k p_\xi$$

$$\upsilon_k = E|\xi - E\xi|^k = \int_{-\infty}^{\infty} |x - E\xi|^k p_\xi(x)dx.$$

Antros eilės centrinis momentas yra jau nagrinėta dispersija. Paminėsime kitas praktikoje dažnai taikomus a.d. skaitines charakteristikas.

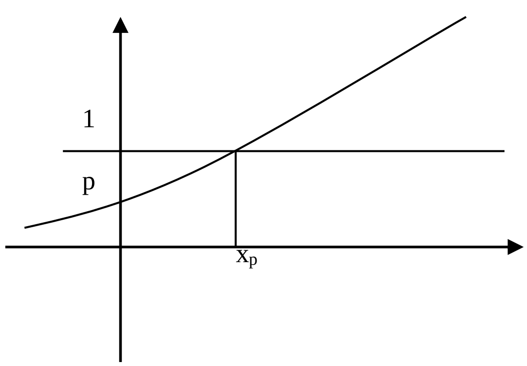
Trečios eilės centrinis momentas μ_3 apibūdina a.d. asimetrikšmumą. Todėl skaičių $\gamma_1 = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$ vadiname asimetrijos koeficientu.

Jei pasiskirstymas simetrikšas vidurkio atžvilgiu, asimetrijos koeficientas $\gamma_1 = 0$.

Skaičių $\gamma_2 = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$ vadiname ekscesu. Jis apibūdina pasiskirstymo tankio kreivės smailiaviršūniškumą.

3 ap. A.d. ξ, p-tos eilės kvantiliu vadiname skaičių x_p, kuris tenkina sąlygą $F_\xi(x_p) \le p \le F_\xi(x_p + 0), 0 < p < 1$.

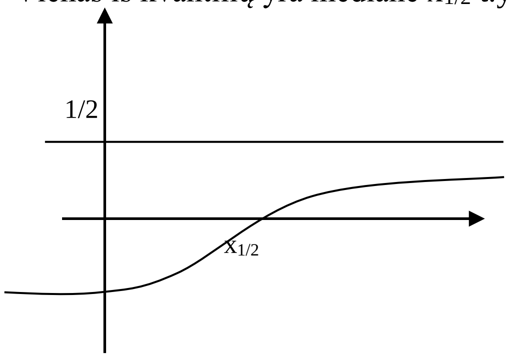
Kai ξ yra tolydusis a.d. p-tos eilės kvantilis yra lygties $F_\xi(x_p) = p$ sprendinys.



$$F_\xi(x_p) = P(\xi < x_p)$$

$$P(\xi < x_p) \le p \le \lim_{t \to x_p + 0} F_\xi(t)$$

Vienas iš kvantilių yra mediane $x_{1/2}$ t.y. $F(x_{1/2})=1/2$. T.y. $P(\xi<x_{1/2})=1/2$.



Dvimačio atsitiktinio dydžio skaitinės charakteristikos. Koreliacijos koeficientas

Vidurkio ir dispersijos neužtenka norint apibūdinti dvimatį a.d. Praktikoje dažnai naudojamos charakteristikos nusakančios ryšį tarp dydžių ξ ir η. Tai koreliacija ir koreliacijos koeficientas.

1 ap. Dviejų a.d. ξ ir η nuokrypių nuo jų vidurkių sandaugos vidurkį vadiname a.d. ξ ir η kovariacija ir žymime $Cov(\xi,\eta)=E(\xi-E\xi)(\eta-E\eta)$.

Savybės:

$\underline{cov(\xi,\xi)=D\xi}$

$\underline{cov(\xi,\eta)=cov(\eta,\xi)}$ (simetriškumo savybė)

2. Dydžius ξ ir η vadiname nekoreliuotais, jei $cov(\xi,\eta)=0$.
3. Jei a.d. ξ ir η nepriklausomi, tai jie yra nekoreliuoti, t.y. $cov(\xi,\eta)=0$.

Iš tikrųjų: $cov(\xi,\eta):=E(\xi-E\xi)(\eta-E\eta)=E(\xi\eta-\xi E\eta-\eta E\xi+E\xi E\eta)=E\xi\eta-E\xi E\eta=E\xi E\eta-E\xi E\eta=0$. Taigi $cov(\xi,\eta):=E(\xi-E\xi)(\eta-E\eta)=E\xi\eta-E\xi E\eta=0$. Atvirkštinis teiginys yra neteisingas. Jei $cov(\xi,\eta)=0$, tai nereikšia, kaad a.d. ξ ir η yra nepriklausomi.

4. $Cov(C_1\xi_1+C_2\xi_2,\eta)=C_1cov(\xi_1,\eta)+C_2cov(\xi_2,\eta)$.

$|cov(\xi,\eta)|<=\sqrt{D\xi D\eta}$

3 ap. Dviejų a.d. ξ ir η koreliacijos koeficientu vadiname dydį

$$\rho(\xi,\eta)=\frac{\operatorname{cov}\xi,\eta}{\sqrt{D\xi D\eta}}=\frac{E(\xi-E\xi)(\eta-E\eta)}{\sqrt{E(\xi-E\xi)^2E(\eta-E\eta)^2}}$$

Koreliacijos koeficientas yra kikybinė a.d. ξ ir η priklausomybės charakteristika.

Savybės.

$|\rho(\xi,\eta)|<=1$. Tai išplaukia iš 5 savybės.

Jei a.d. ξ ir η nepriklausomi, tai $\rho(\xi,\eta)=0$.

$|\rho(\xi,\eta)|=1$ tik tada, kai tarp ξ ir η yra tiesinė priklausomybė t.y. $\eta=a\xi+b$ ir atvirkščiai, jei $\eta=a\xi+b$, tai $\rho(\xi,\eta)=\pm1$.

Koreliacijos koeficientas apibūdina tiesinį tikimybinį ryšį. Jei $\rho(\xi,\eta)>0$, teigiama koreliacija: vienam dydžiui didėjant, antras turi tendenciją didėti. Jei $\rho(\xi,\eta)<0$ neigiama koreliacija : vienam dydžiui didėjant, kitas turi tendenciją mažėti.

Dabar panagrinėsime tris svarbius teoriniu požiūriu ir praktikoje pasiskirstymo dėsnius.

Normalusis (Gauso) pasiskirstymo dėsnis

Tai labai svarbus tolidžiųjų pasiskirstymų pavyzdys.

Ap. Sakome, kad a.d. ξ pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį, jei jo tankio funkcija

$$p_\xi(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, x \in R.$$

Parametrai a∈R, σ∈R. Simboliškai žymime $\xi - N(a,\sigma)$. Pasiskirstymo funkcija

$$F_\xi(x) = \Phi(x;n,\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} \exp\{-\frac{(y-a)}{2\sigma^2}\}dy.$$

Vidurkis.

$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x;a,\sigma)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} x\exp\{-\frac{(x-a)}{2\sigma^2}\}dx.$ Panaudoję keitinį (x-a)/σ=t ir Puasono integralą $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \sqrt{2\pi}$

Gauname

$$E\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma t + a)e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\sigma\int_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}dt + a\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} a\sqrt{2\pi} = a.$$

Taigi $a=E\xi$.

Dispersija.

Dξ=E(ξ-Eξ)²=E(ξ-a)²=$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$ =(1). (x-a)/σ=t, todėl dx=σdt.

(1)= $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma^2 t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sigma^2\int_0^{\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}dt = -\frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} tde^{-\frac{t^2}{2}} =$

$= -\frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} te^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_0^{\infty} + \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sigma^2$. Taigi parodėme, kad Dξ=E(ξ-a)²=σ².

Taigi parametrai, esantys a.d. ξ apibrėžime, turi tokią tikimybinę prasmę:

a-yra a.d. ξ vidurkis. σ- standartas $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$, kur σ^2 a.d. ξ dispersija. Normalųjį a.d. visiškai nusako vidurkis ir dispersija.

Asimetrijos koeficientas.

$\gamma_1 = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$, $\mu_3 = E(\xi - a)^3 = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-a)^3 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^3}} dx = 0$. Kadangi pointegrinė f-ja nelyginė. Tuomet $\gamma_1 = 0.$ Ekscesas

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{1}{\sigma^4}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-a)^4 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx - 3 =$$

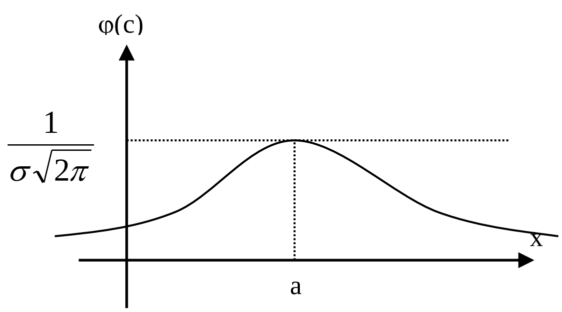
$$= \frac{1}{\sigma^4}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} t^4 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt - 3 = -\frac{1}{\sigma^4}\left(-\frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\sigma^2 \int\limits_{0}^{\infty} t^3 de^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\right) - 3 =$$

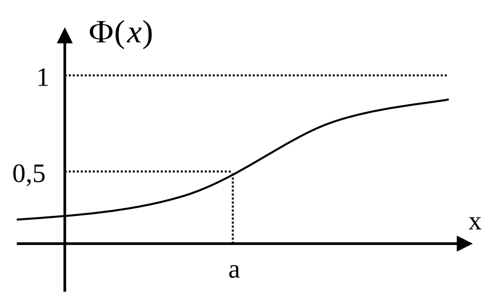
$$= \frac{2\cdot 3}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} t^2 dt - 3 = -\frac{6}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\sigma^2 \int\limits_{0}^{\infty} t de^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} - 3 = \frac{6}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt - 3 =$$

$$= \frac{6}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt - 3 = \frac{6}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sqrt{2\pi}}{2} - 3 = 3 - 3 = 0$$

Taigi $\gamma_2 = 0$. Imkime atskirą atvejį, kai a=0, σ=1, t.y. ξ - N(0,1).
Tai standartinis normalusis pasiskirstymas. Jo tankis

$\varphi(x) = \varphi(x;0,1) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$, $x \in R$, ir pasiskirstymo funkcija $\Phi(x) = \Phi(x;0,1) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$. Funkcijoms φ(x)=φ(-x) ir $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$ yra standartinės lentelės.





$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{a} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = 1/2.$$

labai daznai skaiciavimuose naudojama Laplaso f-ja:

$\Psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{1}{2}u^2}du, \quad \Psi(-x)=-\Psi(x)$. Teisinga lygybė

$P(u\le\xi\le b)=\Psi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right)-\Psi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) \quad (1), \quad m=E\xi$. Tikrai, nes

$$P(u\le\xi\le b)=\int_a^b \varphi(x;m,\sigma)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{a-m}{\sigma}}^{\frac{b-m}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{b-m}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt-\int_0^{\frac{a-m}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Psi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right)-\Psi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$$

1 pav. Gamykloje pagamintos detalės ilgis ξ - N(24,6;0,2). Jei detalės ilgis yra intervale 24-25 cm, tai ji atitinka techniniams reikalavimams. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai paimta detalė atitinka reikalavimams ?

a=24, b=25, m=24,6 , σ^2=0,04 .

$$P(24\le\xi\le 25)=\Psi\left(\frac{25-24{,}6}{0{,}2}\right)-\Psi\left(\frac{24-24{,}6}{0{,}2}\right)=\Psi(2)-\Psi(-3)=$$
$$=\Psi(2)+\Psi(3)=0{,}4772+0{,}4986=0{,}9758.$$

Šios tikimybės statisitinis aiškinimas: techninius reikalavimus vidutiniškai atitinka 97,58 proc gaminių.

σ-mų taisyklė. Kai ξ - N(m,σ) gauname šitokį nuokrypio nuo vidurkio tikimybės įvertį: P(|ξ-m|≤tσ)=2Ψ(t), t≥0. Tikrai panaudoję (1), gauname:

P(|ξ-m|≤tσ)= P(m-tσ≤ξ≤m+tσ)=

$$=\psi(\frac{m+t\sigma-m}{\sigma})-\psi(\frac{m-t\sigma-m}{\sigma})=$$
$$=\Psi(t)-\Psi(-t)=\Psi(t)+\Psi(t)=2\Psi(t)$$

Atskirais atvejais, kai t=1,2,3

tai

P(|ξ-m|≤tσ)=2Ψ(t)= $\begin{cases} 0{,}68\,, t=1, \\ 0{,}95\,, t=2, \\ 0.997, t=3 \end{cases}$

Tai rodo, kad normalusis dydis smarkiai koncentruotas vidurkio aplinkje.

Inžinierinėje praktikoje dažniausiai naudajame 2σ taisyklė.

Pastebėsime, kad normalieji a.d. yra stabilūs sudėties operacijos atžvilgiu: jei nepriklausomi a.d. ξ - N(m_1,σ_1), η - N(m_2,σ_2), tai ξ+η - N(m_1+m_2; $\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$). Normalusis dėsnis labai dažnai naudojamas praktikoje. Jis gerai apibūdina gyvų organizmų antropologinius duomenis (ūgį, svorį, krūrtinės apimtį), molekulių judėjimą dujose, vidutinę oro temperatūrą pasirinktame rajone, atsitiktinio triukšmo lygį, prietaisų paklaidas ir t.t.

Binominis ir Puasono dėsniai

Šie dėsniai yra diskrečiųjų pasiskirstymų pavyzdžiai.
1 ap. Sakame, kad a.d. ξ pasiskirstęs pagal binominį dėsnį, jei $P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad q = 1 - p, \forall k = \overline{0, n}.$ Dėsnis priklauso nuo abiejų parametrų: n ir 0<p<1. Simboliškia rašoma ξ - B(n,p). Norėdami apskaičiuoti skaitines charakteristikas, šį dydį išreiškime nepriklausomų ir vienodai pasiskirsčiusių a.d. suma: $\xi=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$.
Kikevieno dydžio pasisikirstymo dėsnis yra šis:

ξ_i	1	0
P	p	q

$\forall i, \quad i = \overline{1, n}.$

Vidurkis
$E\xi=E(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n)=E\xi_1+E\xi_2+\ldots+E\xi_n=nE_1=np$, nes $E\xi_1=1p+0q=p$. Savo ruožtu $D\xi=D(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n)= D\xi_1+\ldots+D\xi_n= nD_1=n(E\xi_1^2-(E\xi_1)^2)=n(1^2p+0^2q-p^2)=n(p-p^2)=np(1-p)=npq$. $\sigma^2=npq$, $\sigma = \sqrt{npq}$.
Analogiškai trečios eilės centrinis momentas:

$$\mu_3 = E(\xi - E\xi)^3 = \sum_{i=1}^{n} E(\xi_i - E\xi_i)^3 = \sum_{i=1}^{n} E(\xi_i - p)^3 = nE(\xi_1 - p)^3 =$$
$$= n\left[(1-p)^3 p + (0-p)^3 q\right] = n\left[(1-p)p(1-p)^2 - p^3 q\right] = npq\left[(1-p)^2 - p^2\right] =$$
$$= npq\left[1 - 2p + p^2 - p^2\right] = npq(1-2p).$$

Asimetrijos koeficientas
$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{npq(1-2p)}{npq\sqrt{npq}} = \frac{1-2p}{\sqrt{npq}}$. Kai $p=1/2$ (simetrikškas pasiskirstymas) $\gamma_1 = 1$. Iš Bernulio formulės $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ išplaukia, jog šis dėsnis naudotinas Bernulio eksperimantų schemoje, kai sprendžiamas uždavinys: atliekame n eksperimentų. Kokia tikimybė, kad įvykis *A* pasirodys k kartų, jei kiekviename eksperimente *P*(*A*)=*p*.

Kai eksperimentų skaičius n didelis, o tikimybė p maža, naudotina Puasono aproksimacija, o kai n didelis o p nėra maža, tinka normalinė aproksimacija (Muavro ir Laplaso teorema).
2 ap. Sakome, kad a.d. ξ pasiskirstęs pagal Puasono dėsnį jei $P(\xi = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \forall k = \overline{0, \infty}$. Dėsnis priklauso nuo vieno parametro λ>0. Simboliškai žymėsime ξ - P(λ). Vidurkis

$$E\xi = \sum_k x_k P(\xi = x_k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda.$$ Eξ=λ.

Vadinasi Puasono pasiskirstymą visiškai apibūdina jo vidurkis.
Dispersija:

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} - \lambda^2 = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} (k-1+1) \frac{\lambda^k}{(k-1)!} - \lambda^2 =$$

$$= e^{-\lambda} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{\lambda^k}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \right) - \lambda^2 = e^{-\lambda} \left(\lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \right) - \lambda^2 =$$

$$= e^{-\lambda} (\lambda^2 e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda}) - \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

$D\xi=\lambda$. Puasono dėsnis yra stabilus sudėties atžvilgiu: sudėdami du nepriklausomus Puasono a.d., gauname Puasono dydį, t.y. jei

ξ - $P(\lambda_1)$, η - $P(\lambda_2)$, tada

$P(\xi + \eta = m) = \dfrac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} (\lambda_1 + \lambda_2)^m}{m!}$ t.y. $\xi+\eta$ - $P(\lambda_1+\lambda_2)$.