VILNIAUS GEDIMINO TECHNIKOS UNIVERSITETAS
FUNDAMENTINIŲ MOKSLŲ FAKULTETAS
MATEMATINĖS STATISTIKOS KATEDRA

Kęstutis Kubilius

Papildomi analizės skyriai

3.4 variantas (2009 11 03)

Vilnius 2009

TURINYS

1. Aibių atvaizdžiai . . . 3
2. Ekvivalenčios aibės . . . 6
3. Skaičios aibės . . . 8
4. Kontinuumo galios aibės . . . 11
5. Aibių sistemos . . . 13
6. Borelio σ-algebra . . . 14
7. Funkcijos be antros rūšies trūkių . . . 15
8. Mati funkcija . . . 18
9. Aibės matas . . . 25
10. Integralas . . . 29
11. Baigtinės variacijos funkcijos . . . 37
12. Styltjeso integralas . . . 40
13. Metrinės erdvės . . . 41
14. Atviros ir uždaros aibės . . . 44
15. Sekos riba . . . 48
16. Tirštosios aibės . . . 49
17. Pilnosios metrinės erdvės . . . 50
18. Tolydūs metrinių erdvių atvaizdžiai . . . 54
19. Erdvės pildinys . . . 55
20. Sutraukiantysis atvaizdis . . . 55
21. Sutraukiančiojo atvaizdžio taikymas. Koši uždavinys . . . 56
22. Metrinių erdvių kompaktinės aibės . . . 58
23. Tiesinės erdvės . . . 60
24. Tiesiniai funkcionalai . . . 62
25. Normuotosios tiesinės erdvės . . . 64
26. Uždavinių atsakymai . . . 66

Literatūra . . . 66

1 Aibių atvaizdžiai

Aibės sąvoka yra pirminė ir neapibrėžiama naudojant kitas sąvokas. Ją galima tik paaiškinti sinonimais bei pavyzdžiais. Aibe vadiname rinkinį kokių nors objektų, sujungtų į vieną visumą pagal kurį nors požymį. Tačiau praktiškai apibūdinant aibes, nurodant jų charakteringąjį elementų požymį, susiduriama su sunkumais, kurie susiję su kalbos nevienareikšmiškumu. Todėl matematikoje buvo sukurtos aibių teorijos aksiomatikos. Jų čia nenagrinėsime.

Objektai, kurie sudaro aibę, vadinami aibės *elementais*. Aibė, neturinti nė vieno elemento, vadinama *tuščia* ir žymima $\emptyset$. Sutarta, kad tuščioji aibė yra kiekvienos aibės poaibis. Jeigu aibę sudaro baigtinis elementų skaičius, tai aibė vadinama baigtine. Tuščioji aibė pagal apibrėžimą yra baigtinė. Jeigu aibę sudaro begalinis elementų skaičius, tai ji vadinama *begaline*. Aibė, kurią sudaro vienas elementas, vadinama *vienelemente*.

1.1 apibrėžimas. *Sakykime, X, Y yra dvi aibės ir nurodytas dėsnis (taisyklė), kuris kiekvienam $x \in X$ priskiria vienintelį $y \in Y$. Tas dėsnis (taisyklė) yra vadinamas aibės X* ***atvaizdžiu*** *aibėje Y ir žymima $f\colon X \to Y$; $f\colon X \ni x \to f(x) \ni Y$; $y = f(x)$, $x \in X$.*

Atvaizdžio sinonimai yra terminai funkcija, operatorius, atitiktis, transformacija. Elementas $y = f(x)$ yra vadinamas funkcijos f reikšme taške x, aibė X – funkcijos f *apibrėžimo sritimi* (žymime $D(f)$), aibė y – funkcijos f *kitimo sritimi*, aibė $R(f) := \{f(x) \in Y\colon\ x \in X\}$ – funkcijos f reikšmių sritimi.

Jei $A \subset X$, $B \subset Y$, tai aibė

$$f(A) := \{f(x) \in Y\colon\ x \in A\}$$

yra vadinama aibės A *vaizdu*, o aibė

$$f^{-1}(B) := \{x \in X\colon\ f(x) \in B\}$$

– aibės B *pirmavaizdžiu*. Jeigu $B = \{y\}$, tai aibė

$$f^{-1}(y) := \{x\colon\ f(x) = y\}$$

yra vadinama elemento y *pirmavaizdžiu*.

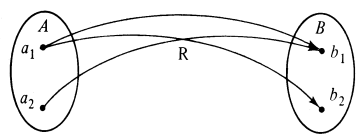
Jeigu $f(X) = Y$, tai atvaizdis f yra vadinamas aibės X *siurjekcija* į aibę Y arba aibės X atvaizdžiu *į aibę* Y. Vadinasi, $f\colon\ X \to Y$ yra siurjekcija, jei visiems $y \in Y$ egzistuoja $x \in X$ toks, kad $f(x) = y$.

Jeigu $f\colon X \to Y$, $\forall x_1,\ x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ turime, kad $f(x_1) \neq f(x_2)$, tai atvaizdis f vadinamas aibės X *injekcija* aibėje Y. Arba, jei visiems $y \in f(X) \subseteq Y$ egzistuoja vienintelis $x \in X$ toks, kad $f(x) = y$.

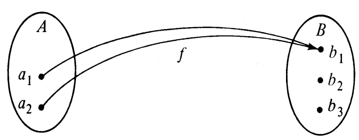
Jeigu $f\colon X \to Y$ yra ir injekcija, ir siurjekcija, tai atvaizdis f yra vadinamas *bijekcija* arba *abipusiškai vienareikšmiu atvaizdžiu* ir žymima $f\colon X \leftrightarrows Y$.

Jeigu $f\colon X \leftrightarrows Y$, tai funkcija $f^{-1}\colon Y \ni f(x) \to x$ yra vadinama funkcijos atvirkštine.

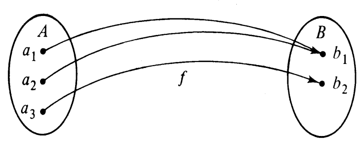
Aišku, jei funkcija f nėra bijekcija, tai jai atvirkštinė neegzistuoja. Iš tikrųjų, jei f nėra injekcija, tai kažkokiam elementui $y \in Y$ gali atitikti keletas elementų x iš aibės X, o tai prieštarauja funkcijos apibrėžimui. Jei f nėra siurjekcija, tai aibėje Y bus elementų, kuriems X nėra pirmavaizdžių, t.y. šiems elementams atvirkštinė funkcija neapibrėžta.



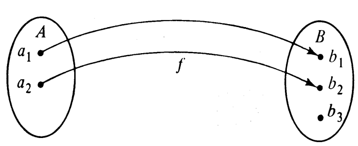
(a)



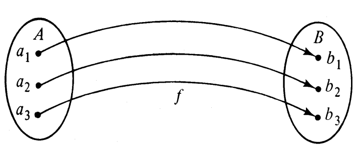
(b)



(c)



(d)



Paveikslėlyje (a) pavaizduotas ryšys nėra funkcija. Paveikslėlyje (b) – funkcija, paveikslėlyje (c) – siurjekcija, paveikslėlyje (d) – injekcija, o paskutiniame – bijekcija.

1 pvz. Tarkime $X = Y = \mathbb{R}$ ir $f(x) = 3x - 2$, $x \in \mathbb{R}$. Tada f yra bijekcija. Atvirkštinė funkcija bus $x = (y + 2)/3$.

2 pvz. Tarkime, kad $X = Y = \mathbb{R}$. Funkcija $f(x) = x^2$ nėra siurjekcija, nes neigiami skaičiai iš $Y = \mathbb{R}$ nėra vaizdai elementų iš $X = \mathbb{R}$, kai $f\colon X \to Y$.

3 pvz. Tarkime, kad $X = Y = \mathbb{R}$ ir

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \leqslant 0, \\ x, & x > 0. \end{cases}$$

Ši funkcija nėra siurjekcija, nes aibės X vaizdas nesutampa su aibe Y, t.y. egzistuoja tokių $y \in Y$, kurie nepriklauso $f(X)$.

4 pvz. Raskite bijekciją, t.y. abipusiškai vienareikšmį atvaizdį, tarp aibių $X = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ir $Y = \{2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}$.

Kiekvienam aibės X elmentui n priskiriame aibės Y elementą $2n$. Taigi sukonstravome bijekciją $f\colon\ X \to Y$, kurios analizinė išraiška $f(n) = 2n$.

5 pvz. Raskite bijekciją tarp aibių $X = [0, 1]$ ir $Y = [a, b]$, $a < b$.

Pasinaudoję tiesės lygtimi per du taškus, t.y.

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

ir paėmę $y_1 = a$, $y_2 = b$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ gausime, kad atvaizdis $f(x) = a + (b - a)x$ yra bijekcija.

6 pvz. Įrodykite, kad funkcija $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ apibrėžta lygybe $f(x) = x^3 - x + 1$ nėra injekcija.

Kadangi $f(x) = x(x^2 - 1) + 1$, tai $f(1) = 1$ ir $f(-1) = 1$. Dviem skirtingoms argumento reikšmėms gauname tą pačią funkcijos reikšmę. Todėl ši funkcija nėra injekcija.

7 pvz. Ar funkcija $f\colon\ \mathbb{N}\backslash\{1\} \to \mathbb{N}$ apibrėžta lygybe $f(n) = n + (-1)^n$ yra bijekcija?

Ji nebus bijekcija, nes nėra siurjekcija. Funkcija f aibę $\mathbb{N}\backslash\{1\}$ atvaizduoja į $\mathbb{N}\backslash\{1\}$, t.y. $f(\mathbb{N}\backslash\{1\}) = \mathbb{N}\backslash\{1\}$, o ne $f(\mathbb{N}\backslash\{1\}) = \mathbb{N}$ kaip turėtų būti siurjekcijos atveju.

Užduotys

1. Ar funkcija $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, apibrėžta lygybe $f(x) = \begin{cases} 3 + x, & \text{kai } x < 0, \\ 4 - x, & \text{kai } x \geqslant 0 \end{cases}$ yra injekcija?

2. Tarkime, $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, apibrėžta lygybe $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{kai } x \leqslant 1, \\ ax+b, & \text{kai } x \in (1,2), \\ x+1, & \text{kai } x \geqslant 2. \end{cases}$

Parinkite a ir b taip, kad funkcija būtų bijekcija.

3. Ar atvaizdis $f(x) = \begin{cases} x, & \text{kai } x \in (-\infty, 0), \\ -x^2, & \text{kai } x \in [0,2), \\ x-1, & \text{kai } x \in [2, +\infty) \end{cases}$ yra siurjekcija, injekcija, bijekcija iš $\mathbb{R}$ į $\mathbb{R}$?

4. Įrodykite, kad funkcija $f\colon\ [1,\infty) \to [0,\infty)$ apibrėžta lygybe $f(x) = x - \frac{1}{x}$ yra bijekcija.

5. Ar funkcija $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ apibrėžta lygybe $f(x) = \min(x, x^2)$ yra siurjekcija?

6. Įrodykite, kad funkcija $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ apibrėžta lygybe $f(x) = x^3 + x + 1$ yra injekcija.

7. Ar atvaizdis $f(z) = z + (-1)^{|z|}$ yra bijekcija iš $\mathbb{Z}$ į $\mathbb{Z}$? Čia $\mathbb{Z}$ yra sveikųjų skaičių aibė.

8. Pažymėkime lyginių skaičių poaibį iš $\mathbb{Z}$ raide $\mathbb{L}$. Sukonstruokite bijekciją iš $\mathbb{L}$ į $\mathbb{N}$.

9. Sukonstruokite bent vieną bijekciją tarp $[0,1)$ ir $[0,\infty)$.

10. Ar funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ -x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

yra bijekcija? Čia $\mathbb{Q}$ yra racionaliųjų skaičių aibė.

11. Sukonstruokite bijekciją iš $\mathbb{Q} \cap [a,b]$ į $\mathbb{Q} \cap [c,d]$. Čia $a < b$, $c < d$, $\mathbb{Q}$ – racionaliųjų skaičių aibė.

2 Ekvivalančios aibės

Pamėginsime rasti būdus aibėms palyginti pagal jų elementų gausumą.

Jei turime dvi baigtines aibes A ir B, tai nustatyti, kurioje iš jų daugiau elementų, galime šitaip. Suskaičiuokime aibės A elementus, t.y. kiekvienam aibės A elementui priskirkime iš eilės po vieną natūralųjį skaičių. Tą patį padarykime ir su aibės B elementais. Palyginę vienos ir kitos aibės elementų skaičių, galėsime pasakyti, kuri iš aibių turi daugiau elementų, o gal abi turi jų po lygiai. Pastebėsime, kad tvarka, kuria skaičiuosime elementus, visai nesvarbu. Tačiau galime palyginti abiejų aibių elementų skaičius ir neskaičiuodami jų elementų. Tuo tikslu pakanka kiekvienam aibės A elementui priskirti lygiai vieną aibės B elementą. Jei liks aibės A elementų, tai joje yra daugiau elementų, negu aibėje B. Pagaliau, jei neliks nei vieno aibės A ir nei vieno aibės B elemento, tai abi aibės turi vienodą elementų skaičių. Pastaruoju atveju tarp abiejų aibių bus nustatyta abipusiškai vienareikšmė atitinkamybė, t.y. bijekcija. Kokia tvarka priskiriame vienos aibės elementus kitos aibės elementams, – mums vistiek, svarbu tik, kad egzistuotų abipusiškai vienareikšmė atitinkamybė.

Nagrinėkime begalines aibes. Kaip jas palyginti? Mes negalime kalbėti apie jų elementų skaičių, kaip baigtinių aibių atveju. Kiekybine bet kokios aibės charakteristika, kuri apibendrina aibės elementų skaičiaus sąvoką, yra aibės galia.

2.1 apibrėžimas. *Dvi aibės vadinamos* ***ekvivalenčiomis*** *arba vienodos galios, jei tarp jų galima nustatyti abipusiškai vienareikšmę atitiktį. Aibių ekvivalentumą žymėsime* $A \sim B$.

Taigi, jų palyginimui, kaip ir baigtinių aibių atveju, pakanka sukonstruoti bijekciją.

Dvi baigtinės aibės yra ekvivalenčios tada ir tik tada, kai jos turi tą patį elementų skaičių. Kiekvienai aibei priskiriame simbolį, kurį vadinsime aibės kardinaliniu skaičiumi arba galia. Baigtinės aibės A galia laikysime jos elementų skaičių N_A ir rašome $\operatorname{card} A = N_A$. Tuščia aibė $\emptyset$ turi galią lygią nuliui, t.y. $\operatorname{card} \emptyset = 0$.

Nusakant abiejų aibių ekvivalentumą, pakanka nurodyti bent vieną abipusiškai vienareikšmę atitiktį tarp šių aibių.

1 pvz. Raskime bijekciją tarp aibių $\mathbb{Z}$ ir $\mathbb{N}$.

Funkcija

$$f_1(z) = \begin{cases} 2z + 1, & \text{kai } z \geqslant 0, \\ 2|z|, & \text{kai } z < 0, \end{cases} \qquad z \in \mathbb{Z},$$

(t.y. neneigiamam skaičiui $z \geqslant 0$, $z \in \mathbb{Z}$, priskiriame nelyginį natūralųjį skaičių $2z + 1$, o neigiamam skaičiui $z < 0$, $z \in \mathbb{Z}$, – lyginį natūralųjį skaičių) yra bijekcija tarp aibių $\mathbb{Z}$ ir $\mathbb{N}$.

Funkcija

$$f_2(n) = \left[\frac{n}{2}\right](-1)^n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

irgi yra bijekcija tarp aibių $\mathbb{N}$ ir $\mathbb{Z}$. $\square$

2 pvz. Įrodykite, kad aibės $\mathbb{R}$ ir $(0, 1)$ yra ekvivalenčios. Pakanka sukonstruoti bent vieną bijekciją tarp nagrinėjamų aibių. Žinome, kad

$$\operatorname{tg} x\colon\ (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R} \qquad \text{ir} \qquad \operatorname{ctg} x\colon\ (0, \pi) \to \mathbb{R}.$$

Norėdami pritaikyti šias funkcijas, turime sukonstruoti funkcijas, kurios intervalą $(0, 1)$ atvaizduoja į intervalą $(-\pi/2, \pi/2)$ arba $(0, \pi)$. Kadangi tiesinės funkcijos

$$g(x) = \pi\left(x-\frac{1}{2}\right)\colon\ (0,1) \to (-\pi/2, \pi/2) \qquad \text{ir} \qquad h(x) = \pi\, x\colon\ (0,1) \to (0,\pi),$$

tai sudėtinės funkcijos

$$\operatorname{tg}(g(x)) = \operatorname{tg}\, \pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\colon\ (0,1) \to \mathbb{R}, \qquad \operatorname{ctg}(h(x)) = \operatorname{ctg}\, \pi x\colon\ (0,1) \to \mathbb{R}.$$

Panašiai samprotaujant, galima įrodyti, kad

$$\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\colon\ \mathbb{R} \to (0,1) \qquad \text{ir} \qquad \frac{1}{\pi}\operatorname{arcctg} x\colon\ \mathbb{R} \to (0,1).$$

Nesunku pastebėti, kad funkcija

$$\ln\frac{x}{1-x}\colon\ (0,1) \to \mathbb{R}. \qquad \square$$

Iš ekvivalentumo apibrėžimo betarpiškai išplaukia tokios ekvivalentumo savybės:

1) $A \sim A$ (refleksyvumas);
2) jeigu $A \sim B$, tai $B \sim A$;
3) jeigu $A \sim B$, $B \sim C$, tai $A \sim C$.

Užduotys

1. Įrodykite, kad aibės $\mathbb{R}$ ir (a,b) yra ekvivalenčios.
2. Įrodykite, kad aibės $[\pi, 3\pi)$ ir $[3,\infty)$ yra ekvivalenčios.
3. Įrodykite, kad aibės $[3\pi,\infty)$ ir $[0,\pi)$ yra ekvivalenčios.

3 Skaičios aibės

Tarp begalinių aibių savo paprastumu išsiskiria natūraliųjų skaičių aibė. Aibės, ekvivalenčios natūraliųjų skaičių aibei, yra vadinamos *skaičiomis* aibėmis. Visos kitos begalinės aibės vadinamos neskaičiomis.

Aibė yra skaiti, jei jos elementus galima sunumeruoti natūraliaisiais skaičiais, naudojant visus tokius skaičius, taip, kad skirtingi elementai turėtų skirtingus numerius.

1 pvz. Imkime $\mathbb{Z}$. Sveikųjų skaičių aibė yra skaiti, nes aibės $\mathbb{Z}$ ir $\mathbb{N}$ yra ekvivalenčios, nors ir $\mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$. Lyginių skaičių aibė $\{2,4,6,8,\ldots\}$ yra skaiti, nes tarp aibių $\{2,4,6,8,\ldots\}$ ir $\mathbb{N}$ galima sukonstruoti bijekciją $n \leftrightarrow 2n$, nors ir $\{2,4,\ldots,2n,\ldots\} \subset \mathbb{N}$. $\square$

Priminsime, kad jei dvi aibės yra ekvivalenčios, tai sakoma, kad jos yra *vienodos galios*. Natūraliųjų skaičių aibės galią arba kardinalinį skaičių žymėsime $\operatorname{card}\mathbb{N}$. Taigi $\operatorname{card}\mathbb{Z} = \operatorname{card}\{2, 4, \ldots, 2n, \ldots\} = \operatorname{card}\mathbb{N}$.

Galima įrodyti, kad natūraliųjų skaičių aibės $\mathbb{N}$ galia yra mažiausia tarp visų begalinių aibių galių.

3.1 teorema. *Iš kiekvienos begalinės aibės galima išskirti skaitų poaibį.*

Įrodymas. Sakykime, turime begalinę aibę A. Imkime kurį nors jos elementą a_1. Kadangi aibė begalinė, tai aibė $A - \{a_1\}$ bus taip begalinė ir iš jos galima išskirti elementą a_2. Aibė $A - \{a_1, a_2\}$ – taip pat begalinė. Iš jos galime išskirti elementą a_3. Ši procesą galėsime tęsti neapibrėžtai ilgai. Gausime elementų seką $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ kuri sudarys aibės A poaibį.

3.2 teorema. *Kiekvienos skaičios aibės poaibis yra baigtinis arba skaitus.*

Įrodymas. Sakykime, A – skaiti aibė, B – jos poaibis. Sunumeruosime A elementus natūraliaisiais skaičiais: $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Peržvelgsime dabar iš eilės visus šiuos elementus ir išrinksime iš jų aibės B elementus, išdėstydami juos ta tvarka, kuria jie pasitaikys tarp aibės A elementų: $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots$ Gausis arba baigtinė aibė arba begalinė seka. Pastaruoju atveju turėsime, kad B yra skaiti.

3.1 išvada. *Jei iš skaičios aibės atimsime baigtinę aibę, tai skirtumas bus skaiti aibė.*

Įrodymas. Sakykime, A – skaiti, B – baigtinė aibė. Jei skirtumas $A - B$ būtų baigtinė aibė, tai aibė $(A - B) + B$ būtų baigtinė, o to negali būti, nes $A \subset (A - B) + B$. Tuo būdu, $A - B$ yra begalinė aibė. Tačiau $A - B \subset A$, todėl pagal 3.2 teoremą ji yra skaiti.

3.3 teorema. *Skaičių aibių skaiti suma yra skaiti.*

Įrodymas. Sakysime turime skaičią sistemą aibių $A_1, A_2, \ldots$ Aibes ir jų elementus užrašykime tokiu būdu

$$\begin{aligned} A_1 &= \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14} \ldots\}\,, \\ A_2 &= \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24} \ldots\}\,, \\ A_3 &= \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34} \ldots\}\,, \\ A_4 &= \{a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44} \ldots\}\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Teoremos įrodymui pakanka rasti būdą, kaip parašyti sekos pavidalu visus šiuos elementus, iš pasikartojančių imant tik po vieną elementą. Tai galima atlikti šitaip:

$$a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, a_{41}, a_{32}, a_{23}, a_{14}, \ldots$$

Pradžioje imame elementus, kurių abiejų indeksų suma yra 2, po to tuos, kurių indeksų suma yra 3, toliau – suma 4, suma – 5 ir t.t. Iš pasikartojančių elementų imsime tik po vieną elementą. Tuo būdu išsemsime visų aibių visus skirtingus elementus, t.y. tų aibių sumą. Gausime begalinę seką, nes į ją įeis, pavyzdžiui, visi aibės A_1 elementai. Taigi suma yra skaiti aibė.

Būdas, kuriuo sunumeravome aibių sumos elementus, nėra vienintelis. Galėjome juos numeruoti, skysime, ir šitaip:

$$a_{11}, a_{21}, a_{22}, a_{12}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{23}, a_{13}, \ldots;$$
$$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, a_{14}, a_{23}, a_{32}, a_{41}, \ldots$$

3.4 teorema. *Visų racionaliųjų skaičių aibė yra skaiti.*

Įrodymas. Sakykime, $\forall k \in \mathbb{N}$

$$E_k = \left\{\frac{k}{1}, \frac{k}{2}, \frac{k}{3}, \ldots\right\}.$$

Tada $E_k \sim \mathbb{N}$ ir iš 3.3 teoremos išplaukia, kad $\cup_{k=1}^{\infty} E_k \sim \mathbb{N}$. Taigi visų teigiamų racionaliųjų skaičių aibė yra skaiti.

Analogiškai, visų neigiamųjų racionaliųjų skaičių aibė yra ekvivalenti aibei $\mathbb{N}$. Taigi aibė $\mathbb{Q}$ yra skaiti. $\square$

Dviejų aibių A ir B *saundauga* vadiname visumą dvejetų (a, b), čia a yra bet kuris aibės A elementas, o b – bet kuris aibės B elementas, ir žymime $A \times B$. Dažnai taip apibrėžta aibių sandauga vadinama Dekarto sandauga.

2 pvz. $A = \{a, b, c\}$, $B = \{c, d\}$, tai

$$A \times B = \{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, c), (c, d)\}.$$

Jei aibė A turi m, o B – n elementų, tai, aišku, $A \times B$ turi $m \cdot n$ elementų. $\square$

Bendru atveju saundaga $A \times B$ nėra komutatyvi, t.y. $A \times B \neq B \times A$.

3 pvz. $E = [1, 2]$, $F = [3, 4]$, tai $E \times F \neq F \times E$. $\square$

Jei $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – bet kokios aibės, tai jų sandauga $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \mathop{X}\limits_{k=1}^{n} A_n$ vadiname visumą elementų $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, kur $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nepriklausomai vienas nuo kito perbėga atitinkamai visus aibių $A_1, A_2, \ldots, A_n$ elementus. Analogiškai, aibių sekos $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ sandauga $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \times \ldots = \mathop{X}\limits_{k=1}^{\infty} A_n$ vadiname aibę visų sekų $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$, kur $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ nepriklausomai vienas kito perbėga atitinkamai visus aibių $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ elementus. Paprastai sandaugą $A \times A$, $A \times A \times A$ ir t.t. žymi A^2, A^3 ir t.t.

3.5 teorema. *Baigtinio skaičiaus skaičių aibių sandauga yra skaiti.*

Įrodymas. Šią teoremą įrodysime tik dviejų aibių atveju. Bendru atveju jos įrodymą galima rasti [2] knygoje. Nagrinėkime dvi aibes $A = \{a_1, \dots, a_n, \dots\}$ ir $B = \{b_1, \dots, b_n, \dots\}$. Pagal apibrėžimą jų sandauga yra sudaryta iš visų galimų dvejetų (x_1, x_2), kur x_1 perbėga visus aibės A elementus, o x_2 – visus aibės B elementus. Teisinga lygybė $A \times B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{(a_1, b_n), (a_2, b_n), (a_3, b_n), \dots\}$. Kadangi aibės $\{(a_1, b_n), (a_2, b_n), (a_3, b_n), \dots\}$ yra skaičios, tai ir jų suma yra skaiti. Tai seka iš 3.3 teoremos.

4 pvz. Įrodykite, kad $\mathbb{R}^n$ taškų aibė $\{(r_1, r_2, \dots, r_n)\}$, kurių koordinatės yra racionalieji skaičiai, yra skaiti.

Kadangi vektorius $(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{Q}^n$, o $\mathbb{Q}^n$ yra baigtinio skaičiaus (n yra fiksuotas baigtinis skaičius) skaičių aibių sandauga, tai vektorių aibė $\{(r_1, \dots, r_n)\}$ yra skaiti.

Užduotys

1. Įrodykite, kad aibė $\{e^n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$ yra skaiti.
2. Įrodykite, kad visų plokštumos apskritimų, kurių centrai turi racionaliąsias koordinates ir kurių spinduliai yra racionalieji skaičiai, aibė yra skaiti.
3. Raskite aibės galią, jei ji sudaryta iš visų baigtinių dešimtainių trupmenų.
4. Raskite funkcijos $x - [x]$ trūkio taškų aibės galią. Čia $[x]$ – sveikoji x dalis, t.y. $[x]$ yra didžiausias sveikasis skaičius, neviršijantis x.
5. Įrodykite, kad jei atstumas tarp bet kokių dviejų tiesės aibės A taškų yra didesnis už vienetą, tai aibė A yra baigtinė arba skaiti.
6. Sakykime, kad nagrinėjame tolydžias iš dešinės ir turinčias ribas iš kairės monotonines funkcijas apibrėžtas intervale $[a, b,\ a < b$. Įrodykite, kad tokių monotoninių funkcijų trūkio taškų aibė yra baigtinė arba skaiti.

4 Kontinuumo galios aibės

Gali susidaryti įspūdis, kad visos begalinės aibės yra skaičios. Tačiau taip nėra.

4.1 lema. (Įdėtųjų intervalų lema) *Jei* $([a_n, b_n])$ *uždarųjų intervalų seka ir* $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots$, *tai egzistuoja realusis skaičius, priklausantis visiems intervalams* $[a_n, b_n]$.

Įrodysime, kad intervalas $[0, 1]$, taigi juo labiau ir platesnė aibė $\mathbb{R}$, yra neskaičios aibės. Kadangi racionaliųjų skaičių aibė $\mathbb{Q}$ yra skaiti, tai reikš, kad $\mathbb{Q}$ galia yra mažesnė už $\mathbb{R}$ galią ir net už intervalo $[0,1]$ galią, t.y. kad racionaliųjų skaičių yra „ daug mažiau" negu realiųjų skaičių.

4.1 teorema. *Intervalas* $[0,1]$ *yra neskaiti aibė.*

Įrodymas. Tarkime priešingai teoremos teiginiui, kad $[0,1]$ – skaiti aibė. Tada visus aibės $[0,1]$ elementus galima parašyti sekos pavidalu $x_1, x_2, \ldots$ Padalinkime intervalą $[0,1]$ į tris vienodo ilgio intervalus $[0,\frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$, $[\frac{2}{3},1]$. Nė vienas realusis skaičius negali priklausyti visiems trims intervalams, todėl x_1 nepriklauso bent vienam iš šių intervalų. Pažymėkime $[a_1,b_1]$ tą iš intervalų $[0,\frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$, $[\frac{2}{3},1]$, kuriam nepriklauso x_1. Intervalą $[a_1,b_1]$ vėl dalykime tokiu pat būdu į tris dalis ir pažymėkime $[a_2,b_2]$ tą dalį, kuriai nepriklauso x_2. Jei jau išrinkti intervalai $[a_1,b_1] \supset \cdots \supset [a_n,b_n]$ ir $x_k \notin [a_k,b_k]$ su visais $k \leqslant n$, tai, dalydami intervalą $[a_n,b_n]$ į tris lygias dalis, vėl galime pažymėti $[a_{n+1},b_{n+1}]$ tą dalinį intervalą, kuriam nepriklauso x_{n+1}. Taigi įrodėme, kad galime sukonstruoti monotoniškai mažėjančią intervalų seką $[a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \cdots$, turinčią savybę, kad $x_n \notin [a_n,b_n]$. Pagal įdėtų intervalų lemą egzistuoja realusis skaičius c, priklausantis visiems šiems intervalams ir juo labiau intervalui $[0,1]$. Bet jis nesutampa nė su vienu sekos $x_1, x_2, \ldots$ nariu, nes, jei jis būtų lygus kuriam nors sekos nariui, sakykime x_k, tai negalėtų priklausyti intervalui $[a_k,b_k]$. Gauta prieštara įrodo, kad aibė $[0,1]$ negali būti skaiti. $\square$

Jei $a < b$, tai funkcija $\varphi(x) = a + x(b-a)$ yra bijekcija $[0,1] \to [a,b]$, t.y. $[a,b] \sim [0,1]$, todėl ir $[a,b]$ yra neskaiti aibė. Aibės, ekvivalenčios intervalui $[0,1]$, yra vadinamos *kontinuumo galios* aibėmis, arba tiesiog – *kontinuumais.*

4.2 teorema. *Jei prie begalinės neskaičios aibės A pridėsime baigtinę arba skaičią aibę B, tai gautoji aibė bus ekvivalenti aibei A, t.y. $A + B \sim A$.*

4.3 teorema. *Jei iš begalinės neskaičios aibės A atimsime baigtinę arba skaičią aibę B, tai gautoji aibė $A - B$ bus ekvivalenti aibei A.*

Pvz. 1) Iš 4.3 teoremos išplaukia, kad $(0,1) \sim [0,1]$. Galima ir tiesiogiai sukonstruoti bijekciją tarp $(0,1)$ ir $[0,1]$. Iš intervalo $(0,1)$ pasirenkame skaičių seką $x_n = \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. (Sekos pasirinkimas nėra vienintelis. Seką galime pasirinkti daugeliu būdų.) Bijekcija $f\colon\ [0,1] \to (0,1)$ konstruojama taip:

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{2}, \quad f(1) = \frac{1}{3}, \quad f(x_n) = x_{n+2},\ n \in \mathbb{N}, \\ f(x) &= x, \quad \text{kai } x \in (0,1) \setminus \{x_n,\ n \geqslant 1\}. \end{aligned}$$

2) Aibė $\mathbb{R}$ turi kontinuumo galią, nes, pvz., funkcija $f(x) = \ln \frac{x}{1-x}$ yra bijekcija tarp $(0,1)$ ir $\mathbb{R}$.

3) Iracionaliųjų skaičių aibė iš $\mathbb{R}$ turi kontinuumo galią (žiūr. 4.3 teoremą).

4) Visų tolydžių funkcijų, apibrėžtų intervale $[0, 1]$, aibė turi kontinuumo galią. $\square$

Egzistuoja ne tik skaičios galios, kontinuumo galios aibės, bet ir didesnės galios aibės. Egzistuoja kiek norima dideli kardinaliniai skaičiai.

Pvz. 1) Visų realiųjų funkcijų, apibrėžtų intervale $[0, 1]$, aibė turi galią didesnę nei kontinuumas.

2) Visų abės $\mathbb{R}$ poaibių aibės galia yra didesnė, nei kontinuumas.

5 Aibių sistemos

Tarkime aibė $\mathcal{S}$ yra aibių sistema. Aibė V yra vadinama aibių sistemos *vienetu*, jei $V \in \mathcal{S}$ ir kiekviena sistemos $\mathcal{S}$ aibė yra V poaibis.

Pvz. $\mathcal{S} = \Big\{\{1, 2\}, \{7\}, \{1, 2, 7, 9\}\Big\}$, $V = \{1, 2, 7, 9\}$.

5.1 apibrėžimas. *Netuščia aibių sistema $\mathcal{A}$ vadinama aibių algebra, jei*

1) *sistemai priklauso vienetas,*

2) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A},\ A \cap B \in \mathcal{A}$*,*

3) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$*.*

2) sąlygoje pakanka reikalauti, kad arba $A \cup B \in \mathcal{A}$, arba $A \cap B \in \mathcal{A}$, nes $A \cup B = \overline{(\overline{A} \cap \overline{B})}$, $A \cap B = \overline{(\overline{A} \cup \overline{B})}$.

Pvz. 1. Bet kurios aibės visų poaibių sistema yra algebra.

2. $\mathcal{A} = \{\emptyset, A\}$, čia $A \neq \emptyset$, yra algebra.

3. Nagrinėkime aibių sistemą $\mathcal{S} = \{\{1, 2\}, \{4\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$. Ji nėra algebra. Visada šią aibių sistemą galime papildyti aibėmis iki ji taps algebra. Štai keli pildiniai:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \Big\{\emptyset, \{1,2,3,4,5\}, \{1,2\}, \{3,4,5\}, \{4\}, \{1,2,3,5\}, \{1,2,4\}, \{3,5\}\Big\},\\
\mathcal{A}_1 &= \Big\{\emptyset, \{1,2,3,4,5\}, \{1\}, \{2,3,4,5\}, \{1,2\}, \{3,4,5\}, \{4\}, \{1,2,3,5\}, \{1,2,4\},\\
&\quad \{3,5\}, \{1,4\}, \{2,3,5\}, \{1,3,4,5\}, \{2\}, \{1,3,5\}, \{2,4\}\Big\},\\
\mathcal{F} &= \Big\{\text{visi galimi aibės } \{1,2,3,4,5\} \text{ poaibiai}\Big\}. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Netuščia aibių sistema $\mathcal{F}$ vadinama aibių σ-*algebra*, jei ji yra algebra ir, jei $A_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$, tai $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ arba $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Tarkime, V yra aibių sistemos $\mathcal{S}$ vienetas. $\mathcal{S}$ visada galima papildyti naujomis aibėmis – V poaibiais, kad ji virstų σ-algebra. Pakanka tą sistemą papildyti iki visų aibės V poaibių sistemos. Tačiau kartais galima elgtis ekonomiškiau – imti mažiau papildomų aibių. Tarp visų σ-algebrų, kurioms priklauso sistemos $\mathcal{S}$ aibės, yra pati negausiausia $\sigma(\mathcal{S})$, kuri vadinama σ-algebra, generuota sistemos $\mathcal{S}$, arba mažiausia σ-algebra, kuriai priklauso $\mathcal{S}$. Visada egzistuoja vienintelė tokia σ-algebra, t.y. σ-algebra turinti savybes: a) $\mathcal{S} \subset \sigma(\mathcal{S})$; b) jei $\mathcal{S}$ priklauso kuriai nors aibės V poaibių sistemos σ-algebrai $\mathcal{A}$, tai ir $\sigma(\mathcal{S}) \subset \mathcal{A}$.

Aukščiau pateiktame pavyzdyje mes papildėme aibių sistemą $\mathcal{S}$ iki algebros. Mažiausia algebra, generuota aibių sistemos $\mathcal{S}$, yra algebra $\mathcal{A}$, kurią žymėsime $a(\mathcal{S})$.

1 pvz. Ar aibių sistema $\{[2,5],(1,4),\emptyset,(1,5]\}$ yra algebra?

Aibių sistema $\{[2,5],(1,4),\emptyset,(1,5]\}$ nėra algebra, nes, pvz., aibės $[2,5]$ papildinys nepriklauso šiai aibių sistemai. Šios aibių sistemos vienetas yra aibė $(1,5]$. Aibių sistema

$$\{(1,5],\emptyset,[2,5],(1,2),(1,4),[4,5],(1,2)\cup[4,5],[2,4)\}$$

bus algebra.

Užduotys

1. Sukonstruokite mažiausias algebras generuotas aibių sistemų $\mathcal{S} = \{\{1\},\{1,2,3,4\}\}$ ir $\mathcal{G} = \{\{1,3\},\{1,2,3,4\}\}$. Ar jos sutampa?

2. Ar aibių sistema $\{(2,4],\{1\},\emptyset\}$ yra algebra? Jei ji nėra algebra, tai šią aibių sistemą papildyti aibėmis taip, kad ji būtų algebra.

6 Borelio σ-algebra

Labai svarbus generuotos σ-algebros pavyzdys yra *Borelio* σ-algebra tiesėje, kurią galime apibrėžti

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\Big(\{(a,b):\ a,b\in\mathbb{R}\}\Big).$$

Borelio σ-algebros $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ aibės vadinamos *Borelio* aibėmis.

Priminsime, kad jei aibių rinkinys $\mathcal{A}$ yra σ-algebros $\mathcal{G}$ poaibis, tai $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{G}$. Vadinasi, norint parodyti, kad $\sigma(\mathcal{A}_\alpha)$=$\sigma(\mathcal{B}_\beta)$ dviem skirtingoms aibių sistemoms $\{\mathcal{A}_\alpha\}$ ir $\{\mathcal{B}_\beta\}$, reikia įrodyti, kad $\mathcal{A}_\alpha \in \sigma(\mathcal{B}_\beta)$ visiems α ir kad $\mathcal{B}_\beta \in \sigma(\mathcal{A}_\alpha)$ visiems β.

Pavyzdžiui, nagrinėkime

$$\mathcal{B}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) = \sigma\Big(\{(a,b):\ a,b\in\mathbb{Q}\}\Big), \qquad \mathbb{Q} - \text{racionaliųjų skaičių aibė}.$$

Norint įrodyti lygybę $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mums pakanka parodyti, kad bet koks intervalas $(a,b) \in \mathcal{B}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$. Šį faktą gauname iš to, kad bet kokiems realiesiems skaičiams $a < b$ egzistuoja tokie racionalieji skaičiai $q_n < r_n$, kad $q_n \downarrow a$, $r_n \uparrow b$ ir

$$(a,b) = \bigcup_n (q_n, r_n) \in \mathcal{B}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}).$$

6.1 teiginys. *Teisingos lygybės*

$$\begin{aligned}
\sigma(\{(a,b):\, a<b \in \mathbb{R}\}) &= \sigma(\{([a,b]:\, a<b\in\mathbb{R}\}) = \\
&= \sigma(\{(-\infty,b]:\, b\in\mathbb{R}\}) = \\
&= \sigma(\{(-\infty,b]:\, b\in\mathbb{Q}\}).
\end{aligned}$$

Borelio σ-algebrą $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ galime apibrėžti ir kiek kitaip.

Nagrinėkime skaičių tiesę $\mathbb{R}$ ir $(a,b] = \{x \in \mathbb{R}:\ a < x \le b\}$, čia $-\infty \le a < b < \infty$. Intervalą $(a,\infty]$ sutapatinsime su intervalu (a,∞). Tuomet intervalo $(-\infty,b]$ papildinys turi norimą pavidalą, t. y. jis atviras iš kairės ir uždaras iš dešinės.

Pažymėkime aibių iš $\mathbb{R}$, sudarytų iš baigtinio skaičiaus nesikertančių intervalų $(a,b]$ junginių, sistemą raide $\mathcal{A}$, t. y.

$$A \in \mathcal{A},\ \text{jei } A = \sum_{i=1}^{n} (a_i, b_i] \quad \text{ir} \quad (a_i,b_i] \cap (a_k,b_k] = \emptyset,\ \text{jei } i \ne k.$$

Tarkime, kad $\emptyset \in \mathcal{A}$. Parodysime, kad $\mathcal{A}$ yra algebra.

Sakykime, $A = (a_1,b_1] \cup \ldots \cup (a_n,b_n]$ yra nagrinėjamo pavidalo aibė, t. y. $A \in \mathcal{A}$. Tuomet $\overline{A} = (-\infty,a_1] \cup (b_1,a_2] \cup \ldots \cup (b_{n-1},a_n] \cup (b_n,\infty]$ (jei $a_1 \ne -\infty$, o $b_n \ne \infty$) ir jis priklauso $\mathcal{A}$ (kai kurie iš šių intervalų gali būti tuščios aibės, jei b_i sutaps su a_{i+1}). Sakykime, $B \in \mathcal{A}$ ir $B = (c_1,d_1] \cup \ldots \cup (c_m,d_m]$. Tada $A \cap B = \cup_{i=1}^{n} \cup_{j=1}^{m} \{(a_i,b_i] \cap (c_j,d_j]\}$. Kiekviena sankirta yra intervalas (jo pavidalas $(\cdot,\cdot\,]$) arba tuščia aibė. Gauname nesikertančių intervalų sąjungas. Todėl $A \cap B \in \mathcal{A}$. Taigi $\mathcal{A}$ yra algebra.

Šitaip apibrėžta aibių sistema nėra σ-algebra, nes paėmus aibių seką $A_n = (0, 1-\frac{1}{n}] \in \mathcal{A}$ gausime, kad $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = (0,1) \notin \mathcal{A}$.

Pažymėkime $\mathcal{I} = \{(a,b]:\ a,b \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{A}$. Nesunku pastebėti, kad $\sigma(\mathcal{I}) = \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Aišku, kad $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$. Kadangi

$$(a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a, b + \frac{1}{n}\right), \quad a < b,$$

tai $\sigma(\mathcal{I}) \subset \sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Belieka įrodyti, kad $(a,b) \in \sigma(\mathcal{I})$. Tai išplaukia iš lygybės

$$(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(a, b - \frac{1}{n}\right], \quad a < b.$$

Pastebėsime, kad

$$
\begin{aligned}
[a,b) &= \bigcap_{n=1}^{\infty}\Big(a-\frac{1}{n},b\Big), \quad a<b \\
\{a\} &= \bigcap_{n=1}^{\infty}\Big(a-\frac{1}{n},a\Big].
\end{aligned}
$$

Taigi Borelio σ-algebrai $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ priklauso ne tik intervalai (a,b), $(a,b]$, bet ir vientaškės aibės $\{a\}$ bei intervalai $[a,b)$. Šiai σ-algebrai, be jau minėtų intervalų $(a,b]$, (a,b), $[a,b]$, $[a,b)$ ir vientaškės aibės $\{a\}$, priklauso begaliniai intervalai $(-\infty,b]$, $(-\infty,b)$, (a,∞).

6.2 teiginys. *Egzistuoja $\mathbb{R}$ poaibis, kuris nepriklauso $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, t. y. ne visos aibės yra Borelio aibės.*

Nepaisant šio teiginio, praktiškai visos aibės, su kuriomis susiduriame, yra Borelio aibės.

1 pvz. Racionaliųjų skaičių aibė yra Borelo aibė. Kadangi racionaliųjų skaičių aibė yra skaiti $\mathbb{Q}=\{r_1,r_2,\ldots\}$, tai ją galima užrašyti kaip sajungą vientaškių aibių $\mathbb{Q}=\cup_{k=1}^{\infty}\{r_k\}$. Iš σ-algebros apibrėžimo išplaukia, kad ji yra Borelio aibė.

2 pvz. Iracionaliųjų skaičių aibė yra Borelo aibė. Kadangi iracionaliųjų skaičių aibė yra racionaliųjų skaičių aibės pildinys iki visų realiųjų skaičių, tai ji yra Borelio aibė.

3 pvz. (Kantoro aibė) Šis pavyzdys rodo, kad Borelio aibėmis gali būti labai komplikuotos aibės. Nagrinėkime vienetinį intervalą $[0,1]$. Daliname jį į tris lygias dalis. Vidurinę dalį išmetame, t.y. intervalą $A_1=(1/3,2/3)$. Gausime aibę $C_1=[0,1/3]\cup[2/3,1]$, kuri susideda iš dviejų intervalų. Kiekvieną iš šių intervalų skaidome į tris lygias dalis ir pašaliname vidurines dalis. Gausime aibę $C_2=[0,1/9]\cup[2/9,1/3]\cup[2/3,7/9]\cup[8/9,1]$, kuri sudaryta iš keturių intervalų. Tęsiame šį procesą toliau. Tuomet k-oji aibė sudaryta iš 2^k intervalų, kurių kiekvieno ilgis yra 3^{-k}. Aibė

$$C=\bigcap_{k=1}^{\infty}C_k$$

vadinama Kantoro aibe. Ji yra Borelio aibė. Ji yra neskaiti aibė. Jos galia – kontinuumas. Be to, išmestų intervalų ilgių suma

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k-1}}{3^k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3}\Big(\frac{2}{3}\Big)^k=\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=1,$$

nes pirmajame žingsnyje išmetame intervalą, kurio ilgis $\frac{1}{3}$, antrajame – $2\,\frac{1}{9}$, o k-tajame – $2^{k-1}\,(\frac{1}{3})^k$. $\square$

Baigtiniam intervalui $[a, b]$ apibrėšime Borelio σ-algebra lygybe

$$\mathcal{B}([a, b]) = \Big\{A \cap [a, b]\colon\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\Big\}.$$

Daugiamačiu atveju Borelio σ-algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ yra apibrėžiama kaip σ-algebra, generuota daugiakampių $I_1 \times \ldots \times I_d$, čia I_k, $k = 1, \ldots, d$, yra intervalai iš $\mathbb{R}$. Galima įrodyti, kad $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\{B_1 \times \ldots \times B_d\})$, čia $B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $k = 1, \ldots, d$.

7 Funkcijos be antros rūšies trūkių

Klasikinėje matematinėje analizėje pagrindinį vaidmenį vaidina tolydžios funkcijos. Jų klasė yra uždara paprasčiausių aritmetinių operacijų atžvilgiu: dviejų tolydžių funkcijų suma, skirtumas, sandauga ir dalmuo (jei turi prasmę) yra tolydžios funkcijos. Tačiau taip nėra, kai nagrinėjame pagrindinę matematinės analizės operaciją – perėjimą prie ribos. Ne visada tolydžių funkcijų sekos riba, jei ji egzistuoja, yra tolydi funkcija

Pvz. Tolydžių funkcijų

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & \text{kai } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{kai } \frac{1}{n} < x \leqslant 1 \end{cases}$$

sekos riba, kai $n \to \infty$, yra trūki funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kai } x = 0, \\ 0, & \text{kai } 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Tam, kad ribinė funkcija būtų tolydi, reikia papildomų sąlygų.

7.1 apibrėžimas. *Sakoma, kad seka funkcijų $f_n(x)$ į funkciją $f(x)$ konverguoja tolygiai intervale $[a, b]$, jei kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks numeris $N(\varepsilon)$, kad visi $x \in [a, b]$, kai $n > N$, tenkina nelygybę*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{1}$$

7.1 teorema. *Jei visi funkcijų sekos nariai yra tolydžios intervale $[a, b]$ funkcijos ir ta seka konverguoja tolygiai $[a, b]$, tai ir tos sekos ribinė funkcija tolydi $[a, b]$.*

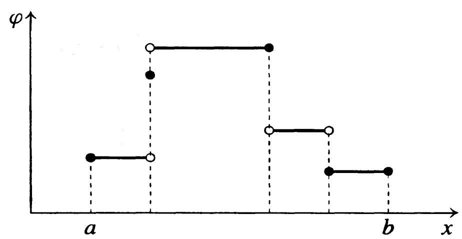
Anksčiau nagrinėtame pavyzdyje funkcijų seka konverguoja į trūkią ribinę funkciją, nes tos sekos konvergavimas intervale $[0, 1]$ nėra tolygus. Įrodysime tai. Tuo tikslu imkime intervalui $[0,1]$ priklausančių taškų $x_n = \frac{1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, seką. Kadangi $f_n(x_n) = \frac{1}{2}$ ir $f(x_n) = 0$, tai bet kokiam $n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{1}{2},$$

t.y. kai $\varepsilon \leqslant \frac{1}{2}$, visi intervalo $[0,1]$ taškai x kartu negali tenkinti (1) nelygybės, kad ir koks būtų n.

7.2 apibrėžimas. *Funkcija $\phi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ vadinama láiptine funkcija, jei intervalą $[a,b]$ galima taip suskaidyti į baigtinį skaičių intervalų I_k, $k = 1,2,\ldots,m$, $\cup_{k=1}^{m} I_k = [a,b]$, kad kiekviename intervale I_k funkcija ϕ būtų pastovi (t.y. $\exists\ c_k \in \mathbb{R}$, $k = 1,2,\ldots,m$: $\phi(x) = c_k$, kai $x \in I_k$).*

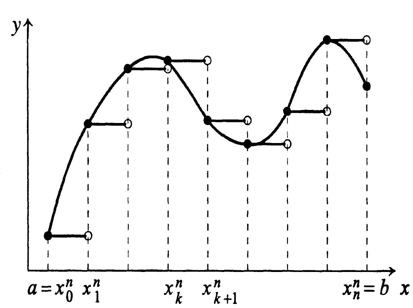
7.1 pastaba. *Vientaškė aibė $\{c\}$ laikoma uždaruoju intervalu $[c,c]$.*



7.1 teiginys. *Sakykime, $f \in C([a,b])$. Apibrėžkime laiptinių funkcijų seką $\{\phi_n\}$ lygybėmis*

$$\phi_n(x) = \begin{cases} f(x_k^n), & \text{kai } x \in [x_k^n, x_{k+1}^n),\ k = 0,1,2,\ldots,n-1, \\ f(b), & \text{kai } x = x_n^n = b, \end{cases} \tag{2}$$

$x_k^n := a + \frac{b-a}{n} k$, $k = 0,1,2,\ldots,n$. Tada seka $\{\phi_n\}$ konverguoja į f tolygiai intervale $[a,b]$.



Įrodymas. Laisvai pasirenkame $\varepsilon > 0$. Kadangi f yra tolygiai tolydi intervale $[a, b]$ (Kantoro teorema), tai atsiras toks $\delta > 0$, kad

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon, \quad \text{kai } |x - y| < \delta, \ x, y \in [a, b].$$

Paėmę tokį $N \in \mathbb{N}$, kad $\frac{b-a}{N} < \delta$, gauname, kad su visais $x \in [a, b]$ turime $|\phi_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, kai $n > N$. Iš tikrųjų, jei $n > N$, tai bet kokiam taškui $x \in [a, b)$ paimkime intervalą $[x_k^n, x_{k+1}^n)$, kuriam jis priklauso. Tada $|x_k^n - x| < \delta$, ir todėl $|\phi_n(x) - f(x)| = |f(x_k^n) - f(x)| < \varepsilon$. O taške $x = b$ visada turime $\phi_n(b) - f(b) = 0 < \varepsilon$. Tai reiškia, kad seka ϕ_n konverguoja į f tolygiai intervale $[a, b]$ (N pasirinkimas priklauso tik nuo $\varepsilon > 0$ ir nepriklauso nuo $x \in [a, b]$).

7.2 pastaba. *Iš teoremos įrodymo nesunku matyti, kad tolygus konvergavimas $\phi_n \rightrightarrows f$ intervale $[a, b]$ išliks, jei*

a) vietoje taškų $x_k^n := a + \frac{b-a}{n} k$, suskaidančių intervalą $[a, b]$ į n vienodo ilgio $\frac{b-a}{n}$ intervalų $[x_k^n, x_{k+1}^n]$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, imsime bet kokius taškus $a = x_0^n < x_1^n < \dots < x_{k_n}^n = b$, $n \in \mathbb{N}$, tenkinančius sąlygą

$$\max_{0 \leqslant k \leqslant k_n - 1} |x_{k+1}^n - x_k^n| \to 0, \quad \text{kai } n \to 0;$$

b) laiptinės funkcijos ϕ_n reikšmes apibrėšime ne funkcijos f reikšmėmis kairiuosiuose atitinkamo skaidinio intervalų $[x_k^n, x_{k+1}^n]$ galuose, o bet kokiuose tų intervalų taškuose $\xi_k^n \in [x_k^n, x_{k+1}^n]$, t.y. imsime

$$\phi_n(x) = \begin{cases} f(\xi_k^n), & \textit{kai } x \in [x_k^n, x_{k+1}^n), \ k = 0, 1, 2, \dots, n-1, \\ f(b), & \textit{kai } x = x_n^n = b, \end{cases}$$

7.2 teorema. 1) *Bet kokiai funkcijai $f \in D([a, b])$, t.y. be II rūšies trūkių, egzistuoja laiptinių funkcijų seka $\{\phi_n\}$ konverguojanti į f tolygiai intervale $[a, b]$.*

2) *Kiekvienos funkcijos $f \in D([a, b])$ trūkio taškų aibė yra baigtinė arba skaiti.*

3) *Kiekviena funkcija $f \in D([a, b])$ yra aprėžta.*

Šios teoremos įrodymą galima perskaityti [4] knygoje.

8 Mati funkcija

Pastebėsime, kad pereinant prie tolydžių funkcijų ribos galime gauti ne tik trūkią funkciją, bet ir funkciją, kuri trūki visuose taškuose. Tokia yra Dirichlė funkcija. Ją galime apibrėžti kaip ribą

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\cos^m 2\pi n!x = \begin{cases} 1, & \text{kai } x \text{ yra racionalus,} \\ 0, & \text{kai } x \text{ yra iracionalus,} \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Ribinė funkcija vadinama Dirichlė funkcija.

Dabar įvesime ir nagrinėsime naują klasę funkcijų, kurių ribos vėl priklauso tai pačiai klasei.

8.1 apibrėžimas. *Pora $(E, \mathcal{A})$, sudaryta iš aibės E ir jos poaibių σ-algebros $\mathcal{A}$, vadinama mačiaja erdve. Aibės iš $\mathcal{A}$ vadinamos mačiosiomis aibėmis (arba, tiksliau, – $\mathcal{A}$-mačiosiomis aibėmis).*

8.2 apibrėžimas. *Sakysime, $(E_1, \mathcal{A}_1)$ ir $(E_2, \mathcal{A}_2)$ – mačios erdvės. Sakoma, kad atvaizdis $f\colon E_1 \to E_2$ yra matus (arba, tiksliau, $\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_2$-matus), jei $f^{-1}(B) = \{x \in E_1\colon\ f(x) \in B\} \in \mathcal{A}_1$ su visomis $B \in \mathcal{A}_2$.*

Nagrinėkime realiąją funkciją $f\colon (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

8.1 teorema. *Reali funkcija $f(x)$ yra mati tada ir tik tada kai visiems $c \in \mathbb{R}$ aibė $\{x\colon\ f(x) < c\}$ yra mati, t.y. $\{x \in E\colon\ f(x) < c\} = \{x \in E\colon\ f(x) \in (-\infty, c)\} \in \mathcal{A}$.*

Pvz. 1. Įrodysime, kad funkcija $f(x) = x^2$ yra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mati.

Sprendimas. Pakanka pastebėti, kad

$$\{x\colon\ x^2 < c\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{jei } c \leqslant 0, \\ \left\{x\colon\ -\sqrt{c} < x < \sqrt{c}\right\}, & \text{jei } c > 0 \end{cases}$$

Abi aibės priklauso $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Todėl funkcija $f(x) = x^2$ yra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mati.

2. Įrodysime, kad funkcija $f(x) = [x]$, apibrėžta intervale $[-3, 2]$, yra $\mathcal{B}([-3, 2])$-mati.

Sprendimas.

$$\{x\colon\ [x] < c\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{jei } c \leqslant -3, \\ [-3, -2), & \text{jei } -3 < c \leqslant -2, \\ [-3, -1), & \text{jei } -2 < c \leqslant -1, \\ \dots & \dots \\ [-3, 2), & \text{jei } 2 < c \leqslant 3, \\ [-3, 2], & \text{jei } c > 3. \end{cases}$$

Nagrinėjamoji aibė $\{x\colon\ [x] < c\}$ yra arba tuščia aibė, arba intervalas (pusiau uždaras arba uždaras). Tokio tipo aibės yra Borelio aibės. Todėl funkcija $f(x) = [x]$, apibrėžta intervale $[-3, 2]$, yra $\mathcal{B}([-3, 2])$-mati. $\square$

8.2 teorema. *Jei funkcija $f(x)$ yra mati, tai visiems realiesiems a ir bet kokiam skaičių tiesės intervalui I aibės*

$$\{x\colon\ f(x) \leqslant a\},\quad \{x\colon\ f(x) > a\},\quad \{x\colon\ f(x) \geqslant a\},\quad \{x\colon\ f(x) = a\},$$
$$\{x\colon\ f(x) \in I\}$$

yra mačios.

Įrodymas. Įrodymas seka iš lygybių

$$\begin{aligned}
\{x\colon\ f(x) \leqslant a\} &= \bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x\colon\ f(x) < a + \frac{1}{n}\right\},\\
\{x\colon\ f(x) > a\} &= \overline{\{x\colon\ f(x) \leqslant a\}},\\
\{x\colon\ f(x) \geqslant a\} &= \overline{\{x\colon\ f(x) < a\}},\\
\left\{x\colon\ a \leqslant f(x) < a + \frac{1}{n}\right\} &= \{x\colon\ f(x) \geqslant a\} \cap \left\{x\colon\ f(x) < a + \frac{1}{n}\right\},\\
\{x\colon\ f(x) = a\} &= \bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x\colon\ a \leqslant f(x) < a + \frac{1}{n}\right\}. \qquad \square
\end{aligned}$$

8.3 teorema. *Jei funkcija $f(x)$ yra mati, tai mačios ir funkcijos* 1) $f(x)+a$, *čia* $a = \mathrm{const}$; 2) $af(x)$; 3) $|f(x)|$; 4) $f^2(x)$; 5) $\frac{1}{f(x)}$, *jei* $f(x) \neq 0$.

Įrodymas. 1) $\{x\colon\ f(x) + a < c\} = \{x\colon\ f(x) < c - a\}$.

2) Jei $a = 0$, tai

$$\{x\colon\ af(x) < c\} = \begin{cases} E, & \text{kai } c > 0,\\ \emptyset, & \text{kai } c \leqslant 0.\end{cases}$$

Jei $a \neq 0$, tai

$$\{x\colon\ af(x) < c\} = \begin{cases} \{x\colon\ f(x) < \frac{c}{a}\}, & \text{kai } a > 0,\\ \{x\colon\ f(x) > \frac{c}{a}\}, & \text{kai } a < 0.\end{cases}$$

3)

$$\{x\colon\ |f(x)| < c\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{jei } c \leqslant 0,\\ \{x\colon\ -a < f(x) < a\}, & \text{jei } c > 0.\end{cases}$$

4)

$$\{x\colon\ f^2(x) < c\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{jei } c \leqslant 0,\\ \{x\colon\ |f(x)| < \sqrt{c}\}, & \text{jei } c > 0.\end{cases}$$

5)

$$\{x\colon\ \frac{1}{f(x)} < c\} = \begin{cases} \{x\colon\ f(x) < 0\}, & \text{jei } c = 0, \\ \{x\colon\ f(x) < 0\} \cup \{x\colon\ f(x) > \frac{1}{c}\}, & \text{jei } c > 0, \\ \{x\colon\ \frac{1}{c} < f(x) < 0\}, & \text{jei } c < 0. \end{cases}$$

8.4 teorema. *Jei funkcijos f ir g yra mačios, tai aibė $\{x\colon\ g(x) < f(x)\}$ yra mati.*

Įrodymas. Jei kuriam nors x turime $g(x) < f(x)$, tai galime rasti tokį racionalųjį skaičių r, kad $g(x) < r < f(x)$. Tuomet

$$\begin{aligned} \{x\colon\ g(x) < f(x)\} &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x\colon\ g(x) < r_k < f(x)\} \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big(\{x\colon\ g(x) < r_k\} \cap \{x\colon\ f(x) > r_k\} \Big), \end{aligned}$$

čia $\{r_k\}$ – visi racionalūs skaičiai.

8.5 teorema. *Jei funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ yra mačios ir $|f(x)| < \infty$, $|g(x)| < \infty$, tai mačios ir funkcijos $f(x) - g(x)$, $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$, jei tik jos apibrėžtos E.*

Įrodymas. Kadangi $g(x) + a$ yra mati funkcija, tai $\{x\colon\ f(x) - g(x) < a\} = \{x\colon\ f(x) < g(x) + a\}$ yra mati (remiamės 8.4 teorema). Iš lygybės $f(x) + g(x) = f(x) - (-1)g(x)$ seka, kad $f(x) + g(x)$ yra mati funkcija (remiamės 8.3 teoremos 2) teiginiu ir ką tik įrodytu tvirtinimu).

Tada funkcijos $f(x) \cdot g(x)$ matumas seka iš lygybės

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{4} \left[(f(x) + g(x))^2 - (f(x) - g(x))^2 \right]$$

(remiamės 8.3 teorema ir prieš tai įrodytu teiginiu).

Funkcijos $\frac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{g(x)}}$ matumas seka iš 8.3 teoremos ir ką tik įrodyto tvirtinimo, nes

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\,.$$

8.6 teorema. *Jei $\{f_n\}$ yra mačiųjų funkcijų seka, tai $\sup_n f_n(x)$, $\inf_n f_n(x)$, $\underline{\lim}_n f_n(x)$ ir $\overline{\lim}_n f_n(x)$ – mačiosios funkcijos.*

Įrodymas. Teisinga lygybė

$$\{x\colon\ \inf_n f_n(x) < c\} = \bigcup_n \{x\colon\ f_n(x) < c\} \in \mathcal{A}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Iš tikrųjų, jei kuriame nors taške x_0 turime $\inf_n f_n(x_0) < c$, tai bent vienas iš skaičių $f_n(x_0)$, $n \in \mathbb{N}$, yra mažesnis už c, ir atvirkščiai, jei bent vienas $f_n(x_0) < c$, tai $\inf_n f_n(x_0) < c$. Todėl $\inf_n f_n(x)$ yra mačioji funkcija.

Kadangi $\sup_n f_n(x) = -\inf_n(-f_n(x))$, tai ir $\sup_n f_n(x)$ yra mačioji funkcija.

Kadangi $\overline{\lim}_n f_n(x) = \inf_n \sup_{m\geqslant n} f_m(x)$ ir $\underline{\lim}_n f_n(x) = \sup_n \inf_{m\geqslant n} f_m(x)$, tai jos taip pat mačios funkcijos.

8.7 teorema. *Jei mačių funkcijų seka $\{f_n(x)\}$ konverguoja į funkciją $f(x) = \lim_n f_n(x)$, tai ribinė funkcija $f(x)$ yra mati.*

8.3 apibrėžimas. *Realia paprastąja funkcija erdvėje $(E, \mathcal{A})$ vadiname baigtinę realią mačią funciją, įgyjančią tik baigtinį skirtingų reikšmių skaičių.*

Paprastoji, tai laiptinės funkcijos apibendrinimas (pakeitėme $[a, b]$ į E). Jei paprastoji funkcija f įgyja reikšmes $y_1, \ldots, y_n$ ir visos yra skirtingos, tai pažymėję $A_k = f^{-1}(y_k) = \{x\colon\ f(x) = y_k\} \in \mathcal{A}$, gauname $f(x) = \sum_{k=1}^n y_k \mathbf{1}_{A_k}(x)$, $x \in E$. Čia $\mathbf{1}_{A_k}$ yra aibės A_k indikatorius, t.y.

$$\mathbf{1}_{A_k}(x) = \begin{cases} 1, & \text{jei } \ x \in A_k, \\ 0, & \text{jei } \ x \notin A_k. \end{cases}$$

Jei $f\colon (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$, tai jau žinome ką reiškia, kad f yra mati. Bet jei turime funkcijų seką, tai pereinant prie ribos galime gauti funkciją, kuri įgyja reikšmes $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$. Ką galima pasakyti apie jų matumą?

1 pvz. Nagrinėkime seką

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & \text{kai } 1 \leqslant x < 1 + \frac{1}{n^3}, \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}, & \text{kai } 1 + \frac{1}{n^3} \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

Aišku, kad ji konverguoja į funkciją

$$f(x) = \begin{cases} \infty, & \text{kai } x = 1, \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}, & \text{kai } 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

Jei $x_0 \in (1, 2]$, tai $f_n(x_0) = f(x_0)$, kai n pakankamai didelis. Jei $x = 1$, tai $f(1) = \infty$, o $f_n(1) = n$. Vadinasi $\lim_{n\to\infty} f_n(1) = f(1)$.

8.4 apibrėžimas. *Tarkime* $(E, \mathcal{A})$ *yra mati erdvė ir* $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$. *Funkcija* f *yra mati jei kiekvienam* $c \in \overline{\mathbb{R}}$ *aibė* $\{x\colon \; f(x) < c\} \in \mathcal{A}$.

8.8 teorema. *Funkcija* $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ *yra mati tada ir tik tada, kai egzistuoja paprastųjų funkcijų seka* $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$, *konverguojanti į* f *visuose taškuose* $x \in E$.

Įrodymas. *Būtinumas.* Sakykime, f yra mačioji funkcija. Kadangi f yra dviejų neneigiamų mačiųjų funkcijų skirtumas $f^+ - f^-$, čia $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f^- = \max(-f(x), 0\}$, $f^\pm \geqslant 0$, tai pakanka išnagrinėti atvėjį, kai funkcija f yra neneigiama.

Pažymekime

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{n\cdot 2^n} \frac{i-1}{2^n} \cdot \mathbf{1}\Big\{\frac{i-1}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{i}{2^n}\Big\} + n \cdot \mathbf{1}\{f(x) \geqslant n\}.$$

Kitaip sakant

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{i-1}{2^n}, & \text{jei } \frac{i-1}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{i}{2^n},\; i = 1, 2, ..., n \cdot 2^n, \\ n, & \text{jei } f(x) \geqslant n. \end{cases}$$

Kiekviena funkcija $f_n(x)$ yra paprastoji neneigiama funkcija. Lengva suvokti, kad seka $\{f_n(x)\}$ yra nemažėjanti. Iš tikrųjų, sakykime, n – bet kuris sveikas teigiamas skaicius ir x_0 – bet kuris E taškas. Jei

$$\frac{k-1}{2^n} \leqslant f(x_0) < \frac{k}{2^n}\,,$$

tai $f_n(x_0) = \frac{k-1}{2^n}$. Galimi du atvejai:

$$\frac{2k-2}{2^{n+1}} \leqslant f(x_0) < \frac{2k-1}{2^{n+1}} \qquad \text{arba} \qquad \frac{2k-1}{2^{n+1}} \leqslant f(x_0) < \frac{2k}{2^{n+1}}\,.$$

Pirmuoju atveju

$$f_{n+1}(x_0) = \frac{2k-2}{2^{n+1}} = f_n(x_0)$$

antruoju

$$f_{n+1}(x_0) = \frac{2k-1}{2^{n+1}} > \frac{2k-2}{2^{n+1}} = f_n(x_0)$$

Sakykime dabar, kad $f(x_0) \geqslant n$, tada $f_n(x_0) = n$. Jei $n \leq f(x_0) < n+1$, tai patenkinta kuri nors iš nelygybių

$$\frac{l-1}{2^{n+1}} \leqslant f(x_0) < \frac{l}{2^{n+1}} \quad (l = 2^{n+1} \cdot n + 1, \ldots, 2^{n+1}(n+1))$$

ir

$$f_{n+1}(x_0) = \frac{l-1}{2^{n+1}} \geqslant n = f_n(x_0).$$

Jei $f(x_0) \geqslant n+1$, tai $f_{n+1}(x_0) = n+1$. Tuo būdu, visais atvejais $f_n(x_0) \leqslant f_{n+1}(x_0)$.

Be to, seka $\{f_n(x)\}$ tenkina nelygybes

$$\begin{aligned} &f(x) - 2^{-n} \leqslant f_n(x) \leqslant f(x), \qquad \text{jei } f(x) < n, \\ &f_n(x) = n \leqslant f(x), \qquad \text{jei } f(x) \geqslant n. \end{aligned}$$

Imkime kuri nors aibės E tašką x_0. Jei $f(x_0) < \infty$, tai visiems pakankamai dideliems n

$$f(x_0) < n \quad \text{ir} \quad f(x_0) - 2^{-n} \leqslant f_n(x_0) \leqslant f(x_0),$$

taigi $f_n(x_0) \uparrow f(x_0)$. Jei $f(x_0) = \infty$, tai visiems n turime $f_n(x_0) = n$, vadinasi, $f_n(x_0) \to \infty = f(x_0)$.

Bendru atveju $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$. Pastebesime, kad kiekviename taške bent viena iš funkcijų $f^+(x)$, $f^-(x)$ lygi nuliui. Pagal ką tik įrodytą teiginį egzistuoja dvi paprastųjų funkcijų sekos $\{f_n(x)\}$ ir $\{g_n(x)\}$, konverguojančios atitinkamai į funkcijas $f^+(x)$ ir $f^-(x)$. Tada $f_n(x) - g_n(x)$ konverguoja į $f(x)$. Dviejų paprastųjų funkcijų skirtumas yra, aišku, paprastoji funkcija, tai būtinumas pilnai įrodytas.

Pakankamumas. Tarkime, kad $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ – paprastųjų funkcijų seka, kuri konverguoja į funkciją $f(x)$ visiems $x \in E$. Tada visiems $c \in \mathbb{R}$

$$\{x\colon\ f(x) < c\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \left\{x\colon\ f_n(x) < c - \frac{1}{k}\right\} \in \mathcal{A}.$$

Iš tikrųjų, sakykime $x_0 \in \{x\colon\ f(x) < c\}$. Tada $f(x_0) < c$ ir egzistuoja toks k, kad $f(x_0) < c - \frac{2}{k}$. Fiksuojame šitą k. Tuomet galima rasti tokį didelį m, kad kai $n \geqslant m$, tai teisinga nelygybė $f_n(x_0) < c - \frac{1}{k}$, nes $f_n(x_0) = [f_n(x_0) - f(x_0)] + f(x_0)$. Todėl x_0 priklauso dešinei pusei.

Tarkime x_0 priklauso dešinei pusei. Tuomet egzistuoja toks k, kad visiems pakankamai dideliems n teisinga nelygybė $f_n(x_0) < c - \frac{1}{k}$. Bet tada $f(x_0) < c$. Vadinasi, x_0 priklauso kairiąjai pusei.

2 pvz. Nagrinėkime funkciją

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{kai } x \text{ yra racionalus,} \\ 2, & \text{kai } x \text{ yra iracionalus,} \end{cases} \qquad x \in [0,1].$$

Ji yra visur trūki. Imkime bet kokį $x_0 \in [0,1]$. Jei x_0 yra racionalusis, tai visada galima rasti racionaliųjų skaičių seką r_n (pvz. $x_0 + \frac{1}{n}$) konverguojančią į x_0 ir iracionaliųjų skaičių seką x_n (pvz. $x_0 + \frac{1}{\alpha_n}$, α_n - iracionalieji skaičiai $\uparrow \infty$; tokie yra, pvz., skaičiai $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\ldots$) konverguojančią į x_0. Turime $\lim_{n\to\infty} f(r_n) = 3$, o $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 2$. Todėl x_0 yra trūkio taškas, nes riba neegzistuoja. Jei x_0 yra iracionalusis, tai visada galima rasti racionaliųjų skaičių seką r_n (pvz. jei $x_0 = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$, tai $r_n = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n$) konverguojančią į x_0 ir iracionaliųjų skaičių seką α_n (pvz. $x_0 + \frac{1}{n}$) konverguojančią į x_0. Bet ir vėl $\lim_{n\to\infty} f(r_n) = 3$, o $\lim_{n\to\infty} f(\alpha_n) = 2$. Vadinasi, funkcija $f(x)$ trūki kiekviename intervalo $[0,1]$ taške. Tačiau ji yra mati funkcija. Racionaliųjų skaičių aibė $\mathbb{Q}$ yra mati, nes racionaliųjų taškų aibė yra skaiti. Vadinasi, ir $[0;1]\backslash\mathbb{Q} \in \mathcal{B}([0;1])$. Kadangi

$$\{f(x) < c\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{kai } c \leqslant 2, \\ [0;1]\backslash\mathbb{Q}, & \text{kai } 2 < c \leqslant 3, \\ [0,1], & \text{kai } c > 3, \end{cases}$$

tai funkcija $f(x)$ yra mati.

3 pvz. Tarkime, kad $\mathbf{1}_{\overline{Q}}(x)$ yra aibės $\overline{Q}$ indikatorius; čia $\overline{Q}$ iracionaliųjų skaičių aibė. Įrodyti, kad funkcija $x^2 \cdot \mathbf{1}_{\overline{Q}}(x)$ yra mati funkcija Borelio σ-algebros atžvilgiu.

Sprendimas. Pasižymėkime $g(x) = x^2$. Naujoji funkcija $g(x)$ skiriasi nuo $f(x) = x^2 \cdot \mathbf{1}_{\overline{Q}}(x)$ tik racionaliųjų skaičių aibėje. Tuo ir pasinaudosime spręsdami šį uždavinį. Naudodamiesi apibrėžimu ir ką tik minėtu pastebėjimu, gauname

$$\begin{aligned} \{x\colon\ f(x) < c\} &= \{x\colon\ f(x) < c, f(x) = g(x)\} \cup \{x\colon\ f(x) < c, f(x) \neq g(x)\} \\ &= \{x\colon\ g(x) < c, f(x) = g(x)\} \cup \{x\colon\ f(x) < c, f(x) \neq g(x)\} \\ &= \Big(\{x\colon\ x^2 < c\} \cap \overline{Q}\Big) \cup \Big(\{x\colon\ f(x) < c\} \cap Q\Big) \\ &= \Big(\{x\colon\ -\sqrt{c} < x < \sqrt{c}\} \cap \overline{Q}\Big) \cup \Big(\{x\colon\ f(x) < c\} \cap Q\Big). \end{aligned}$$

Pirmoji sąjungos aibė priklauso $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, nes atviras intervalas ir iracionaliųjų skaičių aibė yra Borelio aibės. Antroji aibė irgi priklauso $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, nes ji yra racionaliųjų skaičių aibės poaibis. Todėl ją galima užrašyti kaip baigtinę ar skaičią sąjungą vientaškių aibių, kurios yra Borelio aibės.

Užduotys

1. Pasinaudoję apibrėžimu įrodykite, kad laiptinė funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kai } x \in [-1,2), \\ 0, & \text{kai } x = 2, \\ -1, & \text{kai } x \in (2,3] \end{cases}$$

yra $\mathcal{B}([-1,3])$-mati funkcija.

2. Pasinaudoję apibrėžimu įrodykite, kad funkcijos

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & \text{kai } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{kai } \frac{1}{n} < x \leqslant 1 \end{cases}$$

yra $\mathcal{B}([0,1])$-mačios.

3. Pasinaudoję apibrėžimu įrodykite, kad funkcija $f(x) = x \cdot \mathbf{1}_{(-\infty,-2)}(x) - x^2 \cdot \mathbf{1}_{[-2,0)}(x) + 0 \cdot \mathbf{1}_{[0,1)}(x) + \sqrt{x} \cdot \mathbf{1}_{[1,\infty)}(x)$ yra $\mathcal{B}(\mathbf{R})$-mati funkcija. Čia $\mathbf{1}_A(x)$ aibės A indikatorius.

4. Pasinaudoję apibrėžimu įrodykite, kad funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kai } x \in [0,1), \\ 3 - x, & \text{kai } x \in [1,2], \\ x - 3, & \text{kai } x \in (2,3] \end{cases}$$

yra $\mathcal{B}([0,3]$-mati funkcija.

5. Pasinaudoję apibrėžimu įrodykite, kad funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kai } x \in \mathbb{Q}, \\ -x, & \text{kai } \in \overline{\mathbb{Q}} \end{cases}$$

yra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mati funkcija. Čia $\mathbb{Q}$ yra racionaliųjų skaičių aibė.

6. Pasinaudoję apibrėžimu įrodykite, kad indikatorinės funkcijos $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)$ sandauga su bet kokia funkcija $f(x)$ yra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mati funkcija.

7. Sakykime, funkcija $f(x)$ yra apibrėžta $\mathbb{R}$ ir $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mati. Pasinaudoję apibrėžimu įrodykite, kad funkcija

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{kai } x \in \{x\colon\ a \leqslant f(x) \leqslant b\}, \\ b, & \text{kai } x \in \{x\colon\ f(x) > b\}, \\ a, & \text{kai } x \in \{x\colon\ f(x) < a\} \end{cases}$$

yra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mati funkcija.

9 Aibės matas

Kas tai yra matas? Nagrinėkime realiųjų skaičių tiesę. Imkime bet kokį baigtinį tos tiesės intervalą I. Jis gali būti $[a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$, (a,b). Jo ilgis, t.y. $b - a$, vadinamas intervalo I matu. Žymėsime $m(I)$. Jei turime intervalą $[a,a]$, tai jo matas $m([a,a]) = 0$. Natūralu, kad tuščios aibės $\emptyset$ matas $m(\emptyset) = 0$.

Sakoma, kad aibės $N \subset \mathbb{R}$ matas lygus 0 (arba N yra nulinio mato aibė), jei su kiekvienu $\varepsilon > 0$ egzistuoja tokia intervalų seka $\{I^n, n \in \mathbb{N}\}$, kad

$$N \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I^n \qquad \text{ir} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} m(I^n) < \varepsilon.$$

Tokiu atveju rašoma $m(N) = 0$. Visų nulinio mato aibių klasę žymėsime $\mathcal{N}$.

9.1 teiginys. *(Nulinio mato aibiu savybes)*
1) *Jei* $N \in \mathcal{N}$, $A \subset N$, *tai* $A \in \mathcal{N}$.
2) *Jei* $N_i \in \mathcal{N}$, $i = 1, 2, \ldots$, *tai* $\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i \in \mathcal{N}$.

Įrodymas. 1) Akivaizdu.

2) Laisvai pasirenkame $\varepsilon > 0$. Kiekvienam $i \in \mathbb{N}$ egzistuoja tokia sistema $\{I_i^n, n \in \mathbb{N}\}$, kad

$$N_i \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_i^n \qquad \text{ir} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} m(I_i^n) < \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Tada

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} I_i^n \qquad \text{ir} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m(I_i^n) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon.$$

Dabar užtenka pastebėti, kad intervalų sistema $\{I_i^n, i \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$ yra skaiti, kaip skaičioji skaičių sistemų sąjunga (jos narių matų sistema nepriklauso nuo sumavimo tvarkos).

Po daugiau intuityviai aiškaus mato apibrėžimo pateiksime formalų apibrėžimą.

9.1 apibrėžimas. *Matu aibės* E *poaibių algebroje* $\mathcal{A}$ *vadinamas atvaizdis* $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, *tenkinantis aksiomas:*

a) $\mu(\emptyset) = 0$;

b) (σ-adityvumas) *jei* $\{A_i, i \in \mathbb{N}\}$ – *poromis nesikertančių aibių iš* $\mathcal{A}$ *seka ir* $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$, *tai*

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Jei $\mu(E) < \infty$, *tai matas* μ *vadinamas baigtiniu.*

9.1 teorema. *Matas* μ *algebroje* $\mathcal{A}$ *pasižymi šiomis savybėmis:*

1) (monotoniškumas) *jei* $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, $A_1 \subset A_2$, *tai* $\mu(A_1) \leqslant \mu(A_2)$;

2) (stiprus adityvumas) *jei* $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, *tai*

$$\mu(A_1) + \mu(A_2) = \mu(A_1 \cup A_2) + \mu(A_1 \cap A_2);$$

3) (σ-pusiauadityvumas) *jei aibių iš $\mathcal{A}$ sekos $\{A_i, i \in \mathbb{N}\}$ sąjunga $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$, tai*

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i);$$

4) (tolydumas iš apačios) *jei $A_n \uparrow A$ algebroje $\mathcal{A}$, tai $\mu(A_n) \uparrow \mu(A)$;*
5) (tolydumas iš viršaus) *jei $A_n \downarrow A$ algebroje $\mathcal{A}$, tai $\mu(A_n) \downarrow \mu(A)$.* □

Nagrinėkime intervalą $(0,1]$. Pažymėkime aibių iš $(0,1]$, sudarytų iš baigtinio skaičiaus nesikertančių intervalų $(a,b]$ junginių, sistemą raide $\mathcal{A}$, t.y.

$$A \in \mathcal{A}, \text{ jei } A = \sum_{i=1}^{n} (a_i, b_i] \quad \text{ir} \quad (a_i, b_i] \cap (a_k, b_k] = \emptyset, \text{ jei } i \neq k.$$

Tarkime, kad $\emptyset \in \mathcal{A}$. Tuomet $\mathcal{A}$ yra algebra. Įrodymas analogiškas kaip ir $\mathbb{R}$ atveju (žiūrėti 6 skyrių).

Aibei A priskiriame skaičių

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Tada μ yra matas apibrėžtas algebroje $\mathcal{A}$. Jį galima pratęsti iki vienintelio mato m erdvėje $((0,1], \mathcal{B}((0,1]))$, čia $\mathcal{B}((0,1]) = \sigma(\mathcal{A})$. Matas m vadinamas *Lebego matu* apibrėžtu mačioje erdvėje $((0,1], \mathcal{B}((0,1]))$. Analogiškai galime sukonstruoti σ-baigtinį Lebego matą mačioje erdvėje $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, t.y. matą, kuris yra baigtinis $m([a,b]) < \infty$, bet kokiems $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Taigi Lebego matas m bet kokiam baigtiniam intervalui I priskiria skaičių, lygų intervalo ilgiui. Vientaškės aibės Lebego matas yra lygus nuliui. Tikrai,

$$0 \leqslant m(\{a\}) \leqslant m\Big(\Big(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\Big]\Big) = \frac{2}{n} \longrightarrow 0, \quad \text{kai} \quad n \to \infty.$$

Papildykime Borelio σ-algebrą $\mathcal{B}((0,1])$ Lebego nulinio mato aibėmis, t.y. aibėmis $\Lambda \subset (0,1]$, kurioms galime rasti tokias Borelio aibes $A \subseteq \Lambda \subseteq B$, kad $m(B \backslash A) = 0$. Gautoji naujoji aibių sistema $\overline{\mathcal{B}}((0,1])$ yra σ-algebra. Ji vadinama intervalo $(0,1]$ Lebego aibių sistema.

1 pvz. Sakykime $\mathbb{Q}$ yra racionaliųjų skaičių aibė intervale $[0,1]$. Tada $m(Q) = 0$.

Įrodymas. Bet kokia baigtinė arba skaičioji aibė yra nulinio mato aibė. Iš tikrųjų, bet kokia vientaškė aibė yra nulinio mato, o kiekviena skaičioji aibė yra skaiti vientaškių aibių sąjunga. Lieka pritaikyti 9.1 Teiginio 2 savybę. Todėl racionaliųjų skaičių aibės matas yra 0.

2 pvz. Nagrinėkime Kantoro aibę C. Jos matas $m(C) = 0$, nors ji yra kontinuumo galios.

Įrodymas. Iš 9.1 teiginio ir aibės C apibrėžimo seka, kad

$$m(C) = \lim_{n\to\infty} m(C_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0. \qquad \square$$

Jei intervalas I yra begalinis, t.y. $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, (b, ∞), $[b, \infty)$, tai jo matas lygus ∞.

Sąvoka „beveik visur”. Sakoma, kad kokia nors erdvės $\mathbb{R}$ taškų savybė galioja beveik visur (sutrumpintai b.v.) aibėje $A \subset \mathbb{R}$, jei ji galioja visuose aibės A taškuose, išskyrus nulinio mato aibę.

3 pvz. 1) $f_n \to f$ b.v. aibėje $A \iff A\backslash\{x \in A\colon\ f_n(x) \to f(x)\} \in \mathcal{N}$

2) Sakoma, kad funkcija $f\colon A \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ yra beveik visur baigtinė, jei $\{x \in A\colon\ f(x) = \pm\infty\} \in \mathcal{N}$

3) Sakoma, kad funkcija $f\colon A \to \mathbb{R}$ yra tolydi beveik visur aibėje $A \subset \mathbb{R}$, jeigu jos visų trūkio taškų aibė yra nulinio mato. Pvz., bet kokia funkcija $f \in D([a, b])$ yra tolydi b.v. intervale [a, b], nes jos trūkio taškų aibė yra skaiti ir todėl yra nulinio mato. (Bet kokia baigtinė arba skaičioji aibė yra nulinio mato aibė). Kitas pavyzdys yra funkcija $f(x) = [x]$, t.y. sveikoji dalis x.

4) Funkcijos

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{kai } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], \\ 2, & \text{kai } x \in \overline{\mathbb{Q}} \cap [0, 1], \end{cases} \qquad g(x) = 2$$

b.v. sutampa.

Užduotys

1. Ar funkcija $f(x) = x - [x]$ yra beveik visur tolydi? Argumentuokite.

2. Ar funkcijų seka $f_n(x)$, $x \in [0, 1]$, konverguoja beveik visur į $f(x)$, $x \in [0, 1]$, jei

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{n}, & \text{kai } x \in \mathbf{Q} \cap [0, 1], \\ 3, & \text{kai } x \in \overline{\mathbf{Q}} \cap [0, 1], \end{cases} \qquad f(x) \equiv 3.$$

Argumentuokite.

3. Duotos funkcijos

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{jei } x \text{ yra racionalusis skaičius}, \\ x, & \text{jei } x \text{ yra iracionalusis skaičius}, \end{cases} \qquad g(x) = x, \qquad h(x) = 0.$$

Nurodykite teisingus atsakymus: a) funkcija $f(x)$ yra beveik visur tolydi; b) funkcija $f(x)$ yra beveik visur trūki; c) funkcija $f(x)$ yra beveik visur lygi funkcijai $g(x)$; d) funkcija $f(x)$ yra beveik visur lygi funkcijai $h(x)$.

10 Integralas

10.1 apibrėžimas. *Laiptinės funkcijos* $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ *integralu intervale* I *vadinamas skaičius*

$$\int_I \varphi(x)\,dx := \sum_{i=1}^n y_i\, m(I_i),$$

čia y_i *yra funkcijos* φ *reikšmė intervale* I_i.

Visų laiptinių funkcijų intervale I aibę žymėsime $S(I)$.

10.1 teiginys. 1) *Tiesiškumas, jei* $f, g \in S(I)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *tai*

$$\int_I \Big(\alpha f(x) + \beta g(x)\Big)dx = \alpha \int_I f(x)\,dx + \beta \int_I g(x)\,dx$$

2) *Jei* $f, g \in S(I)$, $f(x) \leqslant g(x)$, $x \in I$, *tai*

$$\int_I f(x)\,dx \leqslant \int_I g(x)\,dx;$$

3) *Jei* $f \in S(I)$, *tai*

$$\left| \int_I f(x)\,dx \right| \leqslant \int_I |f(x)|\,dx$$

Įrodymas. Tarkime $f(x) = \sum_i y_i \mathbf{1}_{I_i}(x)$, $g(x) = \sum_j z_j \mathbf{1}_{B_j}(x)$. Tada $f(x) = \sum_{i,j} y_i \mathbf{1}_{I_i \cap B_j}(x)$ ir $g(x) = \sum_{i,j} z_j \mathbf{1}_{I_i \cap B_j}(x)$. Todėl nesiaurindami bendrumo galime tarti, kad laiptinės funkcijos f ir g turi tuos pačius pastovumo „laiptelius" I_i, t.y. $f(x) = \sum_i y_i \mathbf{1}_{I_i}(x)$, $g(x) = \sum_i z_i \mathbf{1}_{I_i}(x)$.

1) Funkcijos $\alpha f + \beta g$ reikšmė intervale I_k yra $\alpha y_k + \beta z_k$. Todėl

$$\begin{aligned}
\int_I \Big(\alpha f(x) + \beta g(x)\Big)dx &= \sum_k (\alpha y_k + \beta z_k)\, m(I_k) \\
&= \alpha \sum_k y_k m(I_k) + \beta \sum_k z_k m(I_k) \\
&= \alpha \int_I f(x)\,dx + \beta \int_I g(x)\,dx.
\end{aligned}$$

2) Jei $f \leqslant g$, tai $y_k \leqslant z_k$ visiems k. Todėl

$$\int_I f(x)\,dx = \sum_k y_k\, m(I_k) \leqslant \sum_k z_k\, m(I_k) = \int_I g(x)\,dx.$$

3) Suintegravę nelygybę

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$$

ir pasinaudoję 2 savybe, turime

$$-\int_I |f(x)|\,dx \leqslant \int_I f(x)\,dx \leqslant \int_I |f(x)|\,dx \Rightarrow \left| \int_I f(x)\,dx \right| \leqslant \int_I |f(x)|\,dx.$$

10.2 apibrėžimas. *Laiptinių funkcijų seką $\{f_n\} \subset S(I)$ vadinsime Koši seka (tiksliau Koši seka L^1 prasme), arba fundamentaliąja seka, jei*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \colon \int_I |f_n(x) - f_m(x)|\, dx < \varepsilon, \qquad \text{kai } n, m > N \qquad (*)$$

10.3 apibrėžimas. *Sakoma, kad funkcija $f \colon I \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ yra integruojama Lebego prasme intervale I, jei egzistuoja laiptinių funkcijų Koši seka $\{f_n\} \subset S(I)$, konverguojanti į funkciją f beveik visur (intervale I). Tokiu atveju funkcijos f Lebego integralu intervale I vadinamas skaičius*

$$\int_I f(x)\, dx := \lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\, dx$$

Visų integruojamų intervale I funkcijų klasę žymėsime $L(I)$.

10.1 pastaba. *Pabrėšime, kad nurodyta integralų sekos $\{\int_I f_n(x)\, dx\}$ baigtinė riba visada egzistuoja. Iš tikrųjų ši seka yra skaitinė Koši seka:*

$$(*) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \colon \quad \left| \int_I f_n(x)\, dx - \int_I f_m(x)\, dx \right| \leqslant \int_I |f_n(x) - f_m(x)|\, dx < \varepsilon, \quad \text{kai } n, m > N.$$

Naudojamės, kad laiptinėms funkcijoms teisinga nelygybė

$$\left| \int_I f(x)\, dx \right| \leqslant \int_I |f(x)|\, dx.$$

Todėl, remiantis skaičių sekos konvergavimo Koši kriterijumi

$$\exists \lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\, dx \in \mathbb{R}.$$

Galima įrodyti, kad toks integralo apibrėžimas yra korektiškas, t.y. riba

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\, dx$$

nepriklauso nuo Koši sekos $\{f_n\} \subset S(I)$, konverguojančios beveik visur į funkciją f, pasirinkimo.

10.2 teiginys. (Elementariosios integralų savybės)

1) *(Tiesiškumas) Jei $f, g \in L(I)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tai $\alpha f + \beta g \in L(I)$ ir*

$$\int_I \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big) dx = \alpha \int_I f(x)\, dx + \beta \int_I g(x)\, dx;$$

2) *Jei* $f, g \in L(I)$, $f \geqslant g$, *tai* $\int_I f(x)dx \geqslant \int_I g(x)dx$; *atskiru atveju*

$$\left|\int_I f(x)\,dx\right| \leqslant \int_I |f(x)|\,dx;$$

3) *Jei* $f \in L(I)$, $g = f$ *b.v. intervale* I, *tai* $g \in L(I)$ *ir* $\int_I g(x)dx = \int_I f(x)dx$.

Įrodymas. Įrodysime tik 3) savybę. Jei $\{f_n\} \subset S(I)$ – Koši seka ir $f_n \to f$ b.v. intervale I, tai taip pat $f_n \to g$ b.v. intervale I. Tai išplaukia iš lygybės

$$\begin{aligned}\{x \in I\colon\ f_n(x) \nrightarrow g(x)\} = &\Big(\{x \in I\colon\ f_n(x) \nrightarrow f(x)\} \cap \{x \in I\colon\ f_n(x) = g(x)\}\Big)\\ &\cup \Big(\{x \in I\colon\ f_n(x) \nrightarrow g(x)\} \cap \{x \in I\colon\ f_n(x) \neq g(x)\}\Big),\end{aligned}$$

nes dešinėje lygybės pusėje esančios aibės yra nulinio mato. Todėl

$$\int_I g(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\,dx = \int_I f(x)\,dx.$$

10.1 teorema. (Lebego ir Rymano integralų palyginimas) *Jei aprėžta funkcija* $f(x)$ *yra integruojama Rymano prasme intervale* $[a, b]$, *tai integruojama ir Lebego prasme ir abu integralai sutampa:*

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = (L)\int_a^b f(x)\,dx.$$

10.2 teorema. (Integruojamumo Rymano prasme kriterijus) *Funkcija* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *yra integruojama Rymano prasme tada ir tik tada, kai* f *yra aprėžta ir tolydi beveik visur intervale* $[a, b]$. *Taigi* $R([a, b]) \subset L([a, b])$.

10.2 pastaba. *Naudinga paminėti tokius faktus:*

1. Jei nagrinėjama funkcija aprėžta intervale $[a, b]$ *ir turi tik baigtinį skaičių trūkių, tai ji integruojama Rymano prasme (arba egzistuoja įprastinis apibrėžtinis integralas). (Matematinės analizės kurse sutinkamas teiginys nagrinėjant apibrėžtinį integralą.)*

2. Jei funkcijos $f(x)$ *ir* $g(x)$ *yra apibrėžtos intervale* $[a, b]$ *ir skiriasi tik baigtiniame taškų skaičiuje, tai iš vienos funcijos integruojamumo Rymano prasme išplaukia kitos funkcijos integruojamumas Rymano prasme. Be to,* $(R)\int_a^b f(x)\,dx = (R)\int_a^b g(x)\,dx$.

3. Jei funkcija $f \in D([a, b])$, *tai ji integruojama Rymano prasme.*

4. Funkcija integruojama Rymano prasme intervale $[a, b]$ *yra aprėžta.*

10.3 pastaba. *Jei Lebego integralo apibrėžime vietoj paprastai konverguojančių laiptinių funkcijų sekų ribų imtume laiptinių funkcijų tolygias ribas, tai gautume Rymano integralo apibrėžimą. 7 skyriuje buvo įrodyta, kad galima sukonstruoti laiptinių funkcijų seką tolygiai konverguojančią į tolydžią funkciją ar funkciją be antros rūšies trūkių.*

Dabar pateiksime pavyzdį iliustruojantį 10.2 teoremą.

1 pvz. Funkcija

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{jei } x \in [0, \infty), \\ -1, & \text{jei } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

yra beveik visur tolydi ir integruojama bet kokiame baigtiniame intervale $[a, b]$. Be to, $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$, čia $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

10.4 pastaba. *Integralų lygybė išplaukia iš* 10.2 *pastabos. Žemiau pateikiamas šio fakto įrodymas tik nurodo kelią kaip reikia įrodyti* 2 *teiginį, suformuluotą* 10.2 *pastaboje.*

Sprendimas. Nagrinėsime tik atvejį, kai $0 \in [a, b]$. Kiti atvejai – akivaizdūs. Imkime bet kokį intervalo $[a, b]$ skaidinį T su taškais $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k = 0 < x_{k+1} < \cdots < x_n = b$. Sakykime, kad $\Delta_i = x_i - x_{i-1} < \varepsilon/2$, čia $\varepsilon > 0$ yra kiek norima mažas skaičius. Tada

$$\sum_{i=0}^{n} \omega_i \Delta x_i = \omega_k \Delta x_k = 2(x_k - x_{k-1}) = \varepsilon,$$

čia ω_i yra funkcijos g svyravimai intervaluose $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Iš Rymano kriterijaus (matematinės analizės kursas) seka, kad funkcija g yra integruojama intervale $[a, b]$.

Pažymėkime $h(x) = g(x) - f(x)$. Funkcija $h(x)$ lygi nuliui visur, išskyrus tašką $x = 0$, kuriame $h(0) = 1$. Vadinasi, ji turi pirmosios rūšies trūkį taške $x = 0$. Todėl yra integruojama. Įrodysime, kad $\int_a^b h(x)\,dx = 0$. Bet kokiam intervalo $[a, b]$ skaidiniui $T = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n = b\}$ ir visiems taškams $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, jei tik $\xi_i \neq 0$, integralinė suma $S_n(T) = 0$. Tuo atveju, kai $x = 0$ priklauso kokiam nors intervalui $[x_{i-1}, x_i]$ ir $\xi_i = 0$, tai $S_n(T) = x_i - x_{i-1}$. Jei kokio nors skaidinio T taškams $x_{i-1} < x_i = 0 < x_{i+1}$ taškai $\xi_i = \xi_{i-1} = 0$, tai $S_n(T) = x_{i+1} - x_{i-1}$. Iš gautų integralinių sumų išraiškų matome, kad integralinę sumą $S_n(T)$ galima padaryti kiek norima mažą, kai $\Delta \to 0$, $\Delta = \max_i \Delta_i$. Todėl $\int_a^b h(x)\,dx = 0$. Kadangi $f(x) = g(x) - h(x)$, tai bet kokiam skaidiniui T ir bet kokiems taškams ξ_i, integralinės sumos tenkina sąryšį

$$\sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n} \Big[g(\xi_i) - h(\xi_i)\Big]\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i - \sum_{i=0}^{n} h(\xi_i)\Delta x_i.$$

Dešinės pusės ribos, kai $\Delta \to 0$, egzistuoja, nes funkcijos $g(x)$ ir $h(x)$ yra integruojamos. Todėl egzistuoja ir kairės pusės riba, kai $\Delta \to 0$. Vadinasi, funkcija $f(x)$ yra integruojama ir teisinga lygybė

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

2 pvz. Funkcija $f(x) = [x]$ yra beveik visur tolydi $\mathbb{R}$ ir integruojama bet kokiame baigtiniame intervale.

3 pvz. Funkcija

$$f(x) = 1 \cdot \mathbf{1}_{[0,2^{-1})}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \mathbf{1}_{\left[\sum_{i=1}^{k} 2^{-i}, \sum_{i=1}^{k+1} 2^{-i}\right)}(x) + 0 \cdot \mathbf{1}_{\{1\}}(x)$$

yra beveik visur tolydi $[0, 1]$ ir integruojama Rymano prasme.

10.5 pastaba. *Jei funkcija $f(x)$ beveik visur sutampa su tolydžia funkcija $g(x)$, tai negalime tvirtinti, kad $f(x)$ yra beveik visur tolydi savo apibrėžimo srityje.*

10.3 teorema. *Jei funkcija f yra mati ir aprėžta, tai ji integruojama Lebego prasme.*

3 pvz. Nagrinėkime funkciją f apibrėžtą intervale $[0, 1]$ sekančia lygybe

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{kai } x \text{ yra racionalusis,} \\ 2, & \text{kai } x \text{ yra iracionalusis.} \end{cases}$$

Kaip mes jau įsitikinome, ši funkcija yra visur trūki ir mati. Įsitikinsime, kad ji nėra integruojama Rymano prasme. Nagrinėkime sumas

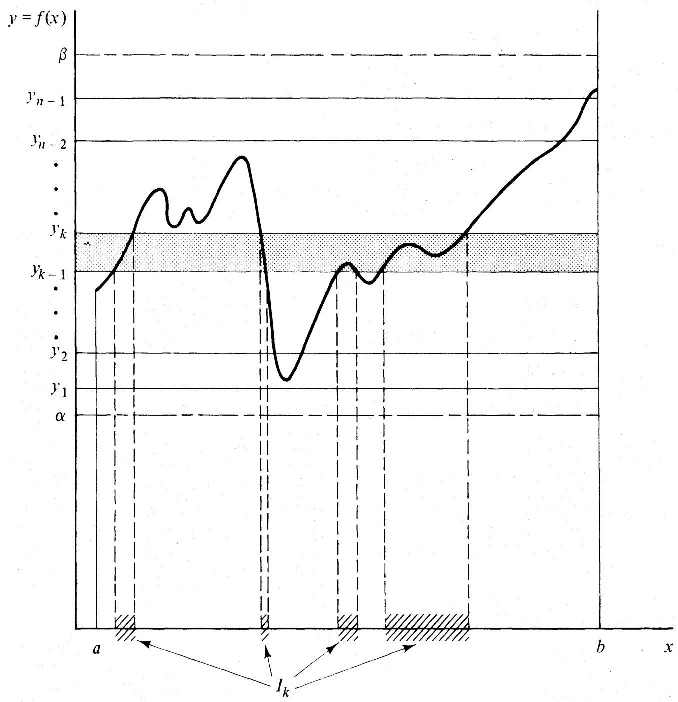
$$S_n = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}),$$

čia $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ir $0 = x_0 < x_1 \cdots < x_n = 1$. Jei ξ_k – racionalieji skaičiai, tai $S_n = 3$ ir $\lim_{n\to\infty} S_n = 3$. Jei ξ_k – iracionalieji skaičiai, tai $\lim_{n\to\infty} S_n = 2$. Todėl funkcija nėra integruojama Rymano prasme.

Ši funkcija integruojama Lebego prasme. Tarkime $g(x) \equiv 2$. Tada $f(x) = g(x)$ b.v. Todėl

$$(L)\int_0^1 f(x)\,dx = (L)\int_0^1 g(x)\,dx = (R)\int_0^1 2\,dx = 2. \qquad \square$$

Geometrinė interpretacija. Pasiaiškinsime Lebego integralo apibrėžimą paprasčiausiu atveju. Nagrinėkime tolydžią funkciją. Sakykime, funkcija $f(x)$ apibrėžta intervale $[a, b]$, o jos įgyjamos reikšmės yra tarp skaičių α ir β. Skaidome intervalą $[\alpha, \beta]$ taškais $\alpha = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = \beta$ į dalinius intervalus. Kiekvienam daliniam intervalui $[y_{k-1}, y_k]$ egzistuoja intervalo $[a, b]$ poaibis I_k, kuriam priklauso visi x, kuriems $f(x) \in [y_{k-1}, y_k]$ (žiūr. paveikslėlį).



Matas kiekvieno tokio intervalo yra $m(I_k)$. Sudarome sumą

$$S_n = y_1 m(I_1) + y_2 m(I_2) + \cdots + y_k m(I_k) + \cdots + y_n m(I_n).$$

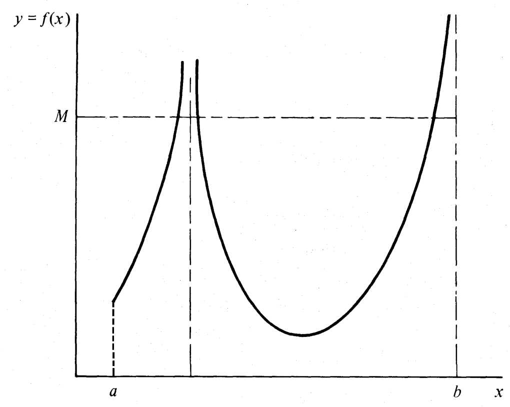
Šios sumos riba, kai ji egzistuoja, yra funkcijos $f(x)$ Lebego integralas ir žymima

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Tolydžioms neneigiamoms funkcijoms taip apibrėžtas Lebego integralas sutampa su Rymano integralu ir yra lygus kreivinės trapecijos plotui, t.y. plotui figūros apribotos abscisių ašies, dviejų tiesių $x = a$, $x = b$ ir kreivės $f(x)$.

Neaprėžtos funkcijos

Tarkime, kad funkcija $f(x)$ yra neaprėžta, mati, ir neneigiama intervale $I = [a, b]$, t.y. tokia kaip paveikslėlyje.



Apibrėšime funkciją

$$F_M(x) = \begin{cases} f(x), & \text{kai } 0 \leqslant f(x) \leqslant M, \\ M, & \text{kai } f(x) > M. \end{cases}$$

Ši funkcija yra mati ir aprėžta. Aprėžtumas – akivaizdus, o matumas išplaukia iš lygybės

$$\{x\colon\ F_M(x) < c\} = \begin{cases} \{x\colon\ f(x) < c\}, & \text{kai } c \leq M, \\ [a, b], & \text{kai } c > M. \end{cases}$$

Tuomet Lebego integralas nuo neneigiamos funkcijos $f(x)$ intervale I apibrėžiamas lygybe

$$(L)\int_I f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty}(L)\int_I F_M(x)\,dx.$$

Riba visada egzistuoja. Jei ji yra baigtinė, tai funkcija f vadinama *sumuojama* (integruojama) intervale I. Jei ji begalinė, tai – *neintegruojama.*

10.4 apibrėžimas. *Mačioji funkcija f vadinama kvaziintegruojama, jei bent vienas iš skaičių $\int_I f^+(x)\,dx$, $\int_I f^-(x)\,dx$ yra baigtinis. Tokios funkcijos f integralu $\int_I f(x)\,dx$ vadinamas dydis*

$$\int_I f(x)\,dx = \int_I f^+(x)\,dx - \int_I f^-(x)\,dx$$

Mačioji funkcija vadinama integruojama, jei $\int_I f^+(x)\,dx < \infty$ ir $\int_I f^-(x)\,dx < \infty$.

10.5 apibrėžimas. *Mačiosios funkcijos $f\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ integralu mačioje aibėje $A \subset \mathbb{R}$ vadinamas skaičius*

$$\int_A f(x)\,dx := \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathbf{1}_A(x)\,dx$$

(su sąlyga, kad pastarasis integralas yra apibrėžtas).

4 pvz. Ar funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \in \mathbb{Q} \cap [1,2], \\ \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}, & \text{kai } x \in \overline{\mathbb{Q}} \cap [1,2] \end{cases}$$

integruojama Lebego prasme.

Sprendimas. Funkcija $f(x)$ yra neaprėžta. Apibrėžiame funkcijas

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \in \mathbb{Q} \cap [1,2], \\ \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}, & \text{kai } x \in \overline{\mathbb{Q}} \cap [1+\frac{1}{n^3}, 2], \\ n, & \text{kai } x \in \overline{\mathbb{Q}} \cap [1, 1+\frac{1}{n^3}) \end{cases}$$

ir

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}, & \text{kai } 1+\frac{1}{n^3} \leqslant x \leqslant 2, \\ n, & \text{kai } 1 \leqslant x < 1+\frac{1}{n^3}. \end{cases}$$

Funkcijos $f_n(x)$ ir $g_n(x)$ beveik visur sutampa. Kadangi funkcijos $g_n(x)$ yra tolydžios ir aprėžtos intervale $[1,2]$, tai egzistuoja jų Rymano integralai. Vadinasi,

$$\begin{aligned} (L)\int_1^2 g_n(x)\,dx &= (R)\int_1^2 g_n(x)\,dx \\ &= \int_1^{1+n^{-3}} n\,dx + \int_{1+n^{-3}}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} \\ &= n\cdot\frac{1}{n^3} + \frac{3}{2}(x-1)^{2/3}\Big|_{1+n^{-3}}^2 = \frac{1}{n^2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2n^2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2}. \end{aligned}$$

Kadangi funkcijų g_n Lebego integralai egzistuoja ir funkcijos $f_n(x)$ ir $g_n(x)$ beveik visur sutampa, tai

$$(L)\int_1^2 f_n(x)\,dx = (L)\int_1^2 g_n(x)\,dx.$$

Todėl

$$(L)\int_1^2 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}(L)\int_1^2 f_n(x)\,dx = \frac{3}{2}.$$

Užduotys

1. Nagrinėkime funkciją

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{jei } x \text{ yra racionalusis skaičius,} \\ -x, & \text{jei } x \text{ yra iracionalusis skaičius.} \end{cases}$$

Ar ši funkcija integruojama Rymano prasme baigtiniame intervale? Ar ši funkcija integruojama Lebego prasme baigtiniame intervale?

2. Apskaičiuokite integralą $(L)\int_0^1 f(x)dx$, jei

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kai } x \text{ yra iracionalusis skaičius ir } > \frac{1}{3}, \\ x^3, & \text{kai } x \text{ yra iracionalusis skaičius ir } < \frac{1}{3}, \\ 0, & \text{kitais atvejais.} \end{cases}$$

3. Apskaičiuokite integralą $(L)\int_0^1 f(x)dx$, jei

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{kai } x \text{ yra iracionalusis skaičius,} \\ x^3, & \text{kai } x \text{ yra racionalusis skaičius.} \end{cases}$$

11 Baigtinės variacijos funkcijos

Funkcijos $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ (*pilnąja*) variacija intervale $[a,b]$ vadinamas skaičius (gali būti lygus $+\infty$)

$$v(f) = v\Big(f;[a,b]\Big) := \sup_{\kappa} \sum_i |f(x_{i+1}) - f(x_i)|,$$

čia tikslusis viršutinis rėžis skaičiuojamas visų intervalo $[a,b]$ skaidinių $\kappa = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$, $n \in \mathbb{N}$, atžvilgiu. Jei $v(f;[a,b]) < \infty$, tai f vadiname *baigtinės* (arba *aprėžtos*) *variacijos* intervale [a,b] funkcija. Visų tokių funkcijų aibę žymėsime $W([a,b])$.

11.1 teiginys. 1) *Funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, turinti aprėžtą išvestinę f' intervale $[a,b]$, išskyrus galbūt baigtinį pirmojo tipo trūkio taškų skaičių, yra baigtinės variacijos funkcija. Atskiru atveju $f \in C^1([a,b])$, t.y. kai f yra tolydžiai diferencijuojama funkcija (turi tolydžią išvestinę), yra baigtinės variacijos ir*

$$v\Big(f;[a,b]\Big) = \int_a^b |f'(x)|\,dx.$$

2) *Funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, išreiškiama dviejų didėjančių funkcijų skirtumu, yra baigtinės variacijos funkcija.*

11.1 apibrėžimas. *Sakoma, kad funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tenkina Hiolderio sąlygą su rodikliu α, $\alpha > 0$, jei egzistuoja konstanta L tokia, kad bet kokiems $x, y \in [a,b]$ teisinga nelygybė*

$$\Big|f(x) - f(y)\Big| \leqslant L|x-y|^{\alpha}.$$

Konstanta L vadinama Hiolderio konstanta, o α – Hiolderio rodikliu. Jei $\alpha = 1$, tai sakome kad tenkinama Lipšico sąlyga.

1 pvz. Jei funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ yra Lipšico, tai ji yra baigtinės variacijos funkcija.

Sprendimas.

$$\sum_i \Big|f(x_i) - f(x_{i-1})\Big| \leqslant L \sum_i |x_i - x_{i-1}| = L(b-a).$$

2 pvz. Apskaičiuokime funkcijos $f(x) = x^2$, $x \in [-1,2]$, variaciją.

Sprendimas.

$$v\Big(f;[-1,2]\Big) = \int_{-1}^{2} |2x|\, dx = \int_{-1}^{0} (-2x)\, dx + \int_{0}^{2} 2x\, dx = -x^2\Big|_{-1}^{0} + x^2\Big|_{0}^{2} = 1+4 = 5.$$

3 pvz. Apskaičiuokime funkcijos

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{jei } x = 0, \\ 1-x, & \text{jei } 0 < x < 1, \\ 5, & \text{jei } x = 1 \end{cases}$$

baigtinę variaciją intervale $[0,1]$.

Sprendimas. Imkime bet kokį intervalo [0,1] skaidinį $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$. Tuomet

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \Big|f(x_i) - f(x_{i-1})\Big| \\
&\quad = \Big|f(x_1) - f(x_0)\Big| + \Big\{\Big|f(x_2) - f(x_1)\Big| + \cdots + \Big|f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})\Big|\Big\} \\
&\qquad + \Big|f(x_n) - f(x_{n-1})\Big| \\
&\quad = |1 - x_1 - 0| + \Big\{|x_2 - x_1| + \cdots + |x_{n-1} - x_{n-2}|\Big\} + |5 - (1 - x_{n-1})| \\
&\quad = (1 - x_1) + (x_{n-1} - x_1) + (4 + x_{n-1}) = 5 + 2(x_{n-1} - x_1) < 7.
\end{aligned}$$

Sumą $\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$ galima padaryti kiek norima artimą 7. Todėl variacija $v(f;[0,1]) = 7$.

11.2 teiginys. *Kiekviena baigtinės variacijos funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ yra aprėžta.*

Įrodymas. Tarkime, kad $f(x)$ yra baigtinės variacijos funkcija $[a,b]$ ir x yra bet kuris $[a,b]$ taškas. Iš pilnos variacijos apibrėžimo turime, kad

$$|f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leqslant v(f;[a,b]).$$

Todėl $|f(x) - f(a)| \leqslant v(f;[a,b])$ ir $||f(x)| - |f(a)|| \leqslant |f(x) - f(a)|$. Vadinasi, $|f(x)| \leqslant v(f;[a,b]) + |f(a)|$.

11.3 teiginys. *Funkcija* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *turi intervale* $[a,b]$ *baigtinę variaciją tada ir tik tada, kai ji yra dviejų nemažėjančių tame intervale funkcijų skirtumas.*

11.1 pastaba. *Funkciją* $f(x)$ *visada galima užrašyti taip:* $f(x) = v(x) - u(x)$, $v(x) = v(f;[a,x])$, $u(x) = v(f;[a,x]) - f(x)$.

4 pvz. Užrašysime funkciją $f(x) = x^2$, $x \in [-2,3]$, kaip dviejų nemažėjančių tame intervale funkcijų skirtumą.

Sprendimas. Nesunku suvokti, kad

$$f(x) = g(x) - h(x), \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leqslant x < 0, \\ x^2, & 0 \leqslant x \leqslant 3, \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} -x^2, & -2 \leqslant x < 0, \\ 0, & 0 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$$

Šį uždavinį galima spręsti ir naudojantis 11.1 pastaba. Kadangi funkcija $f(x) = x^2$ yra tolydžiai diferencijuojama intervale $[-2,3]$, tai

$$\begin{aligned} v(f;[-2,x]) &= \int_{-2}^{x} 2|t|\,dt = \begin{cases} -2\int_{-2}^{x} t\,dt, & \text{kai } -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ -2\int_{-2}^{0} t\,dt + 2\int_0^x t\,dt, & \text{kai } 0 < x \leqslant 3, \end{cases} \\ &= \begin{cases} -t^2\Big|_{-2}^{x}, & \text{kai } -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ -t^2\Big|_{-2}^{0} + t^2\Big|_0^x, & \text{kai } 0 < x \leqslant 3, \end{cases} = \begin{cases} -x^2 + 4, & \text{kai } -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ 4 + x^2, & \text{kai } 0 < x \leqslant 3 \end{cases} \end{aligned}$$

ir

$$u(x) = \begin{cases} -2x^2 + 4, & -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ 4, & 0 < x \leqslant 3. \end{cases}$$

Užduotys

1. Ar funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kai } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 3x - 2, & \text{kai } 1 < x \leqslant 2, \\ 2x, & \text{kai } 2 < x \leqslant 3 \end{cases}$$

yra baigtinės variacijos intervale $[0,3]$?

2. Ar funkcija $f(x) = x^2 - 3[x]$, apibrėžta intervale $[0,3]$, yra baigtinės variacijos?

3. Ar funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & \text{kai } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 1 + \cos 2x, & \text{kai } \frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi, \end{cases}$$

yra baigtinės variacijos intervale $[0,\pi]$?

4. Apskaičiuokime funkcijos

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{jei } x<1, \\ 10, & \text{jei } x=1, \\ x^2, & \text{jei } x>1 \end{cases}$$

baigtinę variaciją intervale $[0,2]$. Ats.: 23.

5. Baigtinės variacijos funkciją

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{jei } x \in [0,1), \\ 0, & \text{jei } x=1, \\ 1, & \text{jei } x \in (1,2] \end{cases}$$

užrašykite kaip dviejų nemažėjančių funkcijų skirtumą.

12 Styltjeso integralas

12.1 apibrėžimas. *Funkcijos $f \in S([a,b])$ Styltjeso integralu funkcijos $g \in \mathcal{W}([a,b])$ atžvilgiu vadinamas skaičius*

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) := \sum_{k=0}^{n-1} f_k\Big(g(x_{k+1}) - g(x_k)\Big),$$

čia f_k – funkcijos f reikšmė jos pastovumo intervale I_k su galais $x_k \leqslant x_{k+1}$, t.y. $I_k = (x_k, x_{k+1})$, $[x_k, x_{k+1}]$, $[x_k, x_{k+1})$, $(x_k, x_{k+1}]$.

12.2 apibrėžimas. *Funkcijos $f \in D([a,b])$ Styltjeso integralu funkcijos $g \in \mathcal{W}([a,b])$ atžvilgiu vadinamas skaičius*

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) := \lim_{n\to\infty} \int_a^b \phi_n(x)\,dg(x),$$

čia $\{\phi_n\}$ – bet kokia laiptinių funkcijų seka, konverguojanti tolygiai intervale $[a,b]$ į funkciją f.

12.1 teorema. (Styltjeso integralo egzistavimas ir apibrėžimo korektiškumas.)

1) *Apibrėžime nurodyta riba visada egzistuoja ir neprikauso nuo sekos $\{\phi_n\}$ pasirinkimo.*

2) *Jei $f \in D([a,b])$ ir $g \in \mathcal{W}([a,b])$, tai*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dg(x)\right| \leqslant \sup_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)| \cdot v(g;[a,b]).$$

3) *Jei* $f \in C([a,b])$ *ir* $g \in C^1([a,b])$, *tai*

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

13 Metrinės erdvės

Aibė, kurioje vienaip ar kitaip apibrėžta sekos ribos sąvoka, paprastai vadinama *erdve*. Erdvės, kurios elementais yra funkcijos arba skaitinės sekos, vadinsime *funkcinėmis erdvėmis*. Kai kurių operatorių klasių, apibrėžtų funkcinėse erdvėse, nagrinėjimas ir sudaro funkcinės analizės pagrindą.

Viena iš pagrindinių analizės operacijų yra perėjimas prie ribos. Ši operacija grindžiama faktu, kad skaičių tiesėje yra apibrėžtas atstumas nuo vieno taško iki kito. Daugelis analizės pagrindinių tvirtinimų remiasi atstumo sąvoka. Apibendrindami realiųjų skaičių sampratą kaip aibę, kurioje įvestas atstumas tarp elementų, mes gauname *metrinės erdvės* sąvoką.

13.1 apibrėžimas. *Metrine erdve vadinama pora* (X, ρ), *susidedanti iš tam tikros aibės (erdvės)* X *elementų ir atstumo, t.y. vienareikšmės, neneigiamos, realiosios funkcijos* $\rho(x,y)$ *apibrėžtos bet kuriems* x *ir* y *iš* X *ir tenkinančios sekančias tris aksiomas:*

1) $\rho(x,y) = 0$ *tada ir tik tada, kai* $x = y$,
2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ *(simetrijos aksioma),*
3) $\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z)$ *(trikampio aksioma).*

Pvz. 1) Aibė realiųjų skaičių su atstumu $\rho(x,y) = |x-y|$ yra metrinė erdvė $\mathbb{R}^1$.

2) Aibė elementų $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ su atstumu

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k)^2}$$

vadinama n-mačia aritmetine Euklidine erdve $\mathbb{R}^n$. 1) ir 2) aksiomos yra akivaizdžiai patenkintos. Patikrinsime 3) aksiomą. Tarkime, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ir $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Tuomet trikampio nelygybė atrodo taip;

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (z_k - x_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (z_k - y_k)^2}. \tag{3}$$

Pažymėkime $y_k - x_k = a_k$, $z_k - y_k = b_k$. Tuomet $z_k - x_k = a_k + b_k$ ir

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}. \tag{4}$$

Ši nelygybė seka iš Koši-Buniakovskio nelygybės

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Tikrai, iš šios nelygybės seka, kad

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2 &= \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2} + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \\ &= \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}\right)^2.\end{aligned}$$

Taigi įrodėme nelygybę (4), o tuo pačiu ir nelygybę (3).

3) Aibę elementų $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ su atstumu

$$\rho_1(x,y) = \sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k|$$

žymime $\mathbb{R}_1^n$. Akivaizdžiai patenkintos aksiomos 1)-3).

4) Apibrėžkime atstumą tarp elementų $\rho_\infty(x,y) = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |y_k - x_k|$. Šią erdvę žymime $\mathbb{R}_\infty^n$.

5) Aibė $C([a,b])$ visų tolydžių realiųjų funkcijų, apibrėžtų intervale $[a,b]$, su atstumu $\rho(x,y) = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |x(t) - y(t)|$ vadinama visų tolydžių funkcijų erdve.

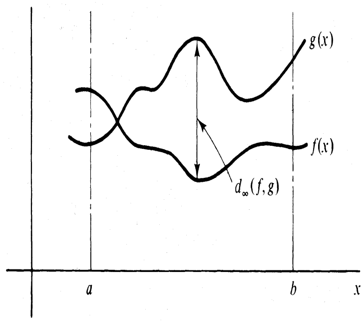
Patikrinsime metrikos aksiomas. Akivaizdu, kad $\rho(x,y) \geqslant 0$. Be to $\rho(x,y) = 0$, jei $x(t) \equiv y(t)$, $\forall t \in [a,b]$. Akivaizdu, kad $\rho(x,y) = \rho(y,x)$. Belieka patikrinti trikampio aksiomą. Bet kokiam $t \in [a,b]$

$$\begin{aligned}|x(t) - z(t)| &\leqslant |x(t) - y(t)| + |y(t) - z(t)| \\ &\leqslant \max_{a\leqslant t\leqslant b} |x(t) - y(t)| + \max_{a\leqslant t\leqslant b} |y(t) - z(t)| = \rho(x,y) + \rho(y,z).\end{aligned}$$

Todėl

$$\rho(x,z) = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |x(t) - z(t)| \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z).$$

Kas šiuo atveju yra atstumas – žiūrėkite paveikslėlį



$d_\infty(f,g)$

6) Funkcija $x(t)$, apibrėžta ir mati intervale $[0,1]$ vadinama integruojama p-tuoju laipsniu arba funkcija iš klasės $L_p([0,1])$, jei

$$\int_0^1 |x(t)|^p dt < \infty,$$

čia $p \geqslant 1$, o integralas – Lebego. Dvi funkcijas, besiskiriančias nulinio mato aibėje, laikysime tapačiomis. Jei $x \in L_p([0,1])$ ir $y \in L_p([0,1])$, tai apibrėžiame atstumą lygybe

$$\rho(x,y) = \left(\int_0^1 |x(t) - y(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

7) Ar erdvė $\mathbb{R}$ su funkcija $\rho(x,y) = \sin^2(x-y)$ yra metrinė? Ne, nes funkcija $\rho(x,y)$ netenkina 1-osios atstumo aksiomos, t.y. iš lygybės $\sin^2(x-y) = 0$ neišplaukia lygybė $x = y$. Paimkime pvz. $y = x + \pi$. Tada $\sin^2(x-y) = 0$, bet $x \neq y$.

8) Ar erdvė $\mathbb{R}$ su funkcija $\rho(x,y) = (x-y)^2$ yra metrinė? Ne, nes funkcija $\rho(x,y)$ netenkina 3-osios atstumo aksiomos. Turėtų būti teisinga nelygybė

$$(x-z)^2 \leqslant (x-y)^2 + (y-z)^2 \quad \text{arba} \quad (a+b)^2 \leqslant a^2 + b^2,$$

jei pažymėsime $a = x - y$, $b = y - z$. Akivaizdu, kad pastaroji nelygybė yra neteisinga, kai $a, b \geqslant 0$ arba $a, b \leqslant 0$. Vadinasi, funkcija $\rho(x,y)$ nėra atstumas.

Užduotys

1. Aibėje $\mathbb{R}$ apibrėžkime funkciją $\rho(x,y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$. Ar ši funkcija yra yra metrika?

2. Aibėje $\mathbb{R}$ apibrėžkime funkciją $\rho(x, y) = |\,[x] - [y]|$. Ar ši funkcija yra yra metrika? Čia $[x]$ – svekoji x dalis.

3. Aibėje $\mathbb{R}$ apibrėžkime funkciją $\rho(x, y) = \sqrt{|x - y|}$. Ar ši funkcija yra yra metrika?

4. Aibėje $\mathbb{R}$ apibrėžkime funkciją $\rho(x, y) = \ln(1 + |x - y|\,)$. Ar ši funkcija yra yra metrika?

5. Aibėje $\mathbb{R}$ apibrėžkime funkciją $\rho(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$. Ar ši funkcija yra yra metrika?

6. Aibėje $\mathbb{N}$ apibrėžkime funkciją $\rho(x, y) = \frac{|x-y|}{xy}$. Ar ši funkcija yra yra metrika?

7. Aibėje $\mathbb{R}$ apibrėžkime funkciją $\rho(x, y) = |\,\mathrm{arctg}(x - y)|$. Ar ši funkcija yra yra metrika?

8. Aibėje $\mathbb{R}$ apibrėžkime funkciją $\rho(x, y) = \ln(1 + \frac{|x-y|}{1+|x-y|})$. Ar ši funkcija yra yra metrika?

14 Atviros ir uždaros aibės

Jei (X, ρ) yra metrinė erdvė ir $Y \subset X$, tai į aibę Y galima žiūrėti kaip į atskirą metrinę erdvę su ta pačia metrika kaip ir aibėje X. Tokia metrinė erdvė (Y, ρ) yra vadinama *metrinės erdvės* (X, ρ) *poerdviu.*

Sakykime $a \in X$ ir $r > 0$. Aibę

$$B(a, r) = \{x \in X\colon\ \rho(x, a) < r\}$$

vadinsime *atviruoju rutuliu* arba *rutuliu* su centru taške a ir spinduliu r, o aibę

$$\{x \in X\colon\ \rho(x, a) \leqslant r\}$$

– *uždaruoju rutuliu.*

1 pvz. Jei $X = \mathbb{R}$ ir $\rho(x, y) = |x - y|$, $x, y \in X$, tai *atvirasis rutulys* su centru taške $a \in \mathbb{R}$ ir spinduliu r yra intervalas $(a - r, a + r)$.

2 pvz. Jei $X = \mathbb{R}^2$ ir $M_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, $M_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ ir

$$d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

tai *atviruoju rutuliu* su centru taške $A = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ ir spinduliu $r > 0$ vadinsime skritulį su centru taške A ir spinduliu $r > 0$. Atviras rutulys $B(0, 1)$ pavaizduotas paveikslėlyje (a).

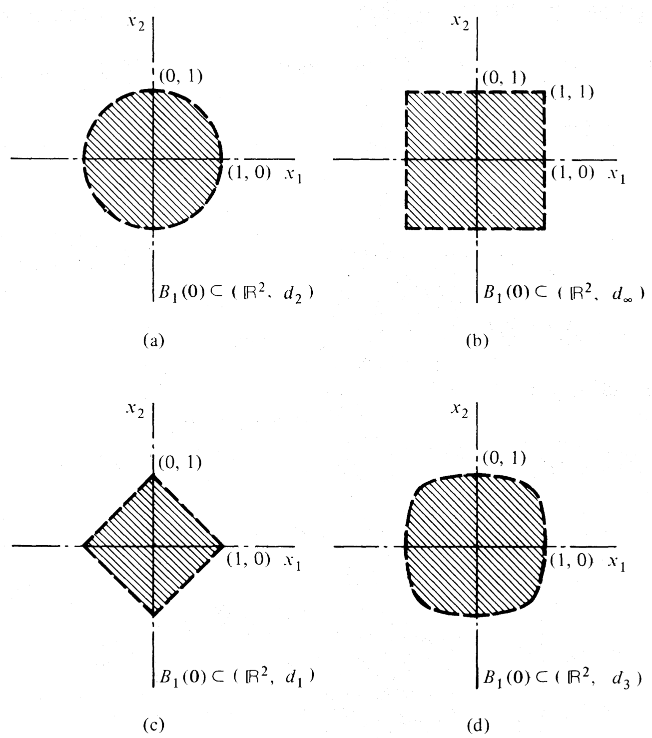
3 pvz. Jei $X = \mathbb{R}^2$, $d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$, tai $B(0, 1)$ yra kvadratas (žiūr. pav. (b)).

4 pvz. Jei $X = \mathbb{R}^2$, $d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$, tai $B(0, 1)$ yra pasuktas kvadratas (žiūr. pav. (c)).

5 pvz. Jei $X = \mathbb{R}^2$,

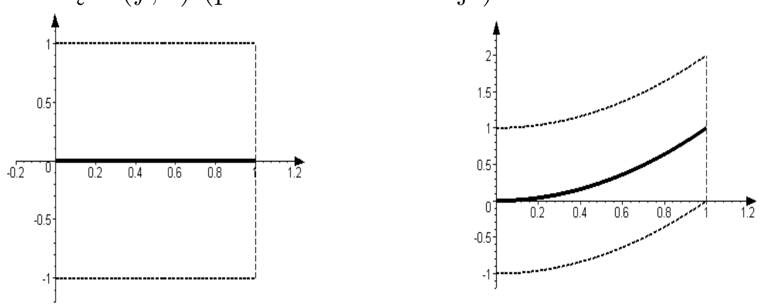
$$d_3(x, y) = \sqrt[3]{|x_1 - y_1|^3 + |x_2 - y_2|^3},$$

tai $B(0, 1)$ pavaizduotas pav. (d).



6 pvz. Tarkime, kad $X = C([a, b])$ ir $d_\infty(f, g) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |f(t) - g(t)|$.

Erdvėje $C([0, 1])$ nubrėžkime rutulį $B(0, 1)$. Šiuo atveju rutulio centras yra tolydi funkcija tapatingai lygi nuliui, t.y. atkarpa nuo 0 iki 1 (x ašyje). Atviras rutulys $B(0, 1)$ yra stačiakampio vidus, kurio kraštinės jam nepriklauso (paveikslėlis kairėje). Fiksuokime funkciją, pvz., $f(t) = t^2$. Nubrėžkime rutulį $B(f, 1)$ (paveikslėlis dešinėje).



Metrinės erdvės X taško *a rutuline aplinka* vadinsime bet kokio spindulio atvirąjį rutulį su centru taške a; taško *a aplinka* vadinsime bet kokį aibės X poaibį A, uždengiantį bent vieną taško a rutulinę aplinką, t.y. jei egzistuoja toks r, kad $B(a, r) \subset A$. Aibės X poaibį A vadinsime *atviruoju* metrinėje erdvėje X, jei kiekvienam aibės A taškui a egzistuoja tokia rutulinė aplinka $B(a, r)$, kad $B(a, r) \subset A$, t.y. jei aibė A yra kiekvieno savo taško aplinka. Aibės X poaibį A vadinsime *uždaruoju*, jei $X \backslash A$ yra atviroji aibė metrinėje erdvėje X. Tuščioji aibė $\emptyset$ ir visa metrinė erdvė X yra ir atvirosios, ir uždarosios aibės.

Tarkime, a yra metrinės erdvės X taškas ir $A \subset X$. Taškas a vadinamas *ribiniu aibės A tašku*, jei kiekvienoje jo aplinkoje yra bent vienas aibės A taškas nesutampantis su a. Ribinis taškas gali priklausyti aibei A, o gali ir nepriklausyti.

Aibė, gauta prijungus prie A visus jos ribinius taškus, vadinama aibės A *uždariniu* ir žymima $[A]$.

14.1 teorema. *Uždarinys tenkina sekančias savybes:*

$$\begin{aligned} &1)\ A \subset [A], \quad 2)\ [[A]] = [A], \quad 3)\ \text{jei } a \subset B, \text{tai } [A] \subset [B], \\ &4)\ [A \cup B] = [A] \cup [B], \quad 5)\ [\emptyset] = \emptyset, \quad 6)\ [A] \text{ yra uždara aibė.} \end{aligned}$$

14.1 apibrėžimas. *Metrinės erdvės aibė A vadinama* **aprėžta***, jei ji yra kokio nors rutulio poaibis.*

Pvz. Nagrinėkime aibę E tolydžių funkcijų apibrėžtų intervale $[0, 1]$ ir tenkinančių nelygybę $A \leqslant f(x) \leqslant B$ (čia $A < B$ – duoti skaičiai). Tuomet aibė E yra uždara erdvėje $C([0, 1])$.

Sprendimas. Šio pavyzdžio sprendimą pateiksime kitame skyrelyje.

Pvz. Nagrinėkime aibę E tolydžių funkcijų apibrėžtų intervale $[0, 1]$ ir tenkinančių nelygybę $A < f(x) < B$ (čia $A < B$ – duoti skaičiai). Tuomet aibė E yra atvira erdvėje $C([0, 1])$.

Sprendimas. Tarkime $\varphi \in E$. Tada $A < \varphi(x) < B$ visiems $x \in [0, 1]$. Pažymėkime $\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} \varphi(x) = \beta$ ir $\min_{0 \leqslant x \leqslant 1} \varphi(x) = \alpha$. Aišku, kad $\beta \neq B$, nes $\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} \varphi(x)$ įgyjamas tam tikrame taške $x_0 \in [0, 1]$, t.y. $\varphi(x_0) = \beta$. Bet $\varphi(x_0) < B$. Todėl $\beta < B$. Analogiškai, $\alpha > A$. Pažymėkime $\varepsilon = \min(\alpha - A, B - \beta)$. Tada visos funkcijos tenkinančios nelygybę $\varphi(x) - \varepsilon < g(x) < \varphi(x) + \varepsilon$ priklauso aibei E. Iš kitos pusės, visos tokios funkcijos g sudaro funkcijos $\varphi(x)$ ε-aplinką. Taip yra todėl, nes tik tokios funkcijos tenkina nelygybę $\rho(\varphi, g) < \varepsilon$. Vadinasi, kartu su funkcija $g(x)$ aibei E priklauso tam tikra funkcijos φ aplinka. Todėl E yra atvira aibė erdvėje $C([0, 1])$.

14.2 teorema. *Metrinėje erdvėje bet kokia skaiti atvirųjų aibių sąjunga ir baigtinio skaičiaus atvirųjų aibių sankirta yra atviroji aibė.*

Įrodymas. 1. Sakykime, kad $A = \cup_n A_n$. Jei $x \in A$, tai x priklauso kokiai nors aibei A_n, o kadangi A_n – atviroji aibė, tai ji yra taško x aplinka. Be to, $A_n \subset A$. Taigi egzistuoja tokia kiekvieno aibės A taško x aplinka, kad $A_n \subset A$, todėl pagal atvirosios aibės apibrežimą aibė A yra atvira.

2. Tegu $\{A_1, \ldots, A_n\}$ – baigtinė atvirų aibių sistema ir $A = \cap_{k=1}^n A_k$. Jei $x \in A$, tai $x \in A_k$, $\forall k = 1, \ldots, n$. Kadangi aibės A_k yra atvirosios, tai egzistuoja tokios taško x rutulinės aplinkos V_k, kad $V_k \subset A_k$, $k = 1, \ldots, n$. Pažymekime ε_k taško x rutulinės aplinkos V_k spindulį, t.y. $V_k = B(x, \varepsilon_k)$. Tada aibe $V = \cap_{k=1}^n V_k$ yra taško x rutulinė aplinka (baigtinio skaičiaus rutulių su bendru centru sankirta yra lygi vienam iš tų rutulių, būtent tam, kurio spindulys mažiausias). Be to $V \subset V_k \subset A_k$ visiems $k = 1, \ldots, n$. Todėl $V \subset A$. Taigi egzistuoja tokia bet kokio $x \in A$ rutulinė aplinka V, kad $V \subset A$. Todėl pagal apibrežimą aibė A yra atvira.

Pvz. $\bigcap_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}) = [1, 2]$.

14.1 išvada. *Metrinėje erdvėje bet kokia skaiti uždarųjų aibių sankirta ir baigtinio skaičiaus uždarųjų aibių sąjunga yra uždaroji aibė.*

Užduotys

1. Sakykime, $F(x)$ yra fiksuota tolydi funkcija apibrėžta intervale $[0, 1]$. Įrodykite, kad aibė visų tolydžių funkcijų, apibrėžtų intervale $[0, 1]$ ir tenkinančių nelygybę $f(x) \leqslant F(x)$ yra uždara erdvėje $C([0, 1])$.

2. Patikrinkite, ar erdvėse $C([0, 1])$, $L_p(0, 1)$, $p > 0$, aprėžtos šios aibės:
a) $M_1 = \{t^n, n \in \mathbb{N}\}$;
b) $M_2 = \{nt, n \in \mathbb{N}\}$;
c) $M_3 = \{e^{t+\alpha}, 0 \leqslant \alpha < \infty\}$;
d) $M_4 = \{1 - \alpha t^2, 0 \leqslant \alpha \leqslant A\}$;
e) $M_5 = \{\frac{1}{1+\alpha t}, 0 \leqslant \alpha \leqslant \infty\}$.

3. Patikrinkite, ar erdvėse c, ℓ^p, $p > 0$, aprėžtos šios aibės:
a) $M_1 = \{(1, 2, \ldots, n, 0, \ldots), n \in \mathbb{N}\}$;
b) $M_2 = \{(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, \ldots), n \in \mathbb{N}\}$;
c) $M_3 = \{(\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{n}, 0, \ldots), n \in \mathbb{N}\}$;
d) $M_4 = \left\{\left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, \ldots\right), n \in \mathbb{N}\right\}$;
e) $M_5 = \left\{\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \ldots, \frac{1}{n+m}, \ldots\right), n \in \mathbb{N}\right\}$.

Čia c – visų konverguojančių skaitinių sekų $x = (x_1, x_2, \ldots)$ aibė su metrika $\rho(x, y) = \sup_n |x_n - y_n|$; ℓ^p, $p > 0$, – aibė visų skaitinių sekų

$x=(x_1,x_2,\dots)$, kurioms konverguoja eilutė $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p$, su metrika

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k-y_k|^p\right)^{1/p},\quad p\geqslant 1,\qquad \rho(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}|x_k-y_k|^p,\quad 0<p<1.$$

3. Skaičius $\sup_{x,y\in M}\rho(x,y)$ vadinamas aibės $M\subset(X,\rho)$ diametru ir žymimas $\operatorname{diam} M$. Raskite šių erdvės $\mathbb{R}^2$ aibių diametrus:
a) $M_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1,\ a,b>0\}$;
b) $M_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon\ a|x|+b|y|\leqslant 1,\ a,b>0\}$;
c) $M_3=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon\ \max(|x|,a|y|)\leqslant 1,\ a>0\}$;
d) $M_4=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon\ ax^2\leqslant y\leqslant b,\ a,b>0\}$.
4. Raskite šių erdvės $C([0,1])$ aibių diametrus:
a) $M_1=\{\operatorname{arctg}(t-\alpha),\ \alpha\in\mathbb{R}\}$;
b) $M_2=\{t^n,\ n\in\mathbb{N}\}$.

15 Sekos riba

15.1 apibrėžimas. *Sakykime, kad (x_n) yra metrinės erdvės X seka. Sakysime, kad ši seka konverguoja į tašką x, jei kiekvienai rutulinei taško x aplinkai $B(x,\varepsilon)$ priklauso visi taškai x_n, pradedant tam tikru numeriu N_ε. Rašysime $x_n\to x$ arba $\lim_n x_n=x$.*

Šį apibrėžimą galima suformuluoti ir kitaip.

15.2 apibrėžimas. *Metrinės erdvės X taškų seka (x_n) konverguoja į tašką $x\in X$, jei $lim_{n\to\infty}\rho(x_n,x)=0$. Tašką, $x=\lim_n x_n$ vadinsime sekos (x_n) riba. Seką (x_n) vadinsime konverguojančia, jei ji konverguoja į kokį nors erdvės X tašką.*

Iš apibrežimo seka, kad jei x_n konverguoja į tašką x, tai ir bet koks jos posekis konverguoja į tą patį tašką.

15.1 teorema. *Metrinės erdvės seka (x_n) gali konverguoti ne daugiau kaip į vieną ribą.*

Įrodymas. Tarkime, $x_n\to x$ ir $x_n\to y$. Tuomet bet kokiam $\varepsilon>0$

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x_n,x)+\rho(x_n,y)<\varepsilon,$$

kai n yra pakankamai didelis. Kadangi x ir y yra fiksuoti taškai, o $\varepsilon>0$ bet koks, tai ši nelygybė galima tik tuo atveju, jei $\rho(x,y)=0$, t.y. kai $x=y$.

15.2 teorema. *Metrinės erdvės (X,ρ) aibė A yra uždara tada ir tik tada, jei kiekviena taškų (x_n) seka iš A, t.y. $(x_n)\subset A$, konverguojanti erdvėje X turi ribą kuri priklauso A.*

Įrodymas. Būtinumas. Tarkime, kad A yra uždara. Reikia įrodyti, kad $A = [A]$. Akivaizdu, kad $A \subset [A]$. Tarkime, kad egzistuoja toks taškas $x_0 \in [A]$, kuris nepriklauso A. Vadinasi, $x_0 \in X \backslash A$, t.y. x_0 priklauso atvirai aibei $X \backslash A$. O tai reiškia, kad $x_0 \in X \backslash A$ su kažkokia rutuline aplinka $B(x_0, r)$. Šioje rutulinėje aplinkoje $B(x_0, r)$ nėra aibės A taškų. Bet tai prieštarauja, kad $x_0 \in [A]$.

Pakankamumas. Tarkime, kad bet kokiai $(x_n) \subset A$ konverguojančiai į $x \in X$ taškas x priklauso ir A. Tada A yra uždara, nes iš uždarinio $[A]$ apibrėžimo seka, kad $A = [A]$. O $[A]$ yra uždara aibė.

Pvz. Nagrinėkime aibę E tolydžių funkcijų apibrėžtų intervale $[0, 1]$ ir tenkinančių nelygybę $A \leqslant f(x) \leqslant B$ (čia $A < B$ – duoti skaičiai). Tuomet aibė E yra uždara erdvėje $C([0, 1])$.

Sprendimas. Sakykime, $\varphi(x)$ yra aibės E ribinis elementas. Tuomet galėsime surasti aibės E elementų seką $\{f_n(x)\}$, kuri konverguoja į $\varphi(x)$, t.y. $\sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f_n(x) - \varphi(x)| \to 0$, kai $n \to \infty$. Taigi turime funkcijų seką $\{f_n(x)\}$, kuri tolygiai konverguoja į $\varphi(x)$. Kadangi kiekvienam $x \in [0, 1]$, $A \leqslant f_n(x) \leqslant B$, tai ir ribai teisinga nelygybė $A \leqslant \lim_n f_n(x) \leqslant B$, t.y. $A \leqslant \varphi(x) \leqslant B$.

Užduotys

1. Kuriose iš erdvių $C([0, 1])$, $L_p(0, 1)$, $p > 0$, konverguoja šios sekos:

a) $x_n(t) = \begin{cases} nt, & \text{kai } 0 \leqslant t \leqslant 1/n, \\ 1, & \text{kai } 1/n \leqslant t \leqslant 1; \end{cases}$

b) $x_n(t) = t^n$;

c) $x_n(t) = t^n - t^{2n}$;

d) $x_n(t) = \frac{nt}{1+n^2t^2}$.

2. Ar erdvėje ℓ^p, $p \geqslant 1$, konverguoja sekos:

a) $x^{(n)} = \Big\{ \underbrace{\frac{1}{n^\alpha}, \frac{1}{n^\alpha}, \cdots, \frac{1}{n^\alpha}}_{n}, 0, \ldots \Big\}$;

b) $x^{(n)} = \left\{ \frac{1}{1+n}, \frac{1}{2+n}, \cdots, \frac{1}{m+n}, \ldots \right\}$

16 Tirštosios aibės

16.1 apibrėžimas. *Aibė $A \subset (X, \rho)$ yra visur tiršta erdvėje X, jei jos uždarinys $[A]$ sutampa su visa erdve X.*

Vaizdžiai kalbant, jei A yra visur tiršta X, tai X taškai yra artimi A taškams.

16.1 teorema. *Tarkime, $A \subset X$, (X, ρ) yra metrinė erdvė. Tada A yra visur tiršta erdvėje X tada ir tik tada, jei kiekvienam $\varepsilon > 0$ ir kiekvienam $x \in X$ egzistuoja elementas $a \in A$ toks, kad $\rho(x, a) < \varepsilon$.*

Įrodymas. Jei A yra visur tiršta X, tai kiekviena konverguojanti aibės A seka turi ribą x, kuri priklauso $[A] = X$. Todėl kiekvienam $\varepsilon > 0$ ir pakankankamai dideliam n atstumas $\rho(x_n, x) < \varepsilon$, kai $x_n \in A$.

Atvirkščiai, jei $\rho(x_n, x) < \varepsilon$, tai imdami vis mažėjančius ε, gausime seką A elementų a_n, konverguojančių į tašką $x \in X$.

16.2 apibrėžimas. *Metrinė erdvė (X, ρ) vadinama separabilia, jei joje yra skaiti visur tiršta aibė.*

Iš (16.1) teoremos seka, kad jei (X, ρ) yra separabili, tai kiekvienam $x \in X$ egzistuoja skaiti taškų aibė $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ tokia, kad kiekvienam $\varepsilon > 0$ ir kiekvienam $x \in A$ yra elementas x_n šioje aibėje toks, kad $\rho(x, x_n) < \varepsilon$.

Pavyzdžiai

1) $\mathbb{R}$ yra separabili, nes racionaliųjų skaičių aibė yra visur tiršta ir skaiti.

2) Erdvės $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_1$ ir $\mathbb{R}^n_\infty$ yra separabilios (vektonai su racionaliomis koordinatėmis).

3) Erdvė $C([0,1])$ separabili. Nagrinėkime erdvėje $C([0,1])$ visų daugianarių su racionaliais koeficientais aibę C_0. Aibė C_0 yra skaiti. Dabar įsitikmsime, kad ji visur tiršta $C([0,1])$. Iš Vejerštraso teoremos turime, kad bet kokiai funkcijai $x(t) \in C([0,1])$ egzistuoja daugianaris $p(t)$ toks, kad $\sup_t |x(t) - p(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$, čia $\varepsilon > 0$ – duotas skaičius. Be to, egzistuoja toks daugianaris $p_0(t)$ su racionaliais koeficientais, kad $\sup_t |p(t) - p_0(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Todėl $\rho(x, p_0) = \sup_t |x(t) - p(t)| < \varepsilon$. O tai ir reikėjo įrodyti.

4) Erdvė $L_p([0,1])$ – separabeli. Aibė visų tolydžių funkcijų intervale [0,1] yra visur tiršta $L_p([0,1])$. Visų polinomų su racionaliaisiais koeficientais aibė yra skaiti ir visur tiršta $L_p([0,1])$.

5) Skaičių sekų erdvė l_p ($p \geqslant 1$) su metrika $\rho(x, y) := (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p)^{1/p}$. Tai aibė sekų $x = (x_1, x_2, \ldots)$ tokių, kad $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$. Ji separabeli. Tarkime E_0 – aibė elementų $\{r_1, r_2, \ldots, r_n, 0, 0, \ldots\}$, čia r_k – bet kokie racionalieji skaičiai, o $n \in \mathbb{N}$ irgi bet koks. Aibė E_0 yra skaiti ir visur tiršta l_p. Tikrai, tarkime $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_p$ yra bet koks aibės elementas ir tarkime duotas $\varepsilon > 0$. Rasime tokį $n \in \mathbb{N}$, kad $\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p < \frac{\varepsilon}{2}$. Dabar paimkime elementą $x_0 = (r_1, r_2, \ldots, r_n, 0, 0, \ldots)$ tokį, kad $\sum_{k=1}^{n} |x_k - r_k|^p < \frac{\varepsilon}{2}$. Tuomet

$$\Big[\rho(x, x_0)\Big]^p = \sum_{k=1}^{n} |x_k - r_k|^p + \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p < \frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} = \varepsilon^p.$$

Todėl $\rho(x, x_0) < \varepsilon$.

6) Erdvė l^∞ yra neseparabeli. l^∞ – tai aibė visų aprėžtų skaitinių sekų aibė su metrika $\rho(x,y) = \sup_k |x_k - y_k|$, t.y. kiekvienam jos elementui x egzistuoja tokia konstanta K_x, kad $|x_i| \leqslant K_x \ \forall i$.

17 Pilnosios metrinės erdvės

17.1 apibrėžimas. *Metrinės erdvės elementų seka* (x_n) *vadinama fundamentaliąja arba Koši seka, jei kiekvienam* $\varepsilon > 0$ *egzistuoja toks* $N \in \mathbb{N}$*, kad* $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$*, jei* $m, n > N$*.*

Metrinė erdvė vadinama *pilnąja metrine erdve*, jei kiekviena jos elementų fundamentalioji seka konverguoja į kokį nors tos erdvės elementą.

Kiekviena konverguojanti seka yra fundamentalioji. Imkime $\varepsilon > 0$. Kadangi $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$, tai egzistuoja toks $N \in \mathbb{N}$, kad $\rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$, kai $n > N$. Sakykime, kad $n, m > N$. Tada

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_m, x) + \rho(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Pilnų erdvių pvz.:

1) $\mathbb{R}$ yra pilna erdvė. Tai žinome iš matematinės analizės kurso. (Koši kriterijus: Seka (x_n) konverguoja tada ir tik tada, kai ji yra fundamentalioji.)

2) Erdvės $\mathbb{R}^n$ pilnumas seka iš $\mathbb{R}^1$ pilnumo. Tarkime, $(x^{(p)})$ yra fundamentalioji $\mathbb{R}^n$ taškų seka, t.y. kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks $N = N_\varepsilon$, kad

$$\sum_{k=1}^{n} \left(x_k^{(p)} - x_k^{(q)}\right)^2 < \varepsilon^2$$

visiems $p, q > N$. Čia $x^{(p)} = (x_1^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)})$. Tuomet kiekvienam $k = 1, 2, \ldots, n$ gauname $|x_k^{(p)} - x_k^{(q)}| < \varepsilon$, $\forall p, q > N$, t.y. $(x_k^{(p)})$ yra fundamentalioji skaičių seka. Pažymėkime

$$x_k = \lim_{p\to\infty} x_k^{(p)}, \qquad x = (x_1, \ldots, x_n).$$

Tuomet $\lim_{p\to\infty} x^{(p)} = x$

3) Metrinė erdvė $(C([a,b]), \rho)$ – pilna. Čia atstumas $\rho(x,y) = \sup_{a\leqslant t\leqslant b} |x(t) - y(t)|$. Tarkime, $(x_n(t))$ yra kokia nors fundamentalioji seka erdvėje $C([a,b])$. Tai reiškia, kad kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks N, kad

$$\left|x_n(t) - x_m(t)\right| < \varepsilon, \tag{5}$$

kai $n, m > N$ visiems t, $a \leqslant t \leqslant b$. Vadinasi, seka $(x_n(t))$ tolygiai konverguoja. Priminsime ką tai reiškia.

17.1 teorema. (Koši kriterijus) *Funkcijų seka $\{f_n(x)\}$ aibėje X konverguoja tolygiai į kokią nors ribinę funkciją tada ir tik tada, kai kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks numeris $N(\varepsilon)$, kad visi x iš aibės X tenkina nelygybę*

$$\left|f_{n+m}(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon,$$

kai $n > N(\varepsilon)$, o m – bet kuris natūralusis skaičius ($m \in \mathbb{N}$).

Vėl pasinaudokime matematine analize. Kadangi seka $\{x_n(t)\}$ tolygiai konverguoja ir funkcijos $x_n(t)$ yra tolydžios, tai ribinė funkcija $x(t)$ bus tolydi. Pereikime prie ribos nelygybėje (5), kai $m \to \infty$. Tuomet

$$\left|x_n(t) - x(t)\right| \leqslant \varepsilon, \quad \forall t \text{ ir } \forall n > N.$$

O tai ir reiškia, kad $\{x_n(t)\}$ konverguoja į $x(t)$ metrikos ρ atžvilgiu. $\square$

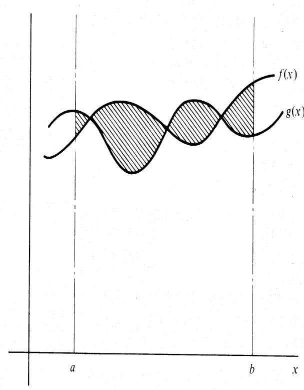
Dabar pateiksime kelis pvz. **erdvių, kurios nėra pilnos**.

1) Nagrinėkime racionaliųjų skaičių aibę $\mathbb{Q}$ su atstumu $\rho(r_1, r_2) = |r_1 - r_2|$. Erdvė $(\mathbb{Q}, \rho)$ yra metrinė. Paimkime seką $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Ši seka yra fundamentali, nes ji konverguoja į e, bet jos riba nepriklauso $\mathbb{Q}$.

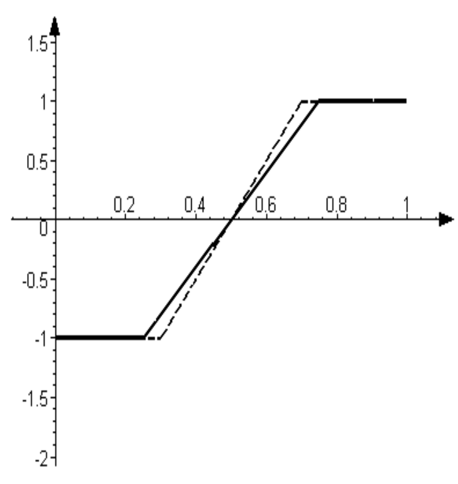
2) Nagrinėkime erdvę $C_1([0,1])$, t.y. $C([0,1])$ su metrika

$$\rho(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Nagrinėjamą metriką galima interpretuoti kaip plotą tarp kreivių f ir g.



$d_1(f,g)$



Parodysime, kad ji nepilna. Konstruojame seką

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & \text{kai } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\,, \\ nx - \frac{n}{2}, & \text{kai } \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < x \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\,, \\ 1, & \text{kai } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} < x \leqslant 1\,, \end{cases} \qquad n \geqslant 3.$$

Ši seka fundamentali, nes kai $m > n$

$$\begin{aligned}
\rho(f_n, f_m) &= \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|\,dx = \int_0^{1/2-1/n} |f_n(x) - f_m(x)|\,dx \\
&\quad + \int_{1/2-1/n}^{1/2+1/n} |f_n(x) - f_m(x)|\,dx + \int_{1/2+1/n}^{1} |f_n(x) - f_m(x)|\,dx \\
&= \int_{1/2-1/n}^{1/2+1/n} |f_n(x) - f_m(x)|\,dx \leqslant 2 \cdot \frac{2}{n} = \frac{4}{n}\,.
\end{aligned}$$

Vadinasi, $\rho(f_n, f_m) < \varepsilon$, kai $n > [\frac{4}{\varepsilon}] = N(\varepsilon)$.

Nesunku pastebėti, kad kiekviename taške $x \in [0, 1]$

$$f_n(x) \longrightarrow \hat{g}(x) = \begin{cases} -1, & \text{kai } x \in [0, \frac{1}{2})\,, \\ 0, & \text{kai } x = \frac{1}{2}\,, \\ 1, & \text{kai } x \in (\frac{1}{2}\,, 1], \end{cases}$$

t.y. funkcijos f_n konverguoja pataškiui į trūkią funkciją.

Funkcija $\hat{g}(x)$ beveik visur lygi funkcijai

$$g(x) = \begin{cases} -1, & \text{kai } x \in [0, \frac{1}{2})\,, \\ 1, & \text{kai } x \in [\frac{1}{2}\,, 1]. \end{cases}$$

Funkcija $g(x)$ yra beveik visur tolydi ir

$$\int_0^1 |g(x) - \hat{g}(x)|\,dx = 0,$$

t.y. $\rho(g, \hat{g}) = 0$. Todėl pakanka nagrinėti atstumą $\rho(f_n, g)$. Aišku, kad

$$\begin{aligned}
\rho(f_n, g) &= \int_{1/2-1/n}^{1/2} |f_n(x) - g(x)|\,dx + \int_{1/2}^{1/2+1/n} |f_n(x) - g(x)|\,dx \\
&= 2\int_{1/2}^{1/2+1/n} |f_n(x) - g(x)|\,dx = 2\int_{1/2}^{1/2+1/n} \Big(1 - nx + \frac{n}{2}\Big)dx \\
&= 2\Big(x - n\,\frac{x^2}{2} + \frac{n}{2}\,x\Big)\Big|_{1/2}^{1/2+1/n} = \frac{1}{n} \to 0, \qquad \text{kai } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Gavome, kad erdvėje $C_1([0, 1])$ fundamentalioji funkcijų seka $\{f_n\}$ konverguoja į trūkią funkciją $\hat{g}(x)$. Todėl erdvė $C_1([0, 1])$ nėra pilna.

3) Erdvė $C_2([0, 1])$, t.y. $C([0, 1])$ su metrika

$$\rho(f, g) = \left\{ \int_0^1 |f(x) - g(x)|^2 dx \right\}^{1/2}$$

irgi nėra pilna.

17.2 teorema. *Metrinė erdvė X bus pilna tada ir tik tada, kai joje bet kuri įdėtų vienas į kitą uždarų rutulių seka, kurių spinduliai artėja į nulį, turi netuščią sankirtą.*

Ši teorema apibendrina įdėtų vienas į kitą intervalų lemą, kuri formuluojama matematinėje analizėje.

17.3 teorema. *Pilnos metrinės erdvės (X,ρ) poerdvis (Y,ρ) yra pilna erdvė tada ir tik tada, jei Y yra uždara aibė.*

Pvz. Aibė $X = \{x \in R : 0 < x < 1\} \subset \mathbb{R}$ su metrika $d(x,y) = |x-y|$ nėra pilna erdvė, bet $\{x \in R : 0 \leq x \leq 1\}$ jau pilna erdvė.

18 Tolydūs metrinių erdvių atvaizdžiai

18.1 apibrėžimas. *Tarkime, (X,ρ) ir (Y,d) yra dvi metrinės erdvės, o f – atvaizdis iš X į Y, t.y. $f\colon\ X \to Y$. Atvaizdį f vadinsime* **tolydžiu taške** *$x_0 \in X$, jei kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$, kad*

$$d\Big(f(x), f(x_0)\Big) < \varepsilon$$

visiems $x \in B(x_0,\delta) = \{x \in X\colon\ \rho(x,x_0) < \delta\}$. Atvaizdis $f\colon\ X \to Y$ vadinamas **tolydžiuoju***, jei jis yra tolydus kiekviename erdvės X taške.*

18.2 apibrėžimas. *Sakoma, kad atvaizdis $f\colon\ (X,\rho) \to (Y,d)$ tenkina Lipšico sąlygą su konstanta L, jei su bet kokiais $x, y \in X$ teisinga nelygybė*

$$d\Big(f(x), f(y)\Big) \leqslant L\rho(x,y).$$

Akivaizdu, kad jei atvaizdis tenkina Lipšico sąlygą, tai jis yra tolydus. Tikrai. Imkime bet kokį $\varepsilon > 0$ ir pažymėkime $\delta = \varepsilon/L$. Tuomet, kai $\rho(x,y) < \delta$, tai $d(f(x), f(y)) \leqslant L\rho(x,y) < \varepsilon$.

1 pvz. Atvaizdis $f(x) = \int_0^1 x(t)\sin t\,dt$ iš erdvės $C([0,1])$ į $\mathbb{R}$, t.y. $f\colon C([0,1]) \to \mathbb{R}$, yra Lipšico.

Sprendimas.

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= \left|\int_0^1 \Big(x(t) - y(t)\Big)\sin t\,dt\right| \leqslant \int_0^1 \Big|x(t) - y(t)\Big|\,dt \\
&\leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |x(t) - y(t)| \int_0^1 dt = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |x(t) - y(t)|.
\end{aligned}$$

2 pvz. Atvaizdis $f\colon C([0,1]) \to C([0,1])$, apibrėžtas lygybe $(fx)(t) = x(0)\cdot t^2$, yra Lipšico.

Sprendimas. Pasiaiškinkime, kaip suprasti užrašą $(fx)(t)$. Kiekvienai funkcijai (aibės $C([0,1])$ elementui) $x \in C([0,1])$ priskiriama kita funkcija fx, kurios reišmė taške t apibrėžiama lygybe $x(0) \cdot t^2$. Taigi

$$\rho\Big(fx, fy\Big) = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(0) \cdot t^2 - y(0) \cdot t^2| = |x(0) - y(0)| \leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t) - y(t)|\,.$$

Užduotys

Ar atvaizdžiai f yra tolydūs:
a) $f\colon\ C([0,1]) \to \mathbb{R}$ apibrėžtas lygybe $f(x) = x(0) - 2x(\frac{1}{2}) + 4x(1)$;
b) $f\colon\ C([0,1]) \to \mathbb{R}$ apibrėžtas lygybe $f(x) = \int_0^1 t^{-1/3} x(t)\, dt$;
c) $f\colon\ C([0,1]) \to C([0,1])$ apibrėžtas lygybe $(fx)(t) = \int_0^1 \sin(t-s) x(s)\, ds$;
d) $f\colon\ C([0,1]) \to C([0,1])$ apibrėžtas lygybe $(fx)(t) = x(0) \cdot t^2$;
e) $f\colon\ C([0,1]) \to C([0,1])$ apibrėžtas lygybe $(fx)(t) = x^2(t)$?

19 Erdvės pildinys

Jei erdvė (X, ρ) nėra pilna, tai ją visada galima tam tikru būdu įjungti į pilną erdvę.

19.1 apibrėžimas. *Tarkime, (X, ρ) ir (Y, d) yra dvi metrinės erdvės. Abipusiškai vienareikšmis atvaizdis (bijekcija) $f\colon\ X \to Y$ vadinamas* **izometrija**, *jei $\rho(x, y) = d(f(x), f(y))$ visiems $x, y \in X$. Erdvės (X, ρ) ir (Y, d), tarp kurių galima sukonstruoti izometrinį atvaizdį, vadinamos* **izometrinėmis**.

Erdvių (X, ρ) ir (Y, d) izometrija reiškia, kad metriniai ryšiai tarp jų elementų yra tie patys. Gali skirtis tik elementų kilmė (prigimtis), o tai metrinių erdvių požiūriu yra neesminga. Ateityje izometrines erdves tapatinsime.

19.2 apibrėžimas. *Aibė $A \subset (X, \rho)$ yra visur tiršta erdvėje X, jei jos uždarinys $[A]$ sutampa su visa erdve X.*

19.3 apibrėžimas. *Tarkime, (X, ρ) yra metrinė erdvė. Pilna metrinė erdvė (X^*, ρ^*) vadinama erdvės (X, ρ)* **pildiniu**, *jei $\exists$ erdvės (X^*, ρ^*) poerdvis (Y, ρ^*), kuris yra visur tirštas (X^*, ρ^*) ir kuris yra izometrinis (X, ρ).*

19.1 teorema. *Kiekvieną metrinę erdvę galima papildyti iki pilnosios. Visi jos pildiniai yra izometriški.*

1 pvz. Aibė visų realiųjų skaičių yra racionaliųjų skaičių pildinys, nes racionaliųjų skaičių aibė yra visur tiršta erdvėje $\mathbb{R}$.

2 pvz. Tarkime, $C_0([0,1])$ – erdvė daugianarių, apibrėžtų intervale [0,1] su metrika $\rho\left(p,q\right)=\max\limits_{0\leqslant\ t\leqslant\ 1}\left|p\left(t\right)-q\left(t\right)\right|,\ p,q\in C_0\left([0,1]\right)$**.** Erdvė $C_0\left([0,1]\right)$ yra nepilna, bet ji visur tiršta $C\left([0,1]\right)$. Dabar tuo įsitikinsime.

Iš Vejerštraso teoremos turime, kad bet kokiai funkcijai $x(t)\in C([0,1])$ egzistuoja daugianaris $p(t)$ toks, kad $\sup_t|x(t)-p(t)|<\varepsilon$, t.y. $\rho(x,p)<\varepsilon$, čia $\varepsilon>0$ – duotas skaičius. O tai ir reikėjo įrodyti.

Todėl erdvės $C_0\left([0,1]\right)$ pildinys yra izometriškas erdvei $C\left([0,1]\right)$.

3 pvz. Erdvės $C_p\left([0,1]\right)$, t.y. erdvė tolydžių funkcijų su metrika $\rho\left(x,y\right)=\left(\int\limits_0^1\left|x\left(t\right)-y\left(t\right)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$, pildinys yra erdvė, izometrinė $L_p\left([0,1]\right)$.

20 Sutraukiantysis atvaizdis

Tarkime, (X,ρ) yra metrinė erdvė.

20.1 apibrėžimas. *Atvaizdis $A:X\to X$ vadinamas sutraukiančiuoju, jei $\exists$ teigiamas skaičius $\alpha<1$ toks, kad $\rho\left(Ax,Ay\right)\leq\alpha\rho\left(x,y\right)$ visiems $x,y\in X$. Taškas x, su kuriuo $Ax=x$, vadinamas atvaizdžio A nejudamuoju tašku.*

20.1 teorema. (Banacho teorema) *Bet koks sutraukiantysis atvaizdis, apibrėžtas pilnoje metrinėje erdvėje X, turi vieną ir tik vieną nejudamąjį tašką.*

Įrodymas. Fiksuokime bet kurį elementą $x_0\in X$ ir apibrėžkime $x_1=Ax_0, x_2=Ax_1=A^2x_0$ ir t.t., t.y. apibrėžkime $x_n=Ax_{n-1}=A^nx_0$.

Įrodysime, kad (x_n) yra Koši seka. Remiantis šios sekos narių apibrėžimais ir tardami, kad $m\geq n$, turime:

$$\begin{aligned}\rho\left(x_n,x_m\right) &= \rho\left(A^nx_0,A^mx_0\right)\leqslant\alpha^n\rho\left(x_0,x_{m-n}\right)\\ &\leqslant \alpha^n\left\{\rho\left(x_0,x_1\right)+\rho\left(x_1,x_2\right)+...+\rho\left(x_{m-n-1},x_{m-n}\right)\right\}\\ &\leqslant \alpha^n\rho\left(x_0,x_1\right)\left\{1+\alpha+\alpha^2+...+\alpha^{m-n-1}\right\}\leqslant\alpha^n\rho\left(x_0,x_1\right)\frac{1}{1-\alpha}.\end{aligned}$$

Kadangi $\alpha<1$, tai imdami n pakankamai didelį gausime, kad dešinė pusė gali būti kiek norima maža. Iš čia seka, kad (x_n) yra Koši seka. Kadangi erdvė X yra pilna, tai $\exists$ toks elementas $x\in X$, kad $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$.

Įrodysime, kad $Ax=x$. Iš tikrųjų,

$$\begin{aligned}\rho\left(x,Ax\right) &\leqslant \rho\left(x,x_n\right)+\rho\left(x_n,Ax\right)=\rho\left(x,x_n\right)+\rho\left(Ax_{n-1},Ax\right)\\ &\leqslant \rho\left(x,x_n\right)+\alpha\rho\left(x_{n-1},x\right).\end{aligned}$$

Tačiau bet kokiam $\varepsilon>0$ ir pakankamai dideliems n turime, kad $\rho\left(x,x_n\right)<\frac{\varepsilon}{2}$ ir $\alpha\rho\left(x,x_{n-1}\right)<\frac{\varepsilon}{2}$. Vadinasi, $\rho\left(x,Ax\right)<\varepsilon$. Kadangi $\varepsilon>0$ yra laisvai pasirinktas, tai $\rho\left(x,Ax\right)=0$, t.y. $Ax=x$.

Lieka įrodyti, kad nejudamas taškas yra vienintelis. Jei $\exists$ dar vienas taškas $y \in X$, su kuriuo $Ay = y$, tai $\rho\,(x, y) = \rho\,(Ax, Ay) \leqslant \alpha\rho\,(x, y)$.

Kadangi $\alpha < 1$, tai ši nelygybė teisinga vieninteliu atveju, kai $\rho\,(x, y) = 0$. Vadinasi, $x = y$.

21 Sutraukiančio atvaizdžio taikymas. Koši uždavinys

Nagrinėkime diferencialinę lygtį

$$\frac{dy}{dx} = f\,(x, y) \tag{6}$$

su pradine sąlyga $y\,(x_0) = y_0$.

Tarkime, kad f apibrėžta ir tolydi tam tikroje srityje G, kuriai priklauso taškas (x_0, y_0), ir šioje srityje tenkina Lipšico sąlygą kintamojo y atžvilgiu, t.y.

$$\Big| f\,(x, y_1) - f\,(x, y_2) \Big| \leqslant L|y_1 - y_2|.$$

Įrodysime, kad tam tikrame intervale $|x - x_0| \leqslant a$ egzistuoja ir tik vienas (6) lygties su pradine sąlyga $y(x_0) = y_0$ sprendinys $y = \varphi(x)$.

(6) lygtis su pradine sąlyga $y(x_0) = y_0$ yra ekvivalenti integralinei lygčiai

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\Big(t, \varphi(t)\Big) dt. \tag{7}$$

Kadangi funkcija f yra tolydi, tai $|f(x, y)| \leqslant K$ tam tikroje srityje $G' \subset G$ kuriai priklauso $(x_0, y_0) \in G'$. Parinkime $a > 0$ taip, kad būtų patenkintos sąlygos:

1) $(x, y) \in G'$, jei $|x - x_0| \leqslant a$, $|y - y_0| \leqslant Ka$;

2) $L \cdot a < 1$.

Pažymėkime raide C^* erdvę tolydžių funkcijų φ, apibrėžtų intervale $|x - x_0| \leqslant a$ ir tokių, kad $|\varphi(x) - y_0| \leqslant Ka$. Atstumą erdvėje C^* apibrėžkime lygybe $\rho(\varphi_1, \varphi_2) = \max_{x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|$. Tuomet (C^*, ρ) yra pilna metrinė erdvė, nes ji yra uždaras pilnos metrinės erdvės poaibis, t.y. $C^* \subset C([x_0 - a, x_0 + a])$. ($C^*$ uždarumas seka iš pvz., kuris buvo išnagrinėtas 15 skyrelyje.)

Nagrinėkime atvaizdį $A\varphi$, apibrėžtą formule

$$A\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\,(t, \varphi(t))\, dt,$$

čia $|x - x_0| \leqslant a$. Šis atvaizdis pilną erdvę C^* atvaizduoja į ją pačią ir yra sutraukiantysis. Tai dabar ir patikrinsime. Tarkime, kad $\varphi \in C^*$, $|x - x_0| \leqslant a$. Tada

$$|A\varphi(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f\Big(t, \varphi(t)\Big) dt \right| \leqslant Ka.$$

Vadinasi, $A(C^*) \subset C^*$. Be to,

$$\begin{aligned} |A\varphi_1(x) - A\varphi_2(x)| &\leqslant \int_{x_0}^{x} |f\,(t, \varphi_1(t)) - f\,(t, \varphi_2(t))|\, dt \\ &\leqslant L \cdot a \max_{x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|\ . \end{aligned}$$

Taigi

$$\rho\Big(A\varphi_1, A\varphi_2\Big) \leqslant La \cdot \rho\Big(\varphi_1, \varphi_2\Big).$$

Kadangi $La < 1$, tai atvaizdis A yra sutraukiantysis. Vadinasi, lygtis $\varphi = A\varphi$, t.y (7), turi vienintelį sprendinį erdvėje C^*.

Taigi įrodėme Koši uždavinio egzistavimo ir vienaties teorema.

(6) lygties sprendinį mes galime ieškoti konstruodami artinį $y_1 = Ay_0, y_2 = Ay_1, \ldots, y_n = Ay_{n-1}, \ldots$ Galima parodyti, kad tikrojo sprendinio $y\,(x)$ ir $y_n\,(x)$ skirtumas neviršija

$$|y\,(x) - y_n\,(x)\,| \leqslant K \cdot L^n \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\ .$$

22 Metrinių erdvių kompaktinės aibės

22.1 apibrėžimas. *Metrinė erdvės X aibės K denginiu vadinama tokia tos metrinės erdvės aibių sistema D, kad kiekvienas aibės K taškas priklauso bent vienai sistemos D aibei. Denginys D vadinamas atviruoju, jei visos jo aibės yra atviros.*

Jei D yra aibės K denginys, tai sakysime, kad aibių sistema D uždengia aibę K.

Sakysime, kad iš aibės K denginio D galime išrinkti baigtinį podenginį, jei egzistuoja baigtinė denginio D aibių A_k, $k = 1, 2, ..., n$, sistema $D_0 = \{A_1, ..., A_n\}$, $D_0 \subset D$, kuri uždengia aibę K.

22.2 apibrėžimas. *Metrinės erdvės X aibė K vadinama* **kompaktiška**, *jei iš kiekvieno atviro jos denginio galima išrinkti baigtinį podenginį. Metrinė erdvė X vadinama* **metriniu kompaktu** *arba* **kompaktiška metrine erdve**, *jei visa X yra kompaktiška.*

22.1 teorema. *Kompaktiška metrinės erdvės aibė yra uždara.*

Įrodymas. Sakysime, kad K yra kompaktiška metrinės erdvės X aibė. Įrodysime, kad aibė $X \setminus K$ – atvira.

Tegu $y \in X \setminus K$. Tada egzistuoja tokia kiekvieno taško $x \in K$ atvira aplinka U_x ir taško y aplinka $V_y(x)$, kad $U_x \cap V_y(x) = \emptyset$. Visų tokių aplinkų sistema $A = \{U_x : x \in K\}$ yra atviroji kompaktiškos aibės K danga. Todėl iš jos galima išrinkti baigtinį podenginį $\{U_{x_1}, U_{x_2}, ..., U_{x_n}\} \subset A$.

Taško y aplinkų $V_y(x_1), V_y(x_2), ..., V_y(x_n)$ sankirta V irgi yra taško y aplinka. Be to, V neturi bendrų taškų su aibėmis $U_{x_k}, k = 1, 2, ..., n$, taigi ir su tų aibių sąjunga $\bigcup_{k=1}^{n} U_{x_k}$. Tačiau $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_{x_k}$. Todėl $V \cap K = \emptyset$, t.y., $V \subset X \setminus K$.

Įrodėme, kad egzistuoja tokia kiekvieno $y \in X \setminus K$ aplinka V, kad $V \subset X \setminus K$. Todėl aibė $X \setminus K$ - atvira, o aibė K - uždara.

22.2 teorema. *Kiekvienas uždaros kompaktiškos aibės poaibis yra kompaktiška aibė.*

Įrodymas. Tegu K - kompaktiškos metrinės erdvės X aibė, $F \subset K$, ir F - uždara erdvėje X. Įrodysime, kad F – kompaktiška aibė.

Sakykime, kad $\mathcal{A}$ yra koks nors aibės F atvirasis denginys. Praplėsime atvirų aibių sistemą $\mathcal{A}$, prijungdami prie jos dar vieną atvirą aibę, būtent, aibę $X \setminus F$. Pažymėkime gautąją atvirų aibių sistemą $\widetilde{\mathcal{A}}$. Sistema $\widetilde{\mathcal{A}}$ uždengia visą metrinę erdvę X, taigi ir kompaktišką aibę K. Todėl iš sistemos $\widetilde{\mathcal{A}}$ galima išrinkti baigtinį aibės K podenginį. Tą podenginį sudarys baigtinis skaičius sistemos $\mathcal{A}$ aibių $A_1, A_2, ..., A_n$ ir galbūt aibė $X \setminus F$. Aibių sistema $\{A_1, A_2, ..., A_n, X \setminus F\}$ uždengia aibę K ir juo labiau aibės K poaibį F. Tačiau aibėje $X \setminus F$ nėra aibės F taškų, todėl ir sistema $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ uždengia aibę F.

Įrodėme, kad bet kokia atviroji aibės F danga $\mathcal{A}$ turi baigtinį podengį $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$. Todėl F yra kompaktiška aibė.

22.3 teorema. *Kiekvienas begalinės kompaktiškos aibės K poaibis turi bent vieną ribinį tašką, priklausantį aibei K.*

Įrodymas. Sakykime, kad E – begalinės aibės K poaibis. Jie aibė E neturėtų ribinių taškų, priklausančių aibei K, tai egzistuotų tokia kiekvieno $x \in K$ rutulinė aplinka B_x, kurioje nebūtų, nebent, išskyrus, galbūt, patį tašką x, nei vieno taško iš E.

Tokių aplinkų sistema $A = \{B_x : x \in K\}$ būtų atvirasis aibės denginys.

Išskirkime iš jos baigtinį podengį.

Kadangi visa aibė K, o tuo pačiu ir E, yra uždengtos šio baigtinio podengio, tai aibė E turi būti baigtinė, nes kiekvienoje aplinkoje gali būti ne daugiau kaip vienas taškas iš E.

Todėl begalinės aibės K poaibis E turi turėti ribinius taškus.

22.4 teorema. *Kiekviena kompaktiškos metrinės erdvės elementų seka turi konverguojantį posekį.*

Įrodymas. Sakykime, K - kompaktiška metrinės erdvės aibė ir (x_n) - aibės K elementų seka.

Jeigu visų sekos (x_n) elementų aibėje A yra tik baigtinis skaičius skirtingų elementų, tai sekoje (x_n) yra be galo daug lygių narių, iš kurių galima sudaryti konverguojantį posekį (visi to posekio nariai būtų tarp savęs lygūs).

Jeigu aibėje A yra be galo daug skirtingų sekos (x_n) narių, tai iš 3 teoremos seka, kad aibė A turi bent vieną ribinį tašką a.

Tegu $r_n > 0$, ir $r_n \to 0$.

Kiekvienoje taško a rutulinėje aplinkoje $B\,(a, r_n)$ yra be galo daug aibės A taškų.

(Jei jų būtų tik baigtinis skaičius, tai paėmus mažiausią atstumą h tarp a ir tų taškų, kurie nelygūs a, ir nubrėžus atvirą rutulį $B\,(a, h)$ gautume, kad tame rutulyje nėra sekos (x_n) taškų.

O to negali būti, nes a - ribinis taškas). Sakykime, x_{n_1} - bet koks sekos (x_n) narys, priklausantis rutuliui $B\,(a, r_1)$.

Kadangi rutulyje $B\,(a, r_2)$ yra be galo daug sekos (x_n) narių, tai egzistuoja ir toks sekos (x_n) narys $x_{n_2} \in B\,(a, r_2)$, kad $n_2 > n_1$. Jei $x_{n_j} \in B\,(a, r_j)$ visiems $1 \leqslant j \leqslant k$ ir $n_1 < n_2 < ... < n_k$, tai $\exists$ toks sekos (x_n) narys $x_{n_{k+1}} \in B\,(a, r_{k+1})$, kad $n_{k+1} > n_k$ (nes rutulyje $B\,(a, r_{k+1})$ yra be galo daug sekos (x_n) narių).

Taigi $\exists$ toks sekos (x_n) posekis (x_{n_k}), kad $x_{n_k} \in B\,(a, r_k)$, t.y. $0 \leqslant \rho\,(x_{n_k}, a) \leqslant r_k$.

Perėję šioje nelygybėje prie ribos gauname $\lim \rho\,(x_{n_k}, a) = 0$, t.y. $x_{n_k} \to 0$.

22.5 teorema. *Jei metrinės erdvės aibė yra kompaktiška, tai ta aibė - aprėžta.*

Įrodymas. Sakykime, kad K - kompaktiška metrinės erdvės X aibė, ir $x_1 \in K$.

Kadangi K neapibrėžta, tai galima surasti elementą $x_2 \in K$, kuris nepriklauso rutuliui $B(x_1, 1)$.

Pažymėkime $r_2 = \rho\,(x_1, x_2) + 1$. Kadangi K yra neaprėžta, tai galime surasti elementą $x_3 \in K$ tokį, kad $x_3 \notin B\,(x_1, r_2)$.

Pažymėkime $r_3 = \rho\,(x_1, x_3) + 1$ ir t.t. Gausime seką $(x_n) \subset K$ tokią, kad $\rho\,(x_i, x_j) \geq 1$ kai $i \neq j$.

Vadinasi, sukonstravome seką, kuri neturi nei vieno konverguojančio posekio. Bet tai prieštarauja 4 teoremos tvirtinimui.

23 Tiesinės erdvės

23.1 apibrėžimas. *Netuščia elementų* $x, y, z, ...$ *aibė* L *vadinama tiesine arba* vektorine erdve, *jei ji tenkina sąlygas:*

1. *Bet kuriems dviems elementams* $x, y \in L$ *vienareikšmiškai apibrėžtas trečias elementas* $z \in L$, *vadinamas jų* suma *ir žymimas* $x + y$. *Be to:*

1) $x + y = y + x$ *(komutatyvumas)*

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ *(asociatyvumas)*

3) aibėje L *egzistuoja toks elementas* 0, *kad* $x + 0 = x$ *visiems* $x \in L$ *(nulio egzistavimas)*

4) Kiekvienam $x \in L$ *egzistuoja toks elementas* $-x$, *kad* $x + (-x) = 0$ *(priešingo elemento egzistavimas)*

2. *Bet kokiam skaičiui* α *ir bet kuriam elementui* $x \in L$ *apibrėžtas elementas* $\alpha x \in L$ *(elemento* x sandauga *iš skaičiaus* α*)*

1) $\alpha (\beta x) = (\alpha \beta) x$

2) $1 \cdot x = x$

3) $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$

4) $\alpha (x + y) = \alpha x + \alpha y$

Tiesinę erdvę vadiname **realiąja tiesine erdve**, *jei skaičiai* α, β *yra realūs. Jei skaičiai kompleksiniai, tai erdvė vadinama* **kompleksine tiesine erdve**.

Pvz.:

1. $\mathbb{R}$ su įprastinėmis sudėties ir daugybos operacijomis yra tiesinė erdvė.
2. $\mathbb{R}^n$ sumą ir daugybą iš skaičiaus apibrėžiame formulėmis:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) \\ \alpha (x_1, x_2, ..., x_n) &= (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n). \end{aligned}$$

Tada $\mathbb{R}^n$ bus tiesinė erdvė. Ji vadinama n-mačia realia aritmetine erdve.

3. Tolydžiosios funkcijos apibrėžtos intervale $[a, b]$ su įprastinėmis sumos ir sandaugos iš skaičiaus operacijomis yra tiesinė erdvė $C([a, b])$.
4. Erdvės $l^p\,(0 < p < \infty)$, l^∞, $L^p(a, b)$ yra tiesinės.

23.2 apibrėžimas. *Tiesinės erdvės* L *ir* L^* *vadinamos izomorfinėmis, jei tarp jų elementų galima nustatyti abipus vienareikšmį atvaizdavimą, išlaikantį algebrines operacijas, t.y. tokį, kad jei* $x \longleftrightarrow x^*$ *ir* $y \longleftrightarrow y^*$, *tai* $(x + y) \longleftrightarrow x^* + y^*$ *ir* $\alpha x \longleftrightarrow \alpha x^*$.

Paprastai izomorfinės tiesinės erdvės sutapatinamos, nes jų tiesinės struktūros vienodos.

Pavyzdys

Tarkime, $P_k(T)$, $T \subset R$, - polinomų su realiaisiais koeficientais, kurių laipsnis neviršija k, aibė. Tuomet $P_k(T)$ yra tiesinė erdvė. Erdvės R^{n+1} ir $P_n([a,b])$ izomorfinės, o formule $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} x_k t^k$, $x = (x_0, x_1, ..., x_n)$, $t \in [a,b]$ aprašytas atvaizdis $f : R^{n+1} \to P_n([a,b])$ yra abipusiškai vienareikšmis.

23.3 apibrėžimas. *Elementai $x_1, ..., x_n \in L$ vadinami **tiesiškai priklausomais**, jei egzistuoja tokie skaičiai $\lambda_1, ..., \lambda_n$, kad $\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \neq 0$, bet $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0$.*

*Jei lygybė $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0$ galima tiktai tada, kai $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$, tai elementai $x_1, ..., x_n$ vadinami **tiesiškai nepriklausomais**.*

*Aibė $A \subset L$ vadinama **tiesiškai nepriklausoma**, jei bet kuris jos elementų baigtinis rinkinys yra tiesiškai nepriklausomas.*

Pavyzdys (tiesinis priklausomumas). Tarkime, $\lambda_n \neq 0$. Tuomet

$$x_n = -\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right) x_1 - \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_n}\right) x_2 - ... - \left(\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right) x_{n-1},$$

arba, jei pažymėsime $-\frac{\lambda_i}{\lambda_n} = \mu_i$, tai $x_n = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + ... + \mu_{n-1} x_{n-1}$.

Šiuo atveju sakome, kad elementas x_n yra *tiesinė* elementų $x_1, ..., x_n$ *kombinacija*.

23.4 apibrėžimas. *Tarkime, L – tiesinė erdvė. Aibė $E \subset L$ vadinama tiesine* daugdara, *jei aibei E kartu su elementais $x_1, ..., x_n$ priklauso bet kokia jų tiesinė kombinacija $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$.*

Pastebėsime, kad tiesinei daugdarai priklauso nulinis elementas 0. Iš tikrųjų, kadangi E – netuščia, tai jai priklauso kažkoks elementas x. Kadangi E – tiesinė daugdara, tai jai priklauso ir elementas $-x = (-1) \cdot x$. Todėl jai priklauso ir $x + (-x) = 0$.

Tarkime, $x_1, ..., x_n$ yra tiesinės erdvės L elementai. Visuma visų galimų sumų $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ apibrėžia tiesinę daugdarą E_0 erdvėje L. Iš tikrųjų, jei elementai y_j turi pavidalą $y_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^j x_i$, $j = 1, 2, ..., k$, tai bet kokia šių elementų tiesinė kombinacija tenkina lygybę: $\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$. Vadinasi, E_0 yra tiesinė daugdara.

Taip sukonstruota tiesinė daugdara E_0 yra *mažiausia* tiesinė daugdara, kuriai priklauso elementai $x_1, ..., x_n$. (Mažiausia ta prasme, kad bet kuriai kitai tiesinei daugdarai E, kuriai priklauso elementai $x_1, ..., x_n$, priklauso ir E_0).

Tarkime, $\{x_1, ..., x_n, ...\}$ yra skaiti elementų iš L aibė. Mažiausia tiesine daugdara, kuriai priklauso šie elementai, yra aibė visų galimų sumų

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, čia ne tik λ_i yra bet kokie skaičiai, bet ir n įgyja bet kokias natūraliąsias reikšmes.

23.5 apibrėžimas. *Aibės $E \subset L$* ***tiesiniu apvalkalu*** span E *vadiname mažiausią tiesinę daugdarą erdvėje L, kurios poaibis yra aibėje E. Taigi,*

$$\operatorname{span} E = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : x_1, ..., x_n \in E,\ \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R} \ \textit{arba}\ \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Jei tiesinės erdvės L tiesinė daugdara E apibrėžiama naudojant baigtinį skaičių elementų, tai ji vadinama baigtiniamate.

Jei E – tiesinė daugdara erdvėje L, tai E – tiesinė erdvė tų pačių kaip ir L, sudėties ir daugybos iš skaičiaus operacijų atžvilgiu.

23.6 apibrėžimas. *Tiesinė erdvė L vadinama* ***m-mate*** *(žymima* $\dim L = m$*), jei toje erdvėje egzistuoja m tiesiškai nepriklausomų elementų ir bet kurie $m+1$ elementai yra tiesiškai priklausomi.*

Jei $\dim L = n$, tai bet kuris n tiesiškai nepriklausomų elementų rinkinys vadinamas *erdvės L baze*.

Jei erdvėje L egzistuoja be galo daug tiesiškai nepriklausomų elementų, tai sakoma, kad L begaliniamatė, arba begalinės dimensijos. Žymima $\dim L = \infty$.

Pavyzdys

Tarkime, kad L yra kokia nors tiesinė erdvė ir x yra koks nors jos nenulinis elementas. Aibė elementų $\{\lambda x\}$, čia $\lambda \in \mathbb{R}$ arba $\mathbb{C}$, yra vienmatė erdvė. Ji vadinama tiese.

Pavyzdys

$\dim C([a,b]) = \infty$, nes seka $(t^n) \subset C([a,b])$, $n = 0, 1, ...$, yra tiesiškai nepriklausomų elementų aibė.

24 Tiesiniai funkcionalai

Skaitinę funkciją f, apibrėžtą tam tikroje tiesinėje erdvėje L, mes vadiname **funkcionalu**.

Funkcionalą f vadiname **adityviuoju**, jei $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in L$.

Funkcionalą f vadiname **homogeniniu**, jei $f(\alpha x) = \alpha f(x)$, α – bet koks skaičius.

Adityvųjį homogeninį funkcionalą vadiname **tiesiniu funkcionalu**.

Pavyzdžiai:

1. $\mathbb{R}^n$, $a = (a_1, ..., a_n)$ – bet koks n fiksuotų skaičių rinkinys. Tuomet $f\,(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\, x_i$, $x \in \mathbb{R}^n$, yra tiesinis funkcionalas erdvėje $\mathbb{R}^n$, nes

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \qquad \alpha x = (\alpha a_1, ..., \alpha a_n), \\ f(x+y) &= \sum_{k=1}^{n} a_i\,(x_i + y_i) = \sum_{k=1}^{n} a_i\, x_i + \sum_{k=1}^{n} a_i\, y_i = f(x) + f(y), \\ f(\alpha x) &= \sum_{k=1}^{n} a_i\,(\alpha x_i) = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_i\, x_i = \alpha f(x). \end{aligned}$$

2. Integralas $F\,(x) = \int_a^b x\,(t)\,dt$ yra tiesinis funkcionalas erdvėje $C\,([a,b])$. Tikrinam.

$$\begin{aligned} f(x+y) &= \int_a^b (x+y)(t)\,dt = \int_a^b \Big(x(t) + y(t)\Big)dt = \int_a^b x(t)\,dt + \int_a^b y(t)\,dt \\ &= f(x) + f(y), \\ f(\alpha x) &= \int_a^b (\alpha x)(t)\,dt = \int_a^b \alpha x(t)\,dt = \alpha \int_a^b x(t)\,dt = \alpha f(x). \end{aligned}$$

3. Funkcionalas $f(x) = x(\frac{1}{2})$, $x \in C([0,1])$, yra tiesinis funkcionalas. Tikrinam.

$$\begin{aligned} f(x+y) &= (x+y)\Big(\frac{1}{2}\Big) = x\Big(\frac{1}{2}\Big) + y\Big(\frac{1}{2}\Big) = f(x) + f(y), \\ f(\alpha x) &= (\alpha x)\Big(\frac{1}{2}\Big) = \alpha \cdot x\Big(\frac{1}{2}\Big) = \alpha f(x). \end{aligned}$$

4. Funkcionalas $F(x) = \int_0^1 |x(t)|\,dt$, $x \in C([0,1])$, nėra tiesinis funkcionalas.

Sprendimas. Imkime dvi tolydžias funkcijas $x_1(t) = t - 1$ ir $x_2(t) = 1 - t$ priklausančias erdvei $C([0,1])$. Aišku, kad $F(x_1 + x_2) = 0$, o

$$F(x_1) = \int_0^1 |t-1|\,dt = \int_0^1 (1-t)\,dt = 1/2, \qquad F(x_2) = 1/2.$$

Todėl $F(x_1) + F(x_2) = 1$. Taigi $F\,(x_1 + x_2) \neq F\,(x_1) + F\,(x_2)$. Vadinasi, nėra lygybės $F\,(x+y) = F\,(x) + F\,(y)$, $\forall x, y \in C([0,1])$.

5. Funkcionalas $f(x) = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} x(t)$, $x \in C([0,1])$, nėra tiesinis funkcionalas.

Užduotys

Ar funkcionalai $f\colon\ C([0,1]) \to \mathbb{R}$ yra tiesiniai:

$$1.\ f(x) = \int_0^1 \sqrt{t}\, x(t^2)\,dt, \qquad 2.\ f(x) = \int_0^1 (1-2t)x(t)\,dt,$$

$$3.\ f(x) = x(0) - 2x\Big(\frac{1}{2}\Big) + 4x(1)\ ?$$

25 Normuotosios tiesinės erdvės

Tiesinės erdvės elemento norma apibendrina skačiaus modulio sampratą. Tiesinės erdvės, kuriose nusakyta norma vadinamos normuotosiomis tiesinėmis erdvėmis. Jos vaidina svarbiausią vaidmenį funkcinės analizės kurse.

25.1 apibrėžimas. *Tarkime, kad L - tiesinė erdvė. Atvaizdis $x \to ||x|| : L \to R$ vadinamas norma erdvėje L, jei išpildytos šios aksiomos:*

1) $||x|| \geq 0 \qquad \forall x \in L$; *be to,* $||x|| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
2) $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x|| \qquad \forall x \in L \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ *arba* $\mathbb{C}$
3) $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y|| \qquad \forall x, y \in L$ *(trikampio nelygybė)*

Normuotaja tiesine erdve vadinama pora $(L, || \cdot ||)$, kai L – tiesinė erdvė, o $|| \cdot ||$ - norma erdvėje L.

Skaičius $||x||$ vadinamas *elemento* $x \in L$ *norma*.

Tais atvejais, kai norma fiksuota arba suprantama iš konteksto, vietoje poros $(L, || \cdot ||)$ rašome tiktai L.

Norėdami išskirti erdvės normą, prirašysime indeksą: $||x||_E$, $||x||_L$ ir t.t.

Bet kuri normuota erdvė, įvedus joje atstumą $\rho(x, y) = ||x - y||$ tampa metrine erdve. Metrinės erdvės aksiomų teisingumas seka iš 1–3 normos aksiomų.

Todėl normuotosioms erdvėms galima perkelti visas sąvokas ir faktus, kuriuos suformulavome ir įrodėme metrinėse erdvėse.

25.2 apibrėžimas. *Pilna tiesinė normuota erdvė vadinama Banacho erdve.*

1 pvz. Realiųjų skaičių aibėje $\mathbb{R}$ atvaizdis $x \to |x|$ yra norma.

2 pvz. Kompleksinių skaičių aibėje $\mathbb{C}$ atvaizdis $x \to |x|$ yra norma.

3 pvz. Tarkime, $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Pažymėkime $||x|| = \left(\sum_{k=1}^{n} |x|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Funkcija $x \to ||x||$ yra norma erdvėje R^n. Trikampio nelygybė gaunama pritaikius Koši-Buniakovskio nelygybę:

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k \ y_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} |y|^2\right)^{\frac{1}{2}} .$$

4 pvz. Erdvė $C([a, b])$ bus normuota erdvė, jei normą apibrėšime:

$$||x|| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)| ; \qquad ||x|| = \left[\int_a^b |x(t)|^2 \, dt\right]^{\frac{1}{2}} ; \qquad ||x|| = \int_a^b |x(t)| \, dt \, .$$

5 pvz. Tarkime, kad $C^1([a, b])$ yra aibė visų tolydžių diferencijuojamų funkcijų, apibrėžtų intervale $[a, b]$. Ji taps normuota erdve, jei normą apibrėšime:

$$||x(t)|| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)| + \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x'(t)| \, .$$

26 Uždavinių atsakymai

3 Skaičios aibės

5. **Spendimas**. Skaičių tiesę $\mathbb{R}$ taškais $0; \pm 1; \pm 2; \ldots$ padaliname į skaitų skaičių intervalų, kurių ilgis yra 1. Kiekvienam iš šių intervalų priklauso ne daugiau kaip vienas aibės A taškas. Vadinasi, tarp aibės A taškų ir dalies sukonstruotų intervalų egzistuoja abipusiškai vienareikšmis atvaizdis. Todėl aibė A yra baigtinė arba skaiti.

6. **Spendimas**. Nemažindami bendrumo, nagrinėsime monotoniškai didėjančias funkcijas. Monotoniškai mažėjančių funkcijų atveju sprendimas yra analogiškas. Funkcijos $f(x)$ trūkis taške x_0 yra skirtumas $f(x_0) - f(x_0 - 0)$. Kiekviename trūkio taške monotoniškai didėjančios funkcijos trūkis yra teigiamas. Aibė trūkio taškų, kuriuose trūkis didesnis už α (α yra bet koks realus skaičius > 0), yra baigtinė. Jų skaičius neviršija $\frac{f(b)-f(a)}{\alpha}$. Pasižymėkime E_k aibę trūkio taškų, kurių trūkiai $> \frac{1}{k}$. Tuomet visų funkcijos $f(x)$ trūkio taškų aibė $E = \cup_{k=1}^{\infty} E_k$. Kadangi aibės E_k yra baigtinės, tai E yra baigtinė arba skaiti.

Literatūra

[1] A.N. Kolmogorov., S.V. Fomin. Elementy teorii funkcij i funkcionalnogo analiza. Učebnik dlja vuzov, Moskva, Nauka, 1989.

[2] J. Kubilius, Realaus kintamojo funkcijų teorija, Mintis, Vilnius, 1970.

[3] L.A. Liusternik, V.I. Sobolev. Kratkij kurs fukcionalnogo analiza. Učebnoe posobije, Moskva, Vysšaja škola, 1982

[4] V. Mackevičius, Integralas ir matas, TEV, Vilnius, 1998.

[5] J.Tinsley Oden. Applied functional analysis. A first course for students of mechanics and engineering science. Civil engineering and engineering mechanics series. Prentice-Hall, Inc., Englewod Cliffs, New Jersey, 1979.