Papildomi analizės skyriai

1 Aibių atvaizdžiai

Užduotys

1. Ar funkcija $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, apibrėžta lygybe $f(x) = \begin{cases} 3+x, & \text{kai } x < 0, \\ 4-x, & \text{kai } x \geqslant 0 \end{cases}$ yra injekcija?

2. Tarkime, $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, apibrėžta lygybe $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{kai } x \leqslant 1, \\ ax+b, & \text{kai } x \in (1,2), \\ x+1, & \text{kai } x \geqslant 2. \end{cases}$ Parinkite a ir b taip, kad funkcija b$\bar{\text{u}}$tų bijekcija.

3. Ar atvaizdis $f(x) = \begin{cases} x, & \text{kai } x \in (-\infty, 0), \\ -x^2, & \text{kai } x \in [0,2), \\ x-1, & \text{kai } x \in [2,+\infty) \end{cases}$ yra siurjekcija, injekcija, bijekcija iš $\mathbf{R}$ į $\mathbf{R}$?

4. Įrodykite, kad funkcija $f\colon [1,\infty) \to [0,\infty)$ apibrėžta lygybe $f(x) = x - \frac{1}{x}$ yra bijekcija.

5. Ar funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ apibrėžta lygybe $f(x) = \min(x, x^2)$ yra siurjekcija?

6. Įrodykite, kad funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ apibrėžta lygybe $f(x) = x^3 + x + 1$ yra injekcija.

7. Ar atvaizdis $f(z) = z + (-1)^{|z|}$ yra bijekcija iš $\mathbf{Z}$ į $\mathbf{Z}$?

8. Pažymėkime lyginių skaičių poaibį iš $\mathbb{Z}$ raide $\mathbb{L}$. Sukonstruokite bijekciją iš $\mathbb{L}$ į $\mathbb{N}$.

9. Sukonstruokite bent vieną bijekciją tarp $[0,1)$ ir $[0,\infty)$.

10. Ar funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ -x, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

yra bijekcija? Čia $\mathbb{Q}$ yra racionaliųjų skaičių aibė.

11. Sukonstruokite bijekciją iš $\mathbb{Q} \cap [a,b]$ į $\mathbb{Q} \cap [c,d]$. Čia $a < b$, $c < d$, $\mathbb{Q}$ – racionaliųjų skaičių aibė.

2 Ekvivalančios aibės

Užduotys

1. Įrodykite, kad aibės $\mathbb{R}$ ir (a, b) yra ekvivalenčios.
2. Įrodykite, kad aibės $[\pi, 3\pi)$ ir $[3, \infty)$ yra ekvivalenčios.
3. Įrodykite, kad aibės $[3\pi, \infty)$ ir $[0, \pi)$ yra ekvivalenčios.

3 Skaičios aibės

Užduotys

1. Įrodykite, kad aibė $\{e^n : \ n \in \mathbb{N}\}$ yra skaiti.

2. Įrodykite, kad visų plokštumos apskritimų, kurių centrai turi racionaliąsias koordinates ir kurių spinduliai yra racionalieji skaičiai, aibė yra skaiti.

3. Raskite aibės galią, jei ji sudaryta iš visų baigtinių dešimtainių trupmenų.

4. Raskite funkcijos $x - [x]$ trūkio taškų aibės galią. Čia $[x]$ – sveikoji x dalis, t.y. $[x]$ yra didžiausias sveikasis skaičius, neviršijantis x.

5. Įrodykite, kad aibė tiesės intervalų, kurie kas du neturi bendrų taškų, yra baigtinė arba skaiti.

6. Sakykime, kad nagrinėjame tolydžias iš dešinės ir turinčias ribas iš kairės monotonines funkcijas apibrėžtas $\mathbb{R}$. Įrodykite, kad tokių monotoninių funkcijų trūkio taškų aibė yra baigtinė arba skaiti.

4 Kontinuumo galios aibės

5 Aibių sistemos

Užduotys

1. Sukonstruokite mažiausias algebras generuotas aibių sistemų $\mathcal{S} = \{\{1\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ ir $\mathcal{G} = \{\{1, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$. Ar jos sutampa?

2. Ar aibių sistema $\{[2, 5], (1, 4), \emptyset\}$ yra algebra? Jei ji nėra algebra, tai šią aibių sistemą papildyti aibėmis taip, kad ji būtų algebra.

6 Borelio σ-algebra

7 Funkcijos be antros rūšies trūkių

8 Mati funkcija

Užduotys

1. Pasinaudoję apibrėžimu įrodykite, kad laiptinė funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kai } x \in [-1, 2), \\ 0, & \text{kai } x = 2, \\ -1, & \text{kai } x \in (2, 3] \end{cases}$$

yra $\mathcal{B}([-1, 3])$-mati funkcija.

2. Pasinaudoję apibrėžimu įrodykite, kad funkcijos

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & \text{kai } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{kai } \frac{1}{n} < x \leqslant 1 \end{cases}$$

yra $\mathcal{B}([0, 1])$-mačios.

3. Pasinaudoję apibrėžimu įrodykite, kad funkcija $f(x) = x \cdot \mathbf{1}_{(-\infty,-2)}(x) - x^2 \cdot \mathbf{1}_{[-2,0)}(x) + 0 \cdot \mathbf{1}_{[0,1)}(x) + \sqrt{x} \cdot \mathbf{1}_{[1,\infty)}(x)$ yra $\mathcal{B}(\mathbf{R})$-mati funkcija. Čia $\mathbf{1}_A(x)$ aibės A indikatorius.

4. Pasinaudoję apibrėžimu įrodykite, kad funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kai } x \in [0, 1), \\ 3 - x, & \text{kai } x \in [1, 2], \\ x - 3, & \text{kai } x \in (2, 3] \end{cases}$$

yra $\mathcal{B}([0, 3]$-mati funkcija.

5. Pasinaudoję apibrėžimu įrodykite, kad funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kai } x \in \mathbb{Q}, \\ -x, & \text{kai } \in \overline{\mathbb{Q}} \end{cases}$$

yra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mati funkcija. Čia $\mathbb{Q}$ yra racionaliųjų skaičių aibė.

6. Pasinaudoję apibrėžimu įrodykite, kad indikatorinės funkcijos $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)$ sandauga su bet kokia funkcija $f(x)$ yra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mati funkcija.

7. Sakykime, funkcija $f(x)$ yra apibrėžta $\mathbb{R}$ ir $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mati. Pasinaudoję apibrėžimu įrodykite, kad funkcija

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{kai } x \in \{x\colon\ a \leqslant f(x) \leqslant b\}, \\ b, & \text{kai } x \in \{x\colon\ f(x) > b\}, \\ a, & \text{kai } x \in \{x\colon\ f(x) < a\} \end{cases}$$

yra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mati funkcija.

9 Aibės matas

Užduotys

1. Ar funkcija $f(x) = x - [x]$ yra beveik visur tolydi? Argumentuokite.

2. Ar funkcijų seka $f_n(x)$, $x \in [0,1]$, konverguoja beveik visur į $f(x)$, $x \in [0,1]$, jei

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{n}, & \text{kai } x \in \mathbf{Q} \cap [0,1], \\ 3, & \text{kai } x \in \overline{\mathbf{Q}} \cap [0,1], \end{cases} \qquad f(x) \equiv 3.$$

Argumentuokite.

3. Duotos funkcijos

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{jei } x \text{ yra racionalusis skaičius}, \\ x, & \text{jei } x \text{ yra iracionalusis skaičius}, \end{cases} \qquad g(x) = x, \qquad h(x) = 0.$$

Nurodykite teisingus atsakymus: a) funkcija $f(x)$ yra beveik visur tolydi; b) funkcija $f(x)$ yra beveik visur trūki; c) funkcija $f(x)$ yra beveik visur lygi funkcijai $g(x)$; d) funkcija $f(x)$ yra beveik visur lygi funkcijai $h(x)$.

10 Integralas

Užduotys

1. Nagrinėkime funkciją

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{jei } x \text{ yra racionalusis skaičius}, \\ -x, & \text{jei } x \text{ yra iracionalusis skaičius}. \end{cases}$$

Ar ši funkcija integruojama Rymano prasme? Ar ši funkcija integruojama Lebego prasme?

2. Apskaičiuokite integralą $(L)\int_0^1 f(x)dx$, jei

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{kai } x \text{ yra iracionalusis skaičius ir } > \frac{1}{3}\,, \\ x^3, & \text{kai } x \text{ yra iracionalusis skaičius ir } < \frac{1}{3}\,, \\ 0, & \text{kitais atvejais.} \end{cases}$$

3. Apskaičiuokite integralą $(L)\int_0^1 f(x)dx$, jei

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}\,, & \text{kai } x \text{ yra iracionalusis skaičius,} \\ x^3, & \text{kai } x \text{ yra racionalusis skaičius.} \end{cases}$$

11 Baigtinės variacijos funkcijos

Užduotys

1. Ar funkcija

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{kai } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 3x-2, & \text{kai } 1 < x \leqslant 2, \\ 2x, & \text{kai } 2 < x \leqslant 3 \end{cases}$$

yra baigtinės variacijos intervale $[0,3]$?

2. Ar funkcija $f(x)=x^2-3[x]$, apibrėžta intervale $[0,3]$, yra baigtinės variacijos?

3. Ar funkcija

$$f(x)=\begin{cases} \sin 2x, & \text{kai } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 1+\cos 2x, & \text{kai } \frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi, \end{cases}$$

yra baigtinės variacijos intervale $[0,\pi]$?

4. Apskaičiuokime funkcijos

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & \text{jei } x<1, \\ 10, & \text{jei } x=1, \\ x^2, & \text{jei } x>1 \end{cases}$$

baigtinę variaciją intervale $[0,2]$. Ats.: 23.

5. Baigtinės variacijos funkciją

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{jei } x \in [0,1), \\ 0, & \text{jei } x = 1, \\ 1, & \text{jei } x \in (1,2] \end{cases}$$

užrašykite kaip dviejų nemažėjančių funkcijų skirtumą.

12 Metrinės erdvės

Užduotys

1. Aibėje $\mathbb{R}$ apibrėžkime funkciją $\rho(x,y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$. Ar ši funkcija yra yra metrika?

2. Aibėje $\mathbb{R}$ apibrėžkime funkciją $\rho(x,y) = |[x] - [y]|$. Ar ši funkcija yra yra metrika? Čia $[x]$ – svekoji x dalis.

3. Aibėje $\mathbb{R}$ apibrėžkime funkciją $\rho(x,y) = \sqrt{|x-y|}$. Ar ši funkcija yra yra metrika?

4. Aibėje $\mathbb{R}$ apibrėžkime funkciją $\rho(x,y) = \ln(1 + |x-y|)$. Ar ši funkcija yra yra metrika?

5. Aibėje $\mathbb{R}$ apibrėžkime funkciją $\rho(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$. Ar ši funkcija yra yra metrika?

6. Aibėje $\mathbb{N}$ apibrėžkime funkciją $\rho(x,y) = \frac{|x-y|}{xy}$. Ar ši funkcija yra yra metrika?

7. Aibėje $\mathbb{R}$ apibrėžkime funkciją $\rho(x,y) = |\operatorname{arctg}(x-y)|$. Ar ši funkcija yra yra metrika?

8. Aibėje $\mathbb{R}$ apibrėžkime funkciją $\rho(x,y) = \ln(1 + \frac{|x-y|}{1+|x-y|})$. Ar ši funkcija yra yra metrika?

13 Atviros ir uždaros aibės

Užduotys

1. Sakykime, $F(x)$ yra fiksuota tolydi funkcija apibrėžta intervale $[0,1]$. Įrodykite, kad aibė visų tolydžių funkcijų, apibrėžtų intervale $[0,1]$ ir tenkinančių nelygybę $f(x) \leqslant F(x)$ yra uždara erdvėje $C([0,1])$.

2. Patikrinkite, ar erdvėse $C([0,1])$, $L_p(0,1)$, $p > 0$, aprėžtos šios aibės:

a) $M_1 = \{t^n, n \in \mathbb{N}\}$;
b) $M_2 = \{nt, n \in \mathbb{N}\}$;
c) $M_3 = \{e^{t+\alpha}, 0 \leqslant \alpha < \infty\}$;
d) $M_4 = \{1 - \alpha t^2, 0 \leqslant \alpha \leqslant A\}$;
e) $M_5 = \{\frac{1}{1+\alpha t}, 0 \leqslant \alpha \leqslant \infty\}$.

3. Patikrinkite, ar erdvėse c, l^p, $p > 0$, aprėžtos šios aibės:
a) $M_1 = \{(1, 2, \ldots, n, 0, \ldots), n \in \mathbb{N}\}$;
b) $M_2 = \{(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, \ldots), n \in \mathbb{N}\}$;
c) $M_3 = \{(\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{n}, 0, \ldots), n \in \mathbb{N}\}$;
d) $M_4 = \left\{\left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, \ldots\right), n \in \mathbb{N}\right\}$;
e) $M_5 = \left\{\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \ldots, \frac{1}{n+m}, \ldots\right), n \in \mathbb{N}\right\}$.

Čia c – visų konverguojančių skaitinių sekų $x = (x_1, x_2, \ldots)$ aibė su metrika $\rho(x, y) = \sup_n |x_n - y_n|$; l^p, $p > 0$, – aibė visų skaitinių sekų $x = (x_1, x_2, \ldots)$, kurioms konverguoja eilutė $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$, su metrika

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p\right)^{1/p}, \quad p \geqslant 1, \qquad \rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p, \quad 0 < p < 1.$$

3. Skaičius $\sup_{x,y \in M} \rho(x, y)$ vadinamas aibės $M \subset (X, \rho)$ diametru ir žymimas $\operatorname{diam} M$. Raskite šių erdvės $\mathbb{R}^2$ aibių diametrus:
a) $M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1,\ a, b > 0\}$;
b) $M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon a|x| + b|y| \leqslant 1,\ a, b > 0\}$;
c) $M_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \max(|x|, a|y|) \leqslant 1,\ a > 0\}$;
d) $M_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon ax^2 \leqslant y \leqslant b,\ a, b > 0\}$.

4. Raskite šių erdvės $C([0, 1])$ aibių diametrus:
a) $M_1 = \{\operatorname{arctg}(t - \alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$;
b) $M_2 = \{t^n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

14 Sekos riba

Užduotys

1. Kuriose iš erdvių $C([0, 1])$, $L_p(0, 1)$, $p > 0$, konverguoja šios sekos:
a) $x_n(t) = \begin{cases} nt, & \text{kai } 0 \leqslant t \leqslant 1/n, \\ 1, & \text{kai } 1/n \leqslant t \leqslant 1; \end{cases}$
b) $x_n(t) = t^n$;
c) $x_n(t) = t^n - t^{2n}$;

d) $x_n(t) = \frac{nt}{1+n^2t^2}$?
2. Ar erdvėje ℓ^p, $p \geqslant 1$, konverguoja sekos:
a) $x^{(n)} = \Big\{ \underbrace{\frac{1}{n^\alpha}, \frac{1}{n^\alpha}, \cdots, \frac{1}{n^\alpha}}_{n}, 0, \ldots \Big\}$;
b) $x^{(n)} = \left\{\frac{1}{1+n}, \frac{1}{2+n}, \cdots, \frac{1}{m+n}, \ldots\right\}$?

15 Tolydūs metrinių erdvių atvaizdžiai

Užduotys

Ar atvaizdžiai f yra tolydūs:
a) $f\colon\ C([0,1]) \to \mathbb{R}$ apibrėžtas lygybe $f(x) = x(0) - 2x(\frac{1}{2}) + 4x(1)$;
b) $f\colon\ C([0,1]) \to \mathbb{R}$ apibrėžtas lygybe $f(x) = \int_0^1 t^{-1/3}x(t)\,dt$;
c) $f\colon\ C([0,1]) \to C([0,1])$ apibrėžtas lygybe $(fx)(t) = \int_0^1 \sin(t-s)x(s)\,ds$;
d) $f\colon\ C([0,1]) \to C([0,1])$ apibrėžtas lygybe $(fx)(t) = x(0) \cdot t^2$;
e) $f\colon\ C([0,1]) \to C([0,1])$ apibrėžtas lygybe $(fx)(t) = x^2(t)$?

16 Tiesiniai funkcionalai

Užduotys

Ar funkcionalai $f\colon\ C([0,1]) \to \mathbb{R}$ yra tiesiniai:

$$1.\ f(x) = \int_0^1 \sqrt{t}\, x(t^2)\,dt, \qquad 2.\ f(x) = \int_0^1 (1-2t)x(t)\,dt,$$

$$3.\ f(x) = x(0) - 2x\left(\frac{1}{2}\right) + 4x(1)\ ?$$