VILNIAUS GEDIMINO TECHNIKOS UNIVERSITETAS
FUNDAMENTINIŲ MOKSLŲ FAKULTETAS
MATEMATINĖS STATISTIKOS KATEDRA

K. Samaitis

Analizinė geometrija ir vektorinės algebros elementai

2006

Įvadas

Šis kursas skaitomas VGTU Fundamentinių mokslų fakulteto inžinierinės informatikos specialybės studentams, prisilaikant modulio programos, pirmą semestrą. Ne visa apimtimi medžiaga gali būti naudinga ir kitų fakultetų stu - dentams.

Paskaitų konspektą paruošė Matematinės statistikos katedros dėstytojas K. Samaitis.

Literatūra

1. Kvedaras, B. Matricų teorija. 1 dalis. Kaunas: VDU, 1999; 2 dalis. Vilnius: MII, 2000.

2. Pekarskas,V.; Pekarskienė, A. Tiesinės algebros ir analizinės geometrijos elementai. Kaunas: Technologija, 2004.

3. Misevičius, G.; Pincevičius, A.; Rakauskas, R.J.; Eidukevičius, R. Aukštoji matematika. Vilnius: TEV, 1999.

4. Čiupaila, R. Eliments of linear and vector algebra. Vilnius: Technika, 1997.

5. Banys, R.; Kryžienė, B. Elementary linear algebra with analytic geometry. Vilnius: Technika, 2000.

6. Barnett, R.A.; Ziegler, M,R. Linear algebra. San Fracisco: Dellen Publishing Company, 1987.

7. Janušauskaitė, S.; Marčiukaitienė, A.; Prašmantienė, D.; Ratkienė, N. Tiesinė algebra ir matematinė analizė. Kaunas: Technologija, 1998.

8. Kubilienė, M.; Stankevičienė, V. Tiesinė ir vektorinė algebra. Vilnius: Technika, 2005.

Turinys

I skyrius

Tiesinė algebra

§1 Tiesinių lygčių sistemos. Gauso metodas

1.1. Tiesiniai atvaizdavimai

Atvaizdavimo pavyzdys:

y=f(x)=x

$$x \in D(f) = R^1 \quad \xrightarrow{f} \quad R(f) = R^1$$

Apibrėžimo sritis Reikšmių sritis

Apibrėžimas. Atvaizdavimas (atskiru atveju funkcija arba tam tikras operatorius) T vadinamas tiesiniu, jei bet kokiai porai elementų $\chi_1, \chi_2 \in D(T)$ ir bet kokiems $\alpha_1, \alpha_2 \in R^1$ T tenkina lygybę $T(\alpha_1\chi_1 + \alpha_2\chi_2) = \alpha_1 T(\chi_1) + \alpha_2 T(\chi_2)$.

Pavyzdys 1:

$T(...) = \frac{d}{dx}(...)$ - diferencijavimo veiksmas tiesinis atvaizdavimas ar ne ?

$\frac{d}{dx}(...)$ - apibrėžimo sritis yra visos diferencijuojamos funkcijos;

tegu $C^{(1)}$ - vieną kartą diferencijuojamų funkcijų aibė, t.y.

$$D\left(\frac{d}{dx}\right) = C^{(1)} = \{f : f - \textit{vieną kartą diferencijuojama}\}.$$

Patikrinimas: tegu $f_1, f_2 \in C^{(1)}$; $\alpha_1, \alpha_2 \in R^1$;

$$\lim_{x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x) = \frac{df}{dx};$$

$$\frac{d}{dx}(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)' = (\alpha_1 f_2)' + (\alpha_2 f_2)' = \alpha_1 (f_1)' + \alpha_2 (f_2)' = \alpha_1 \frac{d}{dx}(f_1) + \alpha_2 \frac{d}{dx}(f_2).$$

$\frac{d}{dx}$ - atlieka atvaizdavimo vaidmenį ir, kaip įsitikinome, yra tiesinis atvaizdavimas.

Pavyzdys 2:

1. $y = f(x) = ax + b$,
2. $g(x, y) = cx + dy$.

Tikriname, ar funkcija y=f(x) kaip atvaizdavimas yra tiesinė ar ne?

- $D(T)$ – atvaizdavimo apibrėžimo sritis
- R^1 – realiųjų skaičių aibė
- $\alpha_1\chi_1 + \alpha_2\chi_2$ - tiesinė kombinacija
- tiesės lygtis $y = ax + b$
- $g(x, y)$ – dviejų kintamųjų funkcija

1. Šiuo atveju T=f; $x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2 \in R^1$; reikia patikrinti f tiesiškumą pagal apibrėžimą.

$$D(f) = R^1 \xrightarrow{f} R(f) = R^1$$

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \overset{?}{=} \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

a) $\alpha_1(ax_1 + b) + \alpha_2(ax_2 + b) = \alpha_1 ax_1 + \alpha_1 b + \alpha_2 ax_2 + \alpha_2 b = \alpha_1 ax_1 + \alpha_2 ax_2 + (\alpha_1 + \alpha_2)b$ - dešinė lygybės pusė;

b) $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = a(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + b = \alpha_1 ax_1 + \alpha_2 ax_2 + b$ - kairė pusė.

a) ir b) laisvieji nariai nesutampa, taigi funkcija f(x)=ax+b kaip atvaizdavimas nėra tiesinė; atskiru atveju, kai laisvojo nario nėra (b=0), t.y. funkcija f(x)=ax kaip atvaizdavimas yra tiesinė; tokios funkcijos grafikas (tiesė) eina per koordinačių pradžią.

NAMŲ DARBAS

1.Patikrinti, ar funkcija g(x,y)=cx+dy kaip atvaizdavimas yra tiesinė ar ne .

$$D(g) = R^1 \times R^1 = R^2 = \{(x, y) \mid x \in R^1; y \in R^1\}$$

2. *Nubrėžti funkcijos z= g(x,y)=x+y=2 grafiko eskizą trimatėje erdvėje* R^3.

Pastaba. $f(x) = ax + b$ - yra tiesinė funkcija, kai nėra laisvo nario b. Analogiškai

$$\left.\begin{aligned} g(x, y) &= cx + dy \\ h(x, y, z) &= a_1 x + a_2 y + a_3 z \end{aligned}\right\}$$ yra tiesinės funkcijos (svarbu, kad argumentai x,y,z būtų pirmame laipsnyje).

1.2. Tiesinės algebrinės lygtys ir jų sistemos

$ax = b$ - paprasčiausios tiesinės algebrinės lygties pavyzdys.

Jei kairioji lygties pusė nežinomųjų atžvilgiu yra tiesinis atvaizdavimas, tai tokia lygtis yra tiesinė.

$a_1x_1 + a_2x_2 = b_1$ - viena tiesinė lygtis su dviem nežinomaisiais.

(LS) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n = b_r. \end{cases}$ - šiuo atveju turime r tiesinių lygčių su n nežinomųjų

(LS) yra ekvivalėnčios, jei jų sprendinių aibės sutampa, t.y.(LS) gaunamos, vieną tam tikru būdu pertvarkius į kitą taip, kad sprendinių aibės nepakistų. Tam naudosime elementarius (LS) pertvarkius (žr. toliau).

•$R^1 x R^1$ - Dekartinė sandauga, R^2 – dvimatė erdvė (plokštuma)
•LS - lygčių sistema – tiesinių algebrinių lygčių sistema

NAMŲ DARBAS

(LS) eilę apsprendžia nežinomųjų skaičius, įeinantis į (LS). Tegu duota 2-os eilės (LS):

$\begin{cases} ax + by = c, \\ dx + cy = f, \end{cases}$ $(x, y) \in R^2$ - taškas, kurio koordinatės tenkina abi lygtis.

„Tiesių kalba" paaiškinti, ką reiškia geometrškai, kad:

a) (LS) turi 1-ą sprendinį; b) (LS) neturi sprendinių; c) (LS) turi ∞ sprendinių

Pratimas: *Kurios iš pateiktų lygčių yra tiesinės?*

(1) $3x + 2y = 5$

(2) $2xy - z = 3$

(3) $x + \frac{3}{4}y - \pi z = \sqrt{3}$

(4) $\frac{2}{x} + y = \frac{1}{z}$

(5) $2x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0$

(6) $e^x - 2y = 5$

(7) $(\sin\frac{\pi}{3})x_1 - 3x_2 = \sqrt{e}$

(8) $\sin(\pi x) + y = 0$

Tiesinės funkcijos yra (1),(3),(5),(7). Jei į lygtį įeina nežinomųjų sandauga, nežinomieji yra netiesinių funkcijų argumentai arba lygtyje nežinomieji yra ne pirmo laipsnio (t.y. laipsnis trupmeninis, neigiamas ar dar kitoks), tai lygtis yra netiesinė.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rn}x_n = b_r. \end{cases} \qquad \text{(LS)}$$

Apibrėžimas. Sistemos (LS) sprendiniu vadinsime skaičių rinkinį $\vec{x} = (d_1, d_2, ..., d_r)$, kurį interpretuosime kaip tašką n-matėje aritmetinėje erdvėje R^n (vektorių n–matėje vektorinėje erdvėje V_n), jei, vietoj x_i įstatę d_i, gauname tapatybes.

Elementarūs pertvarkymai (pertvarkiai), kurie nekeičia (LS) ekvivalentumo:

1. Bet kurių lygčių sukeitimas vietomis;
2. Bet kurios lygties padauginimas (padalijimas) iš skaičiaus $\neq 0$;
3 Bet kurias dvi sistemos lygtis galima sudėti (atimti), vietoj vienos iš jų įrašant jų sumą (skirtumą);
4. Vienodų lygčių arba tapatybių pašalinimas iš (LS): $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 2y + 2z = 4 \\ x + 2y + 3z = 7 \end{cases}$ - pirma ir antra lygtys vienodos, taigi vieną jų braukiam, nes, atėmę dvigubą pirmą lygtį iš antros lygties, gausim tapatybę 0=0.

Teorema : (Alternatyva apie tiesinių lygčių sistemos sprendinius)
Tiesinių algebrinių lygčių sistemos turi: a) ! - vienintelį sprendinį arba
b) $\neg\exists$ - sprendinių neturi (neegzistuoja) arba
c) ∞ - turi be galo daug sprendinių.

$\lhd$ **Įrodymas:** Tegu $\mathbb{S}$ - (LS) sprendinių aibė.
Jei $\mathbb{S}$ turi vieną elementą, t.y. atvejis a) , tai nieko įrodinėti nereikia.
Jei $\mathbb{S} = \varnothing$ (t.y. sprendinių aibė yra tuščia), tada atvejis b) - irgi nieko nereikia įrodinėti.
Jei $\mathbb{S}$ turi bent du elementus, tai parodysime, kad aibė $\mathbb{S}$ turi be galo daug elementų.
Tegu $\begin{matrix} s = (s_1, s_2, s_3, ...s_n) \in S \\ \overline{s} = (\overline{s_1}, \overline{s_2}, \overline{s_3}, ..., \overline{s_n}) \in S \end{matrix}$ - du skirtingi (LS) sprendiniai. Statome išraišką $s + t(\overline{s} - s), t \in R^1$, į (LS), t.y. skaičių rinkinį $(s_1 + t(\overline{s_1} - s_1), s_2 + t(\overline{s_2} - s_2), ..., s_n + t(\overline{s_n} - s_n))$, kur t bet koks realus skaičius (vadinsime jį parametru).

$$\begin{cases} a_{11}(s_1 + t(\overline{s_1} - s_1)) + a_{12}(s_2 + t(\overline{s_s} - s_2)) + ... + a_{1n}(s_n + t(\overline{s_n} - s_n)) = b_1 \\ a_{21}(s_1 + t(\overline{s_1} - s_1)) + a_{22}(s_2 + t(\overline{s_s} - s_2)) + ... + a_{2n}(s_n + t(\overline{s_n} - s_n)) = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{r1}(s_1 + t(\overline{s_1} - s_1)) + a_{r2}(s_2 + t(\overline{s_s} - s_2)) + ... + a_{rn}(s_n + t(\overline{s_n} - s_n)) = b_r \end{cases}$$

Paimkime vieną iš lygčių ir ją išnagrinėkime:

$$a_{i1}(s_1+t(\overline{s_1}-s_1))+a_{i2}(s_2+t(\overline{s_s}-s_2))+...+a_{in}(s_n+t(\overline{s_n}-s_n))=$$
$$a_{i1}s_1+t(a_{i1}\overline{s_1}-a_{i1}s_1))+a_{i2}s_2+t(a_{i2}\overline{s_s}-a_{i2}s_2))+...+a_{in}s_n+t(a_{in}\overline{s_n}-a_{in}s_n))=b_i+t(b_i-b_i)=b_i$$

O tai įrodo, kad jei yra du ar daugiau sprendinių, tai tuomet yra be galo daug sprendinių, nes su skirtingais parametrais t gausime vis skirtingus sprendinius, t.y. turime teoremos c) atvejį. ⊳

Apibrėžimas: Sistema (LS) vadinama suderinta, jei turi bent vieną sprendinį. Suderinta sistema su be galo daug sprendinių vadinama neapibriežtąja (priklausoma). Jei sistema sprendinių neturi, tai sakome, kad ji nesuderinta.

1.3. Gauso metodas (nuoseklaus nežinomųjų eliminavimo metodas)

Gauso metodas universalus, leidžiantis greitai ir paprastai surasti bet kokios eilės (LS) sprendinius; jo esmė glūdi elementariuose pertvarkiuose; jų dėka (LS) gali būti suvesta į «trikampį» arba „trapecinį“, arba išryškėti „absurdiška“ lygtis, pvz. 0=0 arba kas nors panašaus. Tuomet, kai gaunamas:

a) trikampis pavidalas,(LS) turi vieną sprendinį;
b) kai $0=1$ (ar kitokia nesąmonė) - sprendinių aibė yra tuščia;
c) trapecinis pavidalas, (LS) turi be galo daug sprendinių.

Pavyzdys 3:

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3=5, \\ -3x_1+8x_2-10x_3=-25, \\ 4x_1-3x_2+x_3=1. \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 8 & -10 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$ -duotos lygčių sistemos koeficientų matrica;

$$\begin{matrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 5 \\ -3 & 8 & 10 & -25 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$ - išplėstoji (LS) matrica.

Su išplėstosios matricos eilutėmis atliekame tuos pačius elementarius pertvarkius, kaip ir su (LS) lygtimis (turim omeny, kad tai sutrumpintas lygčių užrašas):

$$\begin{matrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 5 \\ -3 & 8 & 10 & -25 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ E_2+3E_1\to E_2 \\ E_3-4E_1\to E_3 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -4 & -10 \\ 0 & 5 & -7 & -19 \end{array}\right) E_2/2 \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 5 & -7 & -19 \end{array}\right) E_3-5E_2\to E_3 \quad \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right) E_3/3 \quad \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Grįžtame nuo išplėstosios matricos prie (LS), kuri ekvivalenti pradinei, tačiau yra trikampio pavidalo:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ \quad\; x_2 - 2x_3 = -5 \\ \quad\quad\quad\; x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 2 \end{cases} \qquad \text{t.y. } \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) = (-1, -1, 2).$$

Sprendinio patikrinimas:

$$\begin{cases} -1+2+4 \overset{?}{=} 5 \\ 3-8-20 \overset{?}{=} -25 \\ -4+3+2 \overset{?}{=} 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5=5 \\ -25=-25. \\ 1=1 \end{cases} \qquad \text{Ats.: } \vec{x} = (-1,-1,2).$$

Kitus atvejus išnagrinėsime per pratybas.

§2 Matricos. Veiksmai su matricomis

Apibrėžimas: Matrica yra tam tikra tvarka surašytų skaičių, funkcijų ar kitų matematinių objektų, vadinamų matricos elementais, stačiakampė lentelė.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix};$$ a_{ij} – matricos elementas i-toje eilutėje ir j-tame stulpelyje;

$(a_{i1}a_{i2}a_{i3}...a_{in})$ - i-toji eilutė; $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{rj} \end{pmatrix}$ - j-tasis stulpelis.

Jei $r = n$ (eilučių ir stulpelių kiekis vienodas), tai tokią matricą vadinsime kvadratine.

Matricos išmatavimų užrašymas:

$$\dim A = r \times n^{\bullet}$$

$\dim A = n$ (n-tos eilės matrica (matrica kvadratinė)).

Apibrėžimas: Dvi matricos vadinamos vienarūšėmis, jei jos turi tuos pačius išmatavimus (tos pačios dimensijos), t.y. turi tiek pat eilučių ir tiek pat stulpelių.

Apibrėžimas: Dvi vienarūšės matricos A ir B vadinamos lygiomis (žymim A=B), jei jų atitinkami elementai yra lygūs, t.y. $a_{ij} = b_{ij}$.

• dim - matricos dimensija

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$ - nulinė matrica ; $$\begin{pmatrix} & ... & ... & ... \\ ... & & ... & ... \\ ... & ... & & ... \\ ... & ... & ... & \end{pmatrix}$$ - pagrindinė įištrižainė;

$$\begin{pmatrix} ... & ... & ... & \\ ... & ... & & ... \\ ... & & & ... \\ & ... & ... & ... \end{pmatrix}$$ - šalutinė įštrižainė.

Matricos ir jos išmatavimų žymėjimas: A_{rxn} arba $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{r1} & a_{r2} & ... & a_{rn} \end{pmatrix}_{r \times n}$, arba

$\left(a_{ij}\right), i = 1 \div r, j = 1 \div n*$.

$$E = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ - vienetinė matrica•.

Vektorius $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$ - matrica – eilutė

arba vektorius $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ -matrica - stulpelis .

Jei duota matrica $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix}$, tai žymėsim A^T – transpanuotą matricą A, t.y.

$A^T = (a^T_{ji})_{\substack{j=1\div n \\ i=1\div r}}$.

Transponuota matrica yra tokia matrica, kur $a^T_{ji} = a_{ij}$ (t.y. eilutės ir stulpeliai keičiami vietomis).

$$\text{Pvz.: } C=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C^T=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

•*tokia*, kad a_{ij}=1 ir a_{ij}=0 (kur $i \neq j$)

•$i = 1 \div r$, t.y. nuo 1 iki r

Apibrėžimas: Dėl vienarūšių matricų apibrėžiama ***sudėtis*** sekančiu būdu: tegul duotos matricos

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix}_{r\times n} \quad \text{ir} \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rn} \end{pmatrix}_{r\times n},$$

tuomet, $C = A + B$, $C = (c_{ij})_{\substack{i=1\div r \\ j=1\div n}}$, kur $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Sandauga iš skaliaro: $\alpha \in R^1, \alpha A = (\alpha a_{ij})_{\substack{i=1\div r \\ j=1\div n}}$

$$\text{Pvz.:} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix};$$

$$(-4)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -8 & 12 \end{pmatrix}; \qquad 1500000\begin{pmatrix} 10^{17} & 101\cdot 10^{5} \\ 3\cdot 10^{-5} & 4\cdot 10^{-15} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15\cdot 10^{22} & 1515\cdot 10^{10} \\ 45 & 6\cdot 10^{-9} \end{pmatrix};$$

Apibrėžimas: Sakysime, kad matricos A ir B suderintos sandaugos AB atžvilgiu, jeigu matricos A stulpelių skaičius lygus (atitinka) matricos B eilučių skaičiui. Sandauga AB=C, kur

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}^{\bullet}$$

(imama i-oji matricos A eilutė ir panariui dauginama su matricos B j-uoju stulpeliu, o po to sandaugos sudedamos).

$$A_{r\times n}B_{n\times m}=C_{r\times m},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix}_{r\times n} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}_{n\times m} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{r1} & c_{r2} & \dots & c_{rm} \end{pmatrix}_{r\times m};$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}_{3\times 3} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 30 \\ -17 \end{pmatrix}_{3\times 1}; \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}_{3\times 1} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}_{1\times 3} = \begin{pmatrix} 15 & -6 & 9 \\ 20 & -8 & 12 \\ 10 & -4 & 6 \end{pmatrix};$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad AB=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}_{3\times 1} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$ - matricos nesuderintos sandaugos atžvilgiu.

Matricų sumos ir sandaugos savybės.

Sumos savybės:

1. $A+B=B+A^{\bullet}$ (sumos komutatyvumas)
2. $A+(B+C)=(A+B)+C$ (sumos asociatyvumas)
3. $A+O=A$ (O-nulinė matrica)
4. $A+(-A)=O$ ((-A)- negatyvioji matrica sumos atžvilgiu)

Sandaugos savybės:

1. a) $AB\neq BA$ (bendruoju atveju – nekomutatyvumas)
   b) $AB=BA$ (jei matricos komutuojančios tarpusavyje)

2. $(AB)^T = B^T A^T$

3. A(BC)=(AB)C (*sandaugos asociatyvumas*)

4. $\left.\begin{array}{l} A(B+C)=AB+AC \\ (A+B)C=AC+BC \end{array}\right\}$ (*sandaugos distributyvumas*)

5. $\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B)$

NAMŲ DARBAS

Įrodyti sandaugos savybes : $\begin{array}{l} AB \neq BA \\ (AB)^T = B^T A^T \end{array}.$

Kitas irgi pabandykite įrodyti.

§3. Kramerio formulės (antros eilės lygčių sistemoms)

Tegu duota antros eilės lygčių sistema: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$ (LS)

Apibrėžimas: Matricos $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ determinantu vadinamas skaičius

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Jei $\det A \neq 0$, tai (LS) 1-ą lygtį padauginę iš a_{22}, 2-ą iš a_{12} ir iš 1-os lygties atėmę 2-ąją, gauname x_1:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}\left|\begin{array}{l} \cdot \quad a_{22} \\ \cdot \quad a_{12} \end{array}\right.$$

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

Analogiškai gauname x_2, padauginę 1-ą lygtį iš a_{21}, 2-ą iš a_{11} ir iš 2-os lygties atėmę 1-ąją:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}\left|\begin{array}{l} \cdot \quad a_{21} \\ \cdot \quad a_{11} \end{array}\right.$$

$$x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\det A}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\det A}, \qquad (\det A \neq 0).$$

Žymėjimas: $$D_1 = \underbrace{\frac{D_{x_1}}{D} = x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\det A}, \qquad D_2 = \frac{D_{x_2}}{D} = x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\det A}}_{Kramerio\ \ formulės}.$$

NAMŲ DARBAS

Ką reiškia, kad: a) $\exists$ vienas sprendinys: $\det A \neq 0$

b) sprendinių nėra: $\det A = 0$ (bet $D_{x_1} \neq 0$ arba $D_{x_2} \neq 0$)

c) yra be galo daug sprendinių: $D = D_{x_1} = D_{x_2} = 0$

Susieti su koeficientų proporcingumu (neproporcingumu).

Namų darbo dalinis paaiškinimas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}; \qquad x_1 = \frac{D_{x_1}}{D}, \quad x_2 = \frac{D_{x_2}}{D}.$$

1. Kai $D \neq 0$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

$$a_{11}a_{22} \neq a_{12}a_{21} \quad \big| : a_{21}a_{22}$$

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}}$$ - (LS) koeficientai nėra proporcingi.

2. Kai $D = 0;\ D_1$ arba $D_2 \neq 0$,

(LS) koeficientai yra proporcingi, o laisvieji nariai b_1, b_2 šios proporcijos netenkina.

§4. Determinantai ir jų savybės.

Determinantai apibrėžiami tik dėl kvadratinių matricų. Šiame paragrafe determinantų savybes aptarsime ir įrodysime antros ir trečios eilės kvadratinėms matricoms. Bet jos, kaip vėliau pastebėsim, teisingos ir aukštesnės eilės matricom.

1 savybė: detA=det A^T

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\det A^T = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

2 savybė: Sukeitus vietomis determinanto eilutes (stulpelius), keičiasi determinanto ženklas.

$$a) A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \qquad \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}; \qquad \det \tilde{A} = a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11}$$

Išvada: $\det\tilde{A} = -\det A$

$$b) A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \qquad \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\tilde{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{pmatrix}; \qquad \det \tilde{\tilde{A}} = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}$$

Išvada: $\det\tilde{\tilde{A}} = -\det A$

3 savybė: Jeigu determinanto dvi eilutės vienodos (arba du stulpeliai vienodi), tai toks determinantas yra lygus nuliui.

$$a) \hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \qquad \det \hat{A} = a_{11}a_{12} - a_{12}a_{11} = 0.$$

$$b) \hat{\hat{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{pmatrix} \qquad \det \hat{\hat{A}} = a_{11}a_{21} - a_{11}a_{21} = 0$$

4 savybė:Jeigu mes padauginame bet kurią eilutę (stulpelį) iš skaičiaus, nelygaus nuliui, tai determinanto reikšmė, lyginant su pradine, taip pat dauginama iš to skaičiaus.

$\triangleleft$ *Matricos* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 1-ą eilutę padauginkime iš skaičiaus $k \neq 0$.

Pažymėkime $A(k) = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, tuomet $\det A(k) = k \det A$. $\triangleright$

Pastaba: Kai dauginame visą matricą, gauname $(kA_n)=k^n$ detA , kur n – matricos dimensija.

Išvados: 1.Jeigu dvi eilutės (stulpeliai) turi bendrą koeficientą, tai jį galima iškelti prieš determinanto ženklą.

2.Jei dvi eilutės proporcingos (stulpeliai proporcingi), tai $\det = 0$.

5 savybė: Tarkime, kad

$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} \end{vmatrix}$, t.y. kažkuri eilutė (stulpelis) yra tam tikrų elementų suma.

$$\text{Tada} \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}.$$

$\lhd$ Išties,

$a_{11}(b_{22}+c_{22}) - a_{12}(b_{21}+c_{21}) = (a_{11}b_{22} - a_{12}b_{21}) + (a_{11}c_{22} - a_{12}c_{21})$, t.y. pirmuose skliaustuose dešinėj pusėj turim 1-ą dešinės pusės determinantą, antruose – 2-ą. $\rhd$

Išvada : Jei bet kurią eilutę (stulpelį) padauginame iš koeficiento k$\neq 0$ ir pridedame prie kitos eilutės (stulpelio), tai determinanto reikšmė nesikeičia.

$\lhd \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21}+ka_{11} & b_{22}+kc_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} & ka_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, nes $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} & ka_{12} \end{vmatrix} = 0$, remiantis trečia ir ketvirta savybėmis. $\rhd$

Trečios eilės determinantas

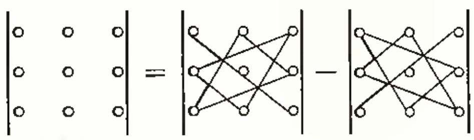
Apibrėžimas: Tegu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \qquad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |A| \quad , \textit{ tuomet skaičius}$$

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})$$

vadinamas 3-ios eilės kvadratinės matricos A determinantu.

Skaičiavimo schema:



Apibrėžimas: Matricos $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

elemento a_{ij} minoru M_{ij} vadiname determinantą, kurį gauname, išbraukę i-tąją eilutę ir j-tąjį stulpelį.

Pvz.: elemento a_{21} minoru bus $M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Apibrėžimas: Matricos A elemento a_{ij} adjunktu vadiname sandaugą $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

6 savybė : Matricos determinantas lygus bet kurios eilutės (stulpelio) skleidiniui, t.y. eilutės (stulpelio) elementų ir jų adjunktų sandaugų sumai.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \; D = \begin{cases} a_{i1}+A_{i1}+a_{i2}+A_{i2}+a_{i3}+A_{i3} & i = 1 \div 3 \to \\ \quad arba & \\ a_{1j}+A_{1j}+a_{2j}+A_{2j}+a_{3j}+A_{3j} & j = 1 \div 3 \to \end{cases}$$

Skleidinys i-taja eilute arba j-ouju stulpeliu

◁ Patikrinsime 6-ąją savybę dėl i=2, t.y. skleidinį 2-ąja eilute. Paimkime detA išraišką iš apibrėžimo ir joje dėmenis sugrupuokime taip, kad galėtume iškelti $-a_{21}, a_{22}, -a_{23}$. Tuomet

$$-a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) =$$
$$= a_{21}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23}(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

Dėl kitų i ir j įrodymas analogiškas.▷

7 Savybė:Bet kurios eilutės (stulpelio) elementų adjunktus, sudauginę su kitos eilutes (stulpelio) elementais ir sandaugas sudėję, gauname sumą, lygią nuliui, būtent:

$$0 = \begin{cases} a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + a_{k3}A_{i3} & i = 1 \div 3 \to & i \neq k, \\ \quad arba & & \\ a_{1k}A_{1j} + a_{2k}A_{2j} + a_{3k}A_{3j} & j = 1 \div 3 \to & k \neq j. \end{cases}$$

◁ Įrodymas, kai k=1, i=2. Įveskime pagalbinį determinantą D (2 eilutės vienodos⇒D=0; iš kitos pusės determinantas D lygus skleidiniui antrąja eilute):

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \qquad D = a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23}. \qquad ▷$$

8 Savybė: Jeigu duotos dvi matricos A ir B, suderintos sandaugos AB atžvilgiu, tai sandaugos

determinantas lygus tų matricų determinantų sandaugai:

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

§5. Kramerio formulės trečios eilės LS

Šiame paragrfe, remdamiesi 6-a ir 7-a savybėmis, išvesime Kramerio formules 3-ios eilės tiesinių algebrinių lygčių sistemai (LS), analogiškas 2-os eilės (LS).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad \begin{array}{|c|c|c} \cdot A_{11} & \cdot A_{12} & \cdot A_{13} \\ \cdot A_{21} & \cdot A_{22} & \cdot A_{23} \\ \cdot A_{31} & \cdot A_{32} & \cdot A_{33} \end{array} \qquad \text{(LS)}$$

Padauginkime (LS) 1-ą lygtį iš adjunkto A_{11}, 2-ą iš A_{21}, 3-ią iš A_{31} ir sudėkime, sutraukdami panašius narius ir iškeldami x_1, x_2, x_3 už skliaustų. Remiantis 6-ąja savybe, prie x_1 skliaustuose esantis reiškinys lygus detA, kur A – (LS) koeficientų matrica. Pažymėkime raide D=detA. Jį vadinsime (LS) pagrindiniu determinantu. Determinantą D_i, gaunamą iš pagrindinio, pakeitus jame i-ąjį stulpelį duomenų stulpeliu B=$(b_1, b_2, b_3)^T$, vadinsime pagalbiniu. Prie $x_2 \quad ir \quad x_3$ reiškiniai lygūs 0 (7-a savybė). Tokiu būdu $x_1 \cdot D = D_1$ (žr. punktą a)):

a)
$$x_1(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}) + x_2(a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31}) + x_3(a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31}) =$$
$$= b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}$$

$$\begin{matrix} a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = D \\ a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31} = 0 \\ a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31}) = 0 \end{matrix} ; \qquad x_1 \cdot D = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = D_{x1} = D_1;$$

Analogiškai, padauginę (LS) lygtis iš matricos A 2-ojo ir atitinkamai 3-iojo stulpelio elementų adjunktų, gauname rezultatus punktuose b) ir c):

b)
$$x_1(a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} + a_{31}A_{32}) + x_2(a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}) + x_3(a_{13}A_{12} + a_{23}A_{22} + a_{33}A_{32}) =$$
$$= b_1A_{12} + b_2A_{22} + b_3A_{32}$$

$$\begin{matrix} a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} + a_{31}A_{32} = 0 \\ a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} = D \\ a_{13}A_{12} + a_{23}A_{22} + a_{33}A_{32}) = 0 \end{matrix} ; \qquad x_2 \cdot D = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = D_{x2} = D_2;$$

c)
$$x_1(a_{11}A_{13} + a_{21}A_{23} + a_{31}A_{33}) + x_2(a_{12}A_{13} + a_{22}A_{23} + a_{32}A_{33}) + x_3(a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}) =$$
$$= b_1A_{13} + b_2A_{23} + b_3A_{33}$$

$$a_{11}A_{13}+a_{21}A_{23}+a_{31}A_{33}=0$$
$$a_{12}A_{13}+a_{22}A_{23}+a_{32}A_{33}=0 \quad ; \qquad x_3\cdot D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}=D_{x3}=D_3.$$
$$a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33})=D$$

Iš čia $x_i\cdot D=D_i, i=1,2,3.$ Jei $D\neq 0$, tai $x_i=\dfrac{D_i}{D}$, i=1,2,3. Tai Kramerio formulės trečios eilės algebrinei tiesinių lygčių sistemai. Bendru atveju, kai sistemos eilė aukštesnė nei trys, Kramerio formulės irgi teisingos.

§6. Aukštesnės eilės determinantai

Apibrėžimas: n-tosios eilės determinantu vadinamas skaičius, lygus bet kurios eilutės (stulpelio) elementų ir atitinkamų $n-1$-sios eilės adjunktų sandaugų sumai, t.y.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} & i=1\div n\rightarrow \\ \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} & j=1\div n\rightarrow \end{cases} \text{ skleidinys i-taja eilute; j-uotoju stulpeliu}$$

Jeigu visi matricos elementai po pagrindine įstrižaine yra lygūs nuliui, tai tos matricos determinantas lygus visų pagrindinės įstrižainės elementų sandaugai:

$$\begin{vmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{14} & \dots & \tilde{a}_{1n} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{24} & \dots & \tilde{a}_{2n} \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{33} & \tilde{a}_{34} & \dots & \tilde{a}_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \tilde{a}_{n-1n-1} & \tilde{a}_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{a}_{nn} \end{vmatrix} = \tilde{a}_{11}\tilde{A}_{11}=\tilde{a}_{11}\tilde{a}_{22}\tilde{A}_{22}=\dots=\prod_{i=1}^{n}\tilde{a}_{ii}=\tilde{a}_{11}\cdot\tilde{a}_{22}\cdot\ldots\cdot\tilde{a}_{nn}$$

Pastaba: Šiuo atveju $\tilde{A}_{22}=\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$, o ne $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$,

kaip turėtų būti pagal visas taisykles. Kiti "adjunktai" irgi.

$\tilde{A}_{ii}$ - negali būti vadinami adjunktais, nes tai yra tk adjunkto dalis, kuri yra po stulpeliu ir eilute, kuriame yra braukiami $\tilde{a}_{ii}$.

Pvz.: Determinanto skaičiavimas, išnaudojant 7 savybę, t.y. skleidžiant i-tąja eilute arba j-ouju stulpeliu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$+0\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{3+4}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

Tęsdami skleidžiame pagal antrą stulpelį, nes ten yra daugiausiai nulių (ir taip bus paprasčiausiai):

$$-4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -4\cdot\left(0\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}\right) + 0\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -4\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4\cdot(1\cdot 3 + 2\cdot 2) = 28$$

NAMŲ DARBAS

1.Paskaičiuoti 5-os eilės determinantą:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 9 & -1 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix};$$

2. Paskaičiuoti matricos A determinantą visais mums žinomais būdais:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

§7. Atvirkštinė matrica

Apibrėžimas: Matrica B vadinama atvirkštine matricai A, jei AB=BA=E ir žymime A^{-1}. Čia E – vienetinė matrica.

Jei $ax = b$, tai $x = \frac{b}{a} = a^{-1}b$; čia a,b – skaliarai. Analogiškai įvedami pažymėjimai ir dėl matricų, t.y. jei $A\vec{x} = C$, tai $\vec{x} = A^{-1}C$ ir $\det A \neq 0$

Atvirkštinė matrica egzistuoja tada ir tik tada, kai $D = \det A \neq 0$.
Atvirkštinę matricą skaičiuojame sekančiu būdu:

$$A^{-1}=\frac{1}{D}A^{+}=\frac{1}{D}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{D}(A_{ij})^{T}.$$

A^{+} vadinama prijungtine matrica matricai A. Tai adjunktų transponuota matrica.

Teiginio, kad $AA^{-1}=A^{-1}A=E$, įrodymas:

$$\frac{1}{D}AA^{+}=\frac{1}{D}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{D}\begin{pmatrix}D&0&0\\0&D&0\\0&0&D\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{D}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{D}A^{+}A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E_{3}.$$

Apibrėžimas: Kai $\det A=0$, matricą A vadiname išsigimusia (singuliaria); jei $\det A\neq 0$, matricą A vadiname neišsigimusia (reguliaria) . Tik reguliari matrica turi sau atvirkštinę matricą.

Pvz: Atvirkštinės matricos skaičiavimas:

Duota matrica $A=\begin{pmatrix}3&4&1\\5&7&8\\8&3&2\end{pmatrix}$; tikriname, ar ji reguliari: $\begin{vmatrix}3&4&1\\5&7&8\\8&3&2\end{vmatrix}=145\neq 0$.

$$\begin{array}{lll}A_{11}=-10 & A_{21}=-5 & A_{31}=25\\ A_{12}=54 & A_{22}=-2 & A_{32}=-19\\ A_{13}=-41 & A_{23}=23 & A_{33}=1\end{array}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{145}\begin{pmatrix}-10&-5&25\\54&-2&-19\\-41&23&1\end{pmatrix}$$

Patikrinimas, ar teisingai paskaičiuota atvirkštinė matrica A^{-1} matricai A.

$$\begin{pmatrix}-10&-5&25\\54&-2&-19\\-41&23&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&4&1\\5&7&8\\8&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}145&0&0\\0&145&0\\0&0&145\end{pmatrix}=\det A\cdot E_3$$

$$\begin{pmatrix}3&4&1\\5&7&8\\8&3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-10&-5&25\\54&-2&-19\\-41&23&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}145&0&0\\0&145&0\\0&0&145\end{pmatrix}=\det A\cdot E_3$$

NAMŲ DARBAS

Paskaičiuoti atvirkštinę matricą matricai A, jei

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 5 & 8\\ 9 & 7 & 3\\ 2 & 4 & 5\end{pmatrix}$$

§8. Tiesinių algebrinių lygčių sprendimas atvirkštinės matricos metodu

Duotą **§5** lygčių sistemą (LS) galima užrašyti matricinėj formoj:

$$\text{(LS)}\qquad \begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases};\qquad A_{3x3}\vec{x}=B,\ \text{kur}\ \vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix};$$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}.$$

Jei $\det A\neq 0$, tada egzistuoja atvirkštinė matrica tokia, kad $A^{-1}A\vec{x}=A^{-1}B$; kadangi $A^{-1}A=E$, tai $E\vec{x}=\vec{x}=A^{-1}B$.

Pvz: Išspręskime antros eilės lygčių sistemą atvirkštinės matricos metodu.

$$\begin{cases}-3\cdot x_1-x_2=1,\\ 4\cdot x_1+x_2=2.\end{cases}\qquad \vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix};\qquad A=\begin{pmatrix}-3 & -1\\ 4 & 1\end{pmatrix};\quad \det A=(-3)\cdot 1-(-1)\cdot 4=1;$$

$$\begin{matrix}A_{11}=1\\ A_{12}=-4\end{matrix};\qquad \begin{matrix}A_{21}=1\\ A_{22}=-3\end{matrix};$$

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -4 & -3\end{pmatrix};\quad A^{-1}B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -4 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -10\end{pmatrix}.$$

Patikrinimas būtinas tiek paskaičiuotai atvirkštinei matricai, tiek ir gautam atsakymui:

a)
$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & -1\\ 4 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ -4 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$$
$$A^{-1}A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -4 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & -1\\ 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$$

b)
$$\begin{pmatrix}-3 & -1\\ 4 & 1\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}-3 & -1\\ 4 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\ -10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$$

Ats.: $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\ -10\end{pmatrix}$.

Išvesime Kramerio formules, pasinaudodami atvirkštinės matricos metodu.

$$A\vec{x}=B,$$
$$D=\det A\neq 0.$$

$$A^{-1}=\frac{1}{D}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix};$$

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{D}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}=\frac{1}{D}\begin{pmatrix}b_1A_{11}+ & b_2A_{21}+ & b_3A_{31}\\ b_1A_{12}+ & b_2A_{22}+ & b_3A_{32}\\ b_1A_{13}+ & b_2A_{23}+ & b_3A_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{D}\begin{pmatrix}D_{x_1}\\ D_{x_2}\\ D_{x_3}\end{pmatrix};$$

$$b_1A_{11}+b_2A_{21}+b_3A_{31}=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=D_{x1}=D_1;$$

$$b_1A_{12}+b_2A_{22}+b_3A_{32}=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix}=D_{x2}=D_2;$$

$$b_1A_{13}+b_2A_{23}+b_3A_{33}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}=D_{x3}=D_3\ ,$$ t.y. $x_i=\dfrac{D_i}{D}, i=1,2,3..$

Teorema: (Apie atvirkštinę matricą).

Tegu duotos dvi reguliarios matricos A ir B, dimA=dimB. Tuomet:

1. $\exists A^{-1}$ ir ji ! – egzistuoja atvirkštinė matrica A^{-1} matricai A ir ji vienintelė;
2. $\exists (A^{-1})^{-1}=A$ - egzistuoja atvirkštinė matrica atvirkštinei A^{-1} ir ji lygi A;
3. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$;

4. $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$, čia $\alpha \neq 0$ skaliaras.

Įrodymai:

1. Tarkime, kad matrica A turi dvi atvirkštines matricas B ir C, t.y.
$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C$, t.y. $B = C$.

2. $$\det(AA^{-1}) = \det E = 1 = \det A \cdot \det A^{-1};$$

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \neq 0, \text{ t.y. } A^{-1} \text{ reguliari matrica.}$$

Kadangi A^{-1} reguliari, tai $\exists (A^{-1})^{-1}$ tokia, kad $(A^{-1})^{-1} \cdot A^{-1} = E$, bet ir $AA^{-1} = E$. Pasirėmę teoremos 1. dalimi, gauname, kad $A = (A^{-1})^{-1}$.

3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$? Remiantis matricų savybėmis, turime:
$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E;$$
$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = E$, t.y. matricai AB atvirkštinė matrica išties yra matrica $B^{-1}A^{-1}$.

4. Įrodymas panašus, kaip ir 3savybės.

Teorema:(apie kvadratinių matricų sąryšį su tiesinių lygčių sistemomis).

Tegu $A\vec{x} = B$, kur $\dim A = n$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Tuomet sekantys teiginiai yra ekvivalentūs:

1. A turi atvirkštinę matricą A^{-1};

2. Tiesinė lygčių sistema $A\vec{x} = B$ turi vienintelį sprendinį bet kokiems duomenų stulpeliams B;

3. Homogeninė lygčių sistema $A\vec{x} = 0$ turi tik nulinį sprendinį $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$;

4. Matrica A ekvivalenti vienetinei matricai $A \sim E_n$.

Pastaba: *Jei bent vienas teiginys yra teisingas, tai teisingi yra visi kiti teiginiai.*

§9. Atvirkštinės matricos skaičiavimas Gauso metodu

Jei matrica A elementarių pertvarkymų dėka gali būti suvesta į vienetinę matrica, tai, remiantis teorema (apie kvadratinių matricų saryšį su tiesinių lygčių sistemomis), egzistuoja atvirkštinė matrica A^{-1} matricai A.

Imame matricą $(A|E)$ ir dauginame iš kairės iš matricos A^{-1}. Turime $A^{-1}(A|E)=(AA^{-1}|A^{-1}E)=(E|A^{-1})$, t.y. jei $A\sim E$, tai, atlikdami elementariuosius pertvarkymus su matricos $(A|E)$ eilutėmis taip, kad iš A gautume vienetinę matricą E, iš vienetinės matricos E gausime atvirkštinę A^{-1}.

Pavyzdys:

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -4 & 2\end{pmatrix}$$

$$(A|E)=\left(\begin{array}{cc|cc}3 & -1 & 1 & 0\\ -4 & 2 & 0 & 1\end{array}\right)E_1\div 3\to E_1\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ -4 & 2 & 0 & 1\end{array}\right)E_2\div 4E_1\to E_2\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 1\end{array}\right)E_2\cdot\frac{1}{2}\to E_2\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2}\end{array}\right)E_1+E_2\to E_1\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3}\end{array}\right);$$

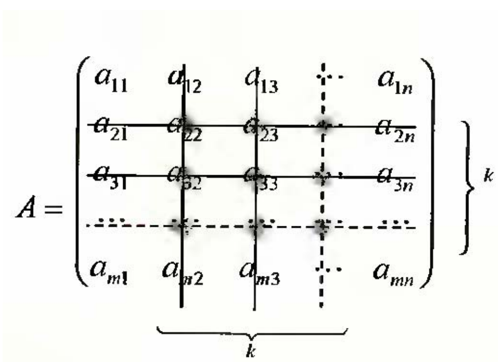
<u>**NAMŲ DARBAS**</u>

Paskaičiuoti Gauso metodu atvirkštinę matricą matricai A (patikrinimas būtinas):

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

§10. Matricos Rangas. Bazinio minoro teorema

Apibrėžimas: Determinantas, sudarytas iš matricos A elementų, kurie yra k-eilučių ir k-stulpelių sankirtose, vadinamas tos matricos k-tosios eilės minoru.



$$M_k = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2k+1} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k+12} & a_{k+13} & \dots & a_{k+1k+1} \end{vmatrix}$$

M_k - k-tosios eilės minoras, kurio elementai yra matricos A pasirinktų eilučių ir stulpelių sankirtų elementai.

Akivaizdu, kad žemiausia matricos $A_{m\times n}$ minoro eilė k lygi 1, o aukščiausia = min(m,n), t.y. $1 \le k \le \min(m,n)$.

$$\text{Pvz.:} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 7 & 5 & 8 & 2 \\ 9 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}_{3x4}$$

Kaip paskaičiuoti, kiek kokios eilės minorų yra šioje matricoje? Aišku, kad 1-os eilės minorų yra tiek, kiek yra matricoj elementų, t.y. 3x4=12. Antros eilės minorų yra $M_2 \leftrightarrow C_3^2 \cdot C_4^2 = 18$. Trečios eilės minorų šioje matricoje yra $M_3 \leftrightarrow C_4^3 = 4$.

Aukštesnės (nei trečios) eilės minorų šioje matricoje nėra, nes didžiausia minoro eilė turi neviršyti min(3,4).

Apibrėžimas: Matricos minorų, nelygių 0, aukščiausia eilė vadinama tos matricos rangu. O bet kuris vienas (kai jų yra keletas) iš nelygių nuliui aukščiausios eilės minorų vadinamas baziniu minoru.

Pastaba: Sutarta, kad nulinės matricos rangas yra 0.

Matricos rangą žymėsime r(A) arba rang(A), arba tiesiog r, jei aišku, kokia matrica turima omeny. Tokiu būdu

$$0 \le r(A) \le \min(m,n).$$

Pvz.: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}_{2x5}$ $\qquad M_2^{(1)} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5 \neq 0$

$$M_2^{(2)} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 9 = -3 \neq 0 \qquad M_2^{(3)} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 12 = -9 \neq 0$$

Šios matricos rangas yra 2. Baziniu minoru galime pasirinkti $M_2^{(1)}$.

Susitarimas: Baziniu minoru skelbsime kairiau ir aukščiau esantį minorą.

Apibrėžimas: Matricos eilutes ir stulpelius, kurių sankirtose yra bazinio minoro elementai, vadinsime bazinėmis eilutėmis ir baziniais stulpeliais.

Pvz.: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{3x4}$ šioje matricoje visi trečios eilės minorai yra lygūs 0.

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{, nes } E_2 = E_3 + 2E_1; \quad M_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r = 2 .$$

Kai matrica yra didelių išmatavimų, skaičiuoti jos rangą, ieškant aukščiausios eilės minorų, nelygių 0, yra labai sunkus ir laiko atžvilgiu imlus darbas. Remiantis determinantų savybėmis, skaičiuodami rangą, galime (mums visai nesvarbu konkreti determinanto reikšmė – svarbu kuo greičiau „sužvejoti“ aukščiausios eilės minorą, nelygų 0):

1) transponuoti matricą;
2) eilutes (stulpelius) sukeisti vietomis;
3) dauginti eilutes (stulpelius) iš skaičiaus nelygaus nuliui;
4) sudėti (atimti) bet kurias eilutes (stulpelius).

Matricos rangas yra invariantiškas (nesikečia) šių veiksmų atžvilgiu. Šie veiksmai leidžia žymiai efektyviau paskaičiuoti matricos rangą.

Pvz.:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{\substack{s_1 - 2s_2 \to s_1 \\ s_4 - s_2 \to s_4}} \xrightarrow[r]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 6 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}_{\substack{E_2 + E_1 \to E_2 \\ E_3 + E_2 \to E_3}} \xrightarrow[r]{}$$

$$\xrightarrow[r]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}_{E_2 / 3 \to E_2} \xrightarrow[r]{} \cdots \xrightarrow[r]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tokie pertvarkymai leistini ir akivaizdu, kad aukščiausia eilė minoro, nelygaus 0, yra 2.

Apibrėžimas: Matrica, kurios kiekvienoje eilutėje ir stulpelyje yra ne daugiau kaip vienas vienetas (t.y. 0 arba 1), vadinama kanonine matrica.

Egzistuoja glaudus ryšys tarp matricos rango ir matricos bazinių eilučių bei stulpelių. Tegu duota matrica A_{mxn} . Jos eilutes pažymėkime raide E, o stulpelius S ir sunumeruokime:

$$\begin{matrix} E_1,\ldots,E_m \\ S_1,\ldots,S_n \end{matrix} \quad ; \quad E_i = (a_{i1};\cdots;a_{in}); \quad S_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

Reiškinį $\sum_{i=1}^{m} c_i E_i$, kur c_i - bet kokios realios konstantos, vadinsime eilučių tiesine kombinacija (tiesiniu dariniu), o $\sum_{i=1}^{n} \tilde{c}_j S_j$ - stulpelių tiesiniu dariniu.

Apibrėžimas: Matricos eilutes (stulpelius) $E_1, \ldots, E_m (S_1, \ldots S_n)$ vadinsime tiesiškai nepriklausomomis (nepriklausomais), jei tiesinis darinys

$$\sum_{i=1}^{m} c_i E_i = 0 \Leftrightarrow c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0 \quad \left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{c}_j S_j = 0 \Leftrightarrow \tilde{c}_1 = \tilde{c}_2 = \ldots = \tilde{c}_n = 0 \right).$$

Jei bent viena iš konstantų nelygi 0, o darinys vis tik lygus 0, tai nepriklausomybės neturėsim.Tarkime, $c_1 \neq 0$. Tuomet

$$E_1 = -\frac{c_2}{c_1} E_2 - \frac{c_3}{c_1} E_3 - \ldots - \frac{c_m}{c_1} E_m \text{ (eilutė } E_1 \text{ yra kitų eilučių tiesinė kombinacija).}$$

Jeigu taip yra, tai eilutės (stulpeliai) yra tiesiškai priklausomos(-i).

Bazinio minoro teorema : Matricos bazinės eilutes (stulpeliai) yra tiesiškai nepriklausomos (-i), o bet kuri nebazinė eilutė (stulpelis) yra tos matricos bazinių eilučių (stulpelių) tiesinė kombinacija.

Komentaras: Matricos rangas yra lygus bazinio minoro eilučių (stulpelių) skaičiui (t.y. tiesiškai nepriklausomų eilučių (stulpelių) skaičiui).

◁ **Įrodymas.** Įrodysime nebazinių eilučių tiesinę priklausomybę nuo bazinių bazinių eilučių. Tarkime, matricos rangas yra r ir tegul bazinis minoras yra kairėje viršutinėje matricos dalyje. Jeigu taip nėra, atlikdami eilučių (stulpelių) elementarius pertvarkymus, susitvarkome taip, kad bazinis minoras būtų kairėje viršutinėje matricos dalyje.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} & a_{1r+1} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{1r} & \ldots & a_{rr} & a_{rr+1} & \ldots & a_{rn} \\ a_{r+11} & \ldots & a_{r+1r} & a_{r+1r+1} & \ldots & a_{r+1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mr} & a_{mr+1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}_{mxn} ; \quad M_r \neq 0 .$$

〈 Paaiškinimas (ne prie įrodymo):

Tegu A= $\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}_{3x3}$ ir $E_2 = c_1 E_1 + c_3 E_3$. Jei taip yra, tai $\det \begin{vmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{vmatrix} = 0$. Tai seka iš determinantų savybių: $\begin{vmatrix} E_1 \\ c_1E_1 + c_3E_3 \\ E_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_1 \\ c_1E_1 \\ E_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_1 \\ c_3E_3 \\ E_3 \end{vmatrix}$. Iškėlus c_1 ir c_3 prieš determinantus, gauname po dvi vienodas eilutes, kas reiškia, kad $\det\begin{vmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{vmatrix} = 0$.

Analogiškas įrodymas yra stulpeliams. $\rangle$

Įsiveskime pagalbinį determinantą sekančiu būdu:

$$\left|\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rk} \\ \hdashline a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ir} & a_{ik} \end{array}\right| .$$

Prie bazinio minoro pridėjome vieną papildomą stulpelį ir vieną papildomą eilutę. Fiksuokim vieną nebazinę eilutę papildomos eilutės pozicijoj, t.y. $r+1 \le i \le m$. O papildomo stulpelio pozicijoj pradžioje įrašykime pirmą stulpelį. Toks pagalbinis determinantas lygus 0 pagal mūsų prielaidą, kad matricos rangas yra lygus r.. Jei būtų priešingai, t.y. būtų nelygus 0, tai rangas būtų r +1, kas prieštarautų prielaidai. Kadangi determinantas lygus 0, tai, skleisdami jį pagal paskutinį stulpelį, turime:

$$a_{11}A_{1r+1} + a_{21}A_{2r+1} + \dots + a_{r1}A_{rr+1} + a_{i1}A_{r+1r+1} = 0.$$

Po to į papildomo sulpelio poziciją įrašykime 2-ą, 3-ą ir t.t. iki n-ojo stulpelio. Dėl bet kurio stulpelio S_k su numeriu $2 \le k \le n$ gausim analogišką lygybę kaip ir dėl 1-o stulpelio:

$$a_{1k}A_{1r+1} + a_{2k}A_{2r+1} + \dots + a_{rk}A_{rr+1} + a_{ik}A_{r+1r+1} = 0 .$$

Pastebėkime, kad A_{r+1r+1} yra bazinis minoras, nes $A_{r+1r+1} = (-1)^{r+1r+1}M_r = M_r \ne 0$; tuomet

$$a_{ik} = -\frac{A_{1r+1}}{M_r}a_{1k} - \frac{A_{2r+1}}{M_r}a_{2k} - \dots - \frac{A_{rr+1}}{M_r}a_{rk} \quad \text{; ir tegu}$$

$$c_1 = -\frac{A_{1r+1}}{M_r}, \quad c_2 = -\frac{A_{2r+1}}{M_r}, \quad \dots \quad , \quad c_r = -\frac{A_{rr+1}}{M_r}.$$

Pastaba: Koeficientai c_i, $i = 1 \div r$, priklauso nuo i-tosios eilutės pirmųjų r elementų ir visiškai nepriklauso nuo dešiniojo (pagalbinio) stulpelio, nes, skaičiuojant adjunktus A_{ir+1}, $i = 1 \div r$, išbraukiami paskutiniojo (pagalbinio) stulpelio elementai.

Tokiu būdu gauname, kad kiekvienas i-osios eilutės elementas a_{ik}, $k = 1 \div n$, išreiškiamas tiesine kombinacija per aukščiau tame pačiame stulpelyje stovinčius elementus su tais pačiais koeficientais c_i, $i = 1 \div r$, t.y.:

$$
\begin{aligned}
a_{i1} &= c_1 a_{11} + c_2 a_{21} + c_3 a_{31} + \ldots + c_r a_{r1} \\
a_{i2} &= c_1 a_{12} + c_2 a_{22} + c_3 a_{32} + \ldots + c_r a_{r2} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{in} &= c_1 a_{1n} + c_2 a_{2n} + c_3 a_{3n} + \ldots + c_r a_{rn}
\end{aligned}
$$

Iš čia gauname, kad $E_i = c_1 E_1 + c_2 E_2 + c_3 E_3 + \ldots + c_r E_r$, $r + 1 \le i \le m$.

Taigi parodėme, kad bet kuri nebazinė eilutė yra bazinių eilučių tiesinė kombinacija. $\triangleright$

Pastaba. Teoremos įodyme nurodytas būdas, kaip paskaičiuoti tiesinės kombinacijos koeficientus. Pademonstruosime tai pavyzdžiu. Tegu turime matricą A. Paskaičiuokime jos rangą ir pasirinkime bazinį minorą:

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 10 & -13 \end{pmatrix}_{E_4 - E_3 \to E_4} \xrightarrow[r]{} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -12 \end{pmatrix}^{E_1 - E_3 \to E_1} \xrightarrow[r]{} \begin{pmatrix} 0 & 7 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -12 \end{pmatrix} E_2 - 2E_3 \to E_2
$$

$$
\xrightarrow[r]{} \begin{pmatrix} 0 & 7 & -1 & -1 \\ 0 & 7 & -5 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow[r]{} \begin{pmatrix} 0 & 7 & -1 & -1 \\ 0 & 7 & -5 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -12 \end{pmatrix} E_2 - E_1 \to E_2 \xrightarrow[r]{} \begin{pmatrix} 0 & 7 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow[r]{}
$$

$$
\xrightarrow[r]{} \begin{pmatrix} 0 & 7 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow[r]{} \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -12 \end{pmatrix} E_2 \cdot (-2) \to E_2 \xrightarrow[r]{} \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -12 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow[r]{}
$$

$$
\xrightarrow[r]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Taigi matricos rangas yra 3, t.y. $r(A) = 3$.

Tegu $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -28 = A_{44}$ - bazinis minoras.

Tuomet $\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}$ - bazinės eilutės, o nebazinė eilutė E_4 išsireiškia per bazines eilutes sekančiai:

$$E_4 = c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3 .$$

$$A_{14} = (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 10 \end{vmatrix} = 56; \quad A_{24} = (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 10 \end{vmatrix} = -56;$$

$$A_{34} = (-1)^{3+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 10 \end{vmatrix} = 84;$$

Iš čia gauname, kad: $c_1 = -\dfrac{A_{14}}{A_{44}} = -\dfrac{56}{-28} = 2$; $c_2 = -\dfrac{A_{24}}{A_{44}} = -\dfrac{-56}{-28} = -2$; $c_3 = -\dfrac{A_{34}}{A_{44}} = -\dfrac{84}{-28} = 3$.

Taigi $E_4 = c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3 = 2E_1 - 2E_2 + 3E_3$. Gavome, kad E_4 eilutė tiesiškai priklausoma nuo bazinių eilučių.

NAMŲ DARBAS

Paskaičiuoti ketvirto stulpelio tiesinės kombinacijos koeficientus.

Išvados: Grįžtant prie tiesinių algebrinių lygčių sistemų, bazines eilutes atitinka bazinės lygtys, o bazinius stulpelius – baziniai nežinomieji. Taigi bet kuri lygčių sistema yra ekvivalenti sistemai, sudarytai iš bazinių lygčių (nebazines lygtis braukiam iš lygčių sistemos).

Teorema (Kronekerio – Kapeli):Tiesinių lygčių sistema yra suderinta tada ir tik tada, kai lygčių sistemos (LS) matricos rangas yra lygus išplestosios matricos rangui.

NAMŲ DARBAS

1. Remiantis teorema, ištirti, ar duotoji lygčių sistema yra suderinta:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

2. Remiantis teorema, ištirti, ar lygčių sistemos yra suderintos, ir, jeigu taip, rasti bendruosius sprendinius:

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -4 \\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 7x_4 = 6 \end{cases}$

II Skyrius

Vektorinė algebra

§1. Tiesinės erdvės

Apibrėžimas: Tegu X – tam tikra matematinių objektų (taškai tiesėje, plokštumoje, erdvėje, vienarūšių matricų aibė (t.y. $M_{m\times n} = \{A_{m\times n}\}$),...) aibė, kurioje yra apibrėžtos dvi operacijos:

a) vidinė – dviejų elementų sudėtis:

$x, y \in X; \quad x + y \in X$

b) išorinė – sandaugos iš skaliaro α :

$x \in X, \alpha \in R^1 \Rightarrow \alpha x \in X$.

Šios operacijos turi tenkinti papildomus reikalavimus:

a):

1. $x + y = y + x$ (sudėties komutatyvumo)
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (sumos asociatyvumo)
3. $0 + x = x$ (nulinio elemento egzistavimas)
4. $x + (-x) = 0$ (priešingo elemento sumos atžvilgiu egzistavimas)

b):

1. $(\alpha_1\alpha_2)x = \alpha_1(\alpha_2 x)$
2. $1 \cdot x = x$
3. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
4. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

Aibė X, tenkinanti šiuos reikalavimas, vadinama tiesine erdve.

<u>NAMŲ DARBAS</u>

Sugalvoti po kelis skirtingus tiesinių erdvių pavyzdžius.

Pvz.: 1. Natūraliųjų skaičių aibė nėra tiesinė erdvė.
2. Realiųjų skaičių aibė yra tiesinė erdvė.

Apibrėžimas: Tiesinių erdvių bet kurių elementų x_i tiesine kombinacija vadinsime reiškinį

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \ .$$

Tiesinės erdvės elementų tiesinis priklausomumas ir nepriklausomumas apibrėžiamas taip pat, kaip ir matricos eilutėms bei stulpeliams.

Pažymėkime $X = V_n$ (čia V_n - n – mačių vektorių erdvė).

Apibrėžimas: Tiesinės erdvės (vektorinės erdvės) baze vadinsime maksimalią tiesiškai nepriklausomų elementų (vektorių) sistemą, jei bet kuris kitas tiesinės erdvės elementas (vektorinės erdvės – vektorius) gali būti išreikštas per bazinius elementus (bazinius vektorius) tiesiniu dariniu (kombinacija).

Bazinių elementų sistema (rinkinys) yra tiesinės erdvės poaibis, t.y.

$$\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset X; \quad \dim X = n;$$

$$\left(\{\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, ..., \overrightarrow{V_n}\} \subset V_n; \quad \dim V_n = n \quad \text{dėl n – mačių vektorinių erdvių.}\right)$$

Bazes tiesinėje (vektorinėje) erdvėje galime apibrėžti įvairiai, tačiau elementų (vektorių), įeinančių į bazę, skaičius yra duotai erdvei pastovus – jis apibrėžia erdvės dimensiją (išmatavimą).

Prie be kurios sistemos prijungus nulinį elementą, ji tampa tiesiškai priklausoma, todėl 0-nis elementas į bazę įeiti negali.

Pvz.: Tegu $M_{2\times2} = \{A_{2\times2}\}$ – vienarūšių matricų, kurių $\dim = 2\times2$, aibė:

$$M_{2\times2} = \left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right\}.$$

Ši matricų aibė yra tiesinė erdvė, o jos baziniais elementais gali būti:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Visi kiti šios matricų aibės elementai nėra baziniai, nes juos galima išreikšti per bazinius elementus, pvz. elementas $x = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ nėra bazinis, nes $x = 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4$ ir $(3;1;4;2)$ – tos matricos koordinatės $M_{2\times2}$ aibėje kaip tiesinėje erdvėje.

§2. Vektoriaus išreiškimas duotosios bazės vektoriais

Tarkime, turime vektorinę erdvę V_n (t.y. $\dim V_n = n$) ir joje vektorių rinkinį $\{\vec{a}_i\}_{i=1}^{n}$: $\vec{a}_i = (a_{1i}; a_{2i}; ...; a_{ni})$. Šie vektoriai n-mačiai. Jei turime tokį vektorių rinkinį, tai kaip patikrinti, ar jis gali būti V_n baze ar ne. Imkime tiesinį darinį $\sum_{i=1}^{n} c_i \vec{a}_i = 0$. Išrašę pakoordinačiui, gauname:

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + ... + a_{1n}c_n = 0 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + ... + a_{2n}c_n = 0 \\ ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + ... + a_{nn}c_n = 0 \end{cases}$$

t.y. gavome homogeninę lygčių sistemą. $\overrightarrow{\{a_i\}_{i=1}^{n}}$ - vektorių sistema tiesiškai nepriklausoma, jei $\sum_{i=1}^{n} c_i \overrightarrow{a_i} = 0 \Leftrightarrow c_1 = c_2 = c_3 = ... = c_n = 0$ (priešingu atveju vektorių sistema bus tiesiškai priklausoma).

NAMŲ DARBAS

Išsiaiškinti, kaip, panaudojus 1 skyriaus faktus, parodyti, kad vektorių sistema tiesiškai nepriklausoma/priklausoma (panaudoti bazinio minoro teoremą).

Teorema:(apie vektorinės erdvės V_n standartinę bazę)

Vektorių sistema $\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{e_1} = (1;0;0;...;0) \\ \overrightarrow{e_2} = (0;1;0;...;0) \\ \overrightarrow{e_3} = (0;0;1;...;0) \\ ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ \overrightarrow{e_n} = (0;0;0;...1) \end{array}\right\}$ yra vektorinės erdvės V_n bazė.

Apibrėžimas: Tokiu būdu parinkta bazė vadinama standartine.

$\triangleleft$ 1) $\left\{\overrightarrow{e_i}\right\}_{i=1}^{n}$ tiesiškai nepriklausoma vektorių sistema?

Imame tiesinį darinį $\sum_{i=1}^{n} c_i \vec{e}_i = 0$. Iš čia $(c_1;c_2;...;c_n) = 0 \Leftrightarrow c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$, t.y. sistema tiesiškai nepriklausoma.

2) Bet kuris vektorius $\vec{x} \in V_n$ išsireiškia per šiuos vektorius?

Tegu $\vec{x} = (x_1;x_2;...;x_n)$. Tuomet $\vec{x} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + ... + x_n\vec{e_n}$. $\triangleright$

Teorema: (Vektorinės bazės kriterijus)

Tegu turime vektorių sistemą $\left\{\overrightarrow{a_i}\right\}_{i=1}^{n}$. Ji yra V_n bazė $\Leftrightarrow$ kai determinantas

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Čia $\overrightarrow{a_i} = (a_{1i};a_{2i};...;a_{ni})$, t.y. determinanto D stulpeliai – tai vektoriaus $\overrightarrow{a_i}$ koordinatės, $i = 1 \div n$.

$\triangleleft$ **Įrodymas:**

Būtinumas: Tegu $\left\{\overrightarrow{a_i}\right\}_{i=1}^{n} - V_n$ bazė. Determinanto D stulpeliai – vektorių $\overrightarrow{a_i}$ komponentės. Pagal prielaidą vektoriai (stulpeliai) tiesiškai nepriklausomi. Jų yra n. Taigi matricos $\left(a_{ij}\right)_{\substack{i=1\div n \\ j=1\div n}}$ rangas lygus n (žr. Bazinio minoro teoremą), t.y. $D \neq 0$.

Pakankamumas: Tegu $D \neq 0$.

Sudarome tiesinę kombinaciją $\sum_{i=1}^{n} c_i \overrightarrow{a_i} = 0 \iff$:

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + ... + a_{1n}c_n = 0 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + ... + a_{2n}c_n = 0 \\ ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + ... + a_{nn}c_n = 0 \end{cases}$$

1) $\left\{\overrightarrow{a_i}\right\}_{i=1}^{n}$ - tiesiškai nepriklausomų vektorių sistemą?

Kadangi $D \neq 0$, tai homogeninė lygčių sistema turi vienintelį sprendinį $c_1 = c_2 = c_3 = ... = c_n = 0$. Tai reiškia, kad stulpeliai yra tiesiškai nepriklausomi, o tuo pačiu ir vektoriai $\overrightarrow{a_i}$.

2) Bet kuris vektorius $\vec{b} \in V_n$ išsireiškia per vektorių $\overrightarrow{a_i}$ tiesinę kombinaciją ?

Tarkime $\sum_{i=1}^{n} c_i \overrightarrow{a_i} = \vec{b}$. Vektoriaus $\vec{b} = (b_1; b_2; ...; b_n)$ koordinatės standartinėje bazėje $\left\{\overrightarrow{e_i}\right\}_{i=1}^{n}$;

$\vec{b} = (c_1; c_2; ...; c_n)_{\left\{\overrightarrow{a_i}\right\}_{i=1}^{n}}$ koordinatės vektorių sistemoje $\left\{\overrightarrow{a_i}\right\}_{i=1}^{n}$.

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + ... + a_{1n}c_n = b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + ... + a_{2n}c_n = b_2 \\ ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + ... + a_{nn}c_n = b_n \end{cases}$$

Kadangi $D \neq 0$, tai pastaroji lygčių sistema turi vienintelį sprendinį $c_i = D_i / D$ (žr. Kramerio formules), $i = 1 \div n.$ Iš 1) ir 2) gauname, kad vektorių rinkinys $\left\{\overrightarrow{a_i}\right\}_{i=1}^{n}$ yra V_n bazė. ▹

<u>NAMŲ DARBAS</u>

Pasiremiant vektorinės bazės kriterijum, patikrinti, ar vektorių sistema $\left\{\begin{matrix} \overrightarrow{a_1} = (1; 2; 0) \\ \overrightarrow{a_2} = (-1; 0; 1) \\ \overrightarrow{a_3} = (0; 1; 1) \end{matrix}\right\}$ gali būti vektorinės erdvės V_3 baze. Jei taip, tai rasti vektoriaus $\vec{b}$ koordinates naujoje bazėje, jei jo koordinatės standartinėje bazėje yra $\vec{b} = (1; 4; 0)$.

.

Komentaras : teoremos įrodymo 2) dalyje yra nurodyta, kaip skaičiuoti vektoriaus $\vec{b}$ koordinates naujoje bazėje $\left\{\overrightarrow{a_1}; \overrightarrow{a_2}; \overrightarrow{a_2}\right\}$, prieš tai pasitikrinus, ar $D \neq 0$.

§3. Tiesinis poerdvis. Homogeninės lygčių sistemos fundamentali sprendinių sistema

Apibrėžimas: Tegu X – tiesinė erdvė. Poaibis $L \subset X$ vadinamas tiesinės erdvės X tiesiniu poerdviu, jei poaibis L tenkina tiesinės erdvės reikalavimus, t.y. pats yra tiesinė erdvė.

Pastaba : $R^1 \supset N; R^1 \supset Q; R^1 \supset Z; R^1 \supset$ iracionaliųjų skaičių aibė – bet tai nėra poerdviai, nes N,Q,Z ir iracionaliųjų skaičių aibė – nėra tiesinės erdvės.

Tegu turime nehomogeninę lygčių sistemą

$$A\vec{x} = B. \qquad \text{(LS)}$$

Tarkime , kad kokiu tai būdu suradome šios sistemos atskirą sprendinį ($\overrightarrow{x_{an}}$ - atskiras nehomogenines lygčių sistemos sprendinys). Ieškosime nehomogeninės lygčių sistemos bendrąjį sprendinį sekančiu pavidalu:

$$\overrightarrow{x_{bn}} = \overrightarrow{x_{an}} + \overrightarrow{x_{bh}}.$$

Tada $A\vec{x}_{bh} = A\vec{x}_{an} + A\vec{x}_{bh} = B$ ir $A\vec{x}_{an} = B$, taigi $B + A\vec{x}_{bh} = B$. Gauname, kad $A\vec{x}_{bh} = 0$, t.y. jei žinome atskirą nehomogeninės (LS) sprendinį $\overrightarrow{X}_{an}$, tai bendrojo nehomogeninės (LS) sprendinio radimas susiveda į homogeninės (LS) sprendimą.

Apibrėžimas: Tiesinės homogeninės lygčių sistemos $A\vec{x}_{bh} = 0$ su n nežinomųjų ir $r = rang(A) < n$ n-r tiesiškai nepriklausomų sprendinių vadinami fundamentaliąja sprendinių sistema.

Pastaba: sąlyga $r < n$ apibrėžime esminė. Jei $r = n$ (t.y. rangas yra lygus nežinomųjų skaičiui), tai tiesiškai nepriklausomų sprendinių nėra $(n - r = 0)$. Tada yra tik vienas sprendinys vadinamas trivialiu (paprasčiausiu), $\vec{x} = \vec{0}$. Homogeninė lygčių sistema visada yra suderinta, nes $r(A) = r(A|B)$ (žr. Kronekerio – Kapeli teoremą).

Teorema: (Apie fundamentaliuosius sprendinius)
Tiesinės homogeninės lygčių sistemos $A\vec{x} = 0$ su $r(A) < n$ bet kuris sprendinys $\vec{x}_{bh}$ gali būti išreikštas fundamentaliųjų sprendinių tiesiniu dariniu $\vec{x}_{bh} = c_1\overrightarrow{f}_1 + c_2\overrightarrow{f}_2 + ... + c_{n-r}\overrightarrow{f}_{n-r}$.

◁ **Įrodymas:** Tegu $r = r(A), r < n$. Pagal bazinio minoro teoremą turime r bazinių eilučių ir r bazinių stulpelių, arba r bazinių ir n-r nebazinių (laisvų) nežinomųjų. Sudarome matricą FS (fudamentaliųjų sprendinių matricą):

$$FS = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_r & x_{r+1} & x_{r+2} & ... & x_n \\ \alpha_1^{(1)} & \alpha_2^{(1)} & ... & \alpha_r^{(1)} & 1 & 0 & ... & 0 \\ \alpha_1^{(2)} & \alpha_2^{(2)} & ... & \alpha_r^{(2)} & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \alpha_1^{(n-r)} & \alpha_1^{(n-r)} & ... & \alpha_r^{(n-r)} & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

Jos rangas lygus n-r (bazinis minoras M_{n-r} yra dešiniajame apatiniame kampe ir lygus $\det E_{n-r}$, t.y. n-r-osios eilės vienetinės matricos determinantui). Tuomet pirmoji eilutė nebazinė ir yra tiesiškai priklausoma nuo likusių n-r bazinių eilučių (žr. Bazinio minoro teoremą). Pažymėję $\vec{x}_{bh} = (x_1; x_2; ...; x_n)^T$, turime

$$\vec{x}_{bh} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} \\ \alpha_2^{(1)} \\ ... \\ \alpha_r^{(1)} \\ 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1^{(2)} \\ \alpha_2^{(2)} \\ ... \\ \alpha_r^{(1)} \\ 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} + ... + c_{n-r} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1^{(n-r)} \\ \alpha_2^{(n-r)} \\ ... \\ \alpha_r^{(n-r)} \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Gauname, kad $\vec{x}_{bh} = c_1 \overrightarrow{f}_1 + c_2 \overrightarrow{f}_2 + ... + c_{n-r} \overrightarrow{f}_{n-r}$.

Parodėme, kad bet kuris tiesinės homogeninės lygčių sistemos

$$A\vec{x} = 0 \qquad \text{(HLS)}$$

sprendinys išsidėsto tiesiškai per fundamentaliuosius sprendinius. ▷

Išvados iš teoremos:

1. Sakėm, kad $A\vec{x} = B$ sprendinių ieškome sekančiu būdu:

$$\vec{x}_{bn} = \vec{x}_{an} + \vec{x}_{bh} = \vec{x}_{ah} + c_1 \overrightarrow{f}_1 + c_2 \overrightarrow{f}_2 + ... + c_{n-r} \overrightarrow{f}_{n-r} (jei \quad r < n).$$

Jei $r = n$, tai $\vec{x}_{bn} = \vec{x}_{an}$.

2. Tegu homogeninės lygčių sistemos $A\vec{x} = 0$ visų sprendinių aibė $\{x_{bh}\}$, $\{x_{bh}\} = L$. $L \subset V_n$, t.y. poaibis vektorinėje n-matėje erdvėje V_n. L tenkina visus tiesinės erdvės reikalavimus. Taigi L yra vektorines erdvės V_n tiesinis poerdvis. L baze galime pasirinkti fundamentalią sprendinių sistemą $\left\{\overrightarrow{f}_i\right\}_{i=1}^{n-r}$, $\dim L = n - r$. Ateity L žymėsim V_n^{n-r}, taip nurodydami, kokioje vektorinėje erdvėje turime $n-r$-matį tiesinį poerdvį L, sudarytą iš (HLS) sprendinių.

<u>NAMŲ DARBAS</u>

1. Parodyti, kad L tenkina visus tiesinės erdvės reikalavimus.

2. Duota lygčių sistema:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - \qquad 4x_4 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$$

Surasti lygčių sistemos fundamentaliųjų sprendinių sistemą (rinkinį).

Aprašyti tiesinį poerdvį (*jeigu* $r < n$) $V_n^{(n-r)}$ sekančiai:

$$V_n^{(n-r)} = \left\{ \vec{x} \in V_n : \vec{x} = c_1 \vec{f}_1 + c_2 \vec{f}_2 + \ldots + c_{n-r} \vec{f}_{n-r} ; A\vec{f}_i = 0 \right\}.$$

§4. Vektorinės bazės transformacija

Tegu vektorinėje erdvėje V_n yra dvi bazės: $\begin{array}{l} (e): \left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n \right\} - \text{standartinė (senoji)}; \\ (e'): \left\{ \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \ldots, \vec{e}\,'_n \right\} - \textit{naujoji.} \end{array}$ Paimkime bet kokį vektorių $\vec{x} \in V_n$, tada jo koordinatės bazėje (e) yra $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \ldots + x_n \vec{e}_n$, o to paties vektoriaus koordinatės bazėje (e') yra $\vec{x}_{\left\{\vec{e}_i\,'\right\}_{i=1}^n} = \vec{x}\,' = x_1' \vec{e}_1\,' + x_2' \vec{e}_2\,' + \ldots + x_n' \vec{e}_n\,'$.

Tegu $\begin{cases} \vec{e}_1\,' = a_{11} \vec{e}_1 + a_{21} \vec{e}_2 + \ldots + a_{n1} \vec{e}_n \\ \vec{e}_2\,' = a_{12} \vec{e}_1 + a_{22} \vec{e}_2 + \ldots + a_{n2} \vec{e}_n \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \vec{e}_n\,' = a_{1n} \vec{e}_1 + a_{2n} \vec{e}_2 + \ldots + a_{nn} \vec{e}_n \end{cases}.$

Tada (į $\vec{x}'$ išraišką vietoj naujosios bazės vektorių statom jų išraiškas per senąją bazę (e)):

$$\begin{aligned} \vec{x}\,' &= x_1' a_{11} \vec{e}_1 + x_1' a_{21} \vec{e}_2 + \ldots + x_1' a_{n1} \vec{e}_n + \\ &+ x_2' a_{12} \vec{e}_1 + x_2' a_{22} \vec{e}_2 + \ldots + x_2' a_{n2} \vec{e}_n + \\ &+ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots + \\ &+ x_n' a_{1n} \vec{e}_1 + x_n' a_{2n} \vec{e}_2 + \ldots + x_n' a_{nn} \vec{e}_n = \\ &= \left(a_{11} x_1' + a_{12} x_2' + \ldots + a_{1n} x_n' \right) \vec{e}_1 + \\ &+ \left(a_{21} x_1' + a_{22} x_2' + \ldots + a_{2n} x_n' \right) \vec{e}_2 + \\ &+ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots + \\ &+ \left(a_{n1} x_1' + a_{n2} x_2' + \ldots + a_{nn} x_n' \right) \vec{e}_n \end{aligned}$$

arba

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + \ldots + a_{1n}x_n' \\ x_2 = a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + \ldots + a_{2n}x_n' \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_1 = a_{n1}x_1' + a_{n2}x_2' + \ldots + a_{nn}x_n' \end{cases}.$$

Matrica $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ vadinama bazių sąryšio matrica (t.y. sąryšio naujosios bazės su senąja baze matrica).

Matrica $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = A^T$ vadinama bazės keitimo matrica.

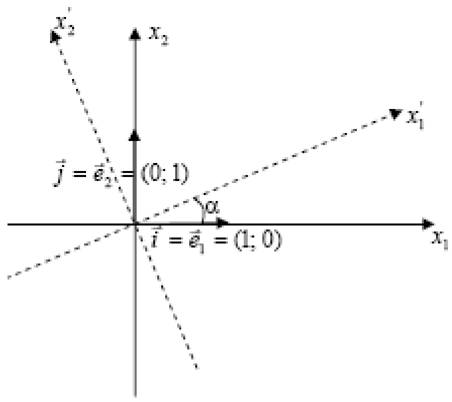
$$\boxed{B\vec{x}' = \vec{x}}$$

- to paties vektoriaus $\vec{x}$ naujųjų ir senųjų koordinačių sąryšis.

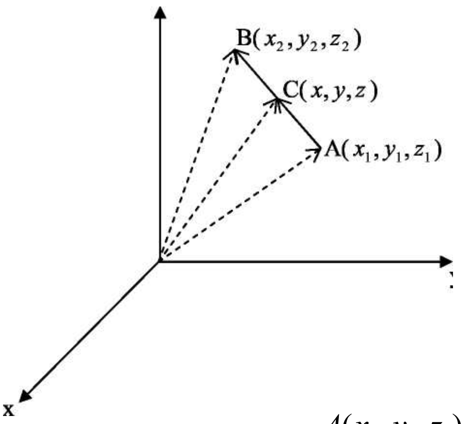
<u>NAMŲ DARBAS</u>

Duota standartinė bazė $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ vektorinėje erdvėje V_2. Tegu nauja bazė $\left\{\vec{e_1}', \vec{e_2}'\right\} \subset V_2$.

Rasti bazių sąryšio matricą ir bazės keitimo matricą, jei naujoji koordinačių sistema gauta, pasukus senąją koordinačių sistemą kampu α prieš laikrodžio rodyklę.



§5. Atkarpos dalijimas duotuoju santykiu



Duoti du taškai $A(x_1, y_1, z_1)$ *ir* $B(x_2, y_2, z_2)$. Atkarpoje AB reikia rasti tašką $C(x, y, z)$ taip, kad $\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{CB}|} = \lambda$, $(\lambda > 0)$. $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$, nes $\overrightarrow{AC}$ *ir* $\overrightarrow{CB}$ kolinearūs vektoriai.

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} - (x_i\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) = (x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j} + (z - z_1)\vec{k};$$
$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = (x_2 - x)\vec{i} + (y_2 - y)\vec{j} + (z_2 - z)\vec{k};$$
$$\lambda\overrightarrow{CB} = \lambda(x_2 - x)\vec{i} + \lambda(y_2 - y)\vec{j} + \lambda(z_2 - z)\vec{k}.$$

Du vektoriai $\overrightarrow{AC}$ ir $\lambda\overrightarrow{CB}$ lygūs, kai lygios jų atitinkamos koordinatės, t.y.

$$\begin{cases} x - x_1 = \lambda(x_2 - x), \\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y), \\ z - z_1 = \lambda(z_2 - z), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \\ y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \\ z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \end{cases}$$

Pastaba: Skaičiuojant 2-matėje erdvėje (plokštumoje) $z = 0$. Kai $z = 0$ ir $\lambda = 1$, gauname jau iš mokyklos laikų žinomas formules - atkarpos dalijimą pusiau.

NAMŲ DARBAS

Duoti du taškai $A(3; -2; 4)$ ir $B(6; 4; -2)$. Rasti tašką, kuriame atkarpa AB kerta xOy plokštumą.

§6. Dviejų vektorių skaliarinė sandauga

Tegu turime vektorinę erdvę V_n ir du vektorius $\vec{a}$, $\vec{b} \in V_n$, kur $\vec{a}\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ ir $\vec{b}\{b_1, b_2, ..., b_n\}$.; $|\vec{a}|$ – vektoriaus ilgis yra skaičiuojamas pagal sekančią formulę: $|\vec{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$.

Apibrėžimas : Dviejų vektorių $\vec{a}$, $\vec{b} \in V_n$ skaliarine sandauga vadinamas skaičius, lygus

(žymimas $(\vec{a},\vec{b})$ *arba* $\vec{a}\cdot\vec{b}$)

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi .$$

Čia φ - kampas tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, be to, imamas mažesnysis kampas (t.y. $0\le\varphi\le\pi$).

Savybės:

1.$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{b},\vec{a}\right)$ (komutatyvumas);

2.$(\vec{a},\vec{b}+\vec{c})=\left(\vec{a},\vec{b}\right)+\left(\vec{a},\vec{c}\right)$ (distributyvumas);

3.$\left(\lambda\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{a},\lambda\vec{b}\right)=\lambda\left(\vec{a},\vec{b}\right)$, čia λ - skaliaras;

4. $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0,\ \ jei\,\vec{a}=0\ \ arba\ \ \vec{b}=0,\ \ arba\,\varphi=90^\circ$.

5. $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|^2$.

$\{\vec{e}_i\}$ - standartinės bazės vektoriai (vienetinio ilgio ir kiekvienas sudaro statų kampą su likusiais vektoriais):

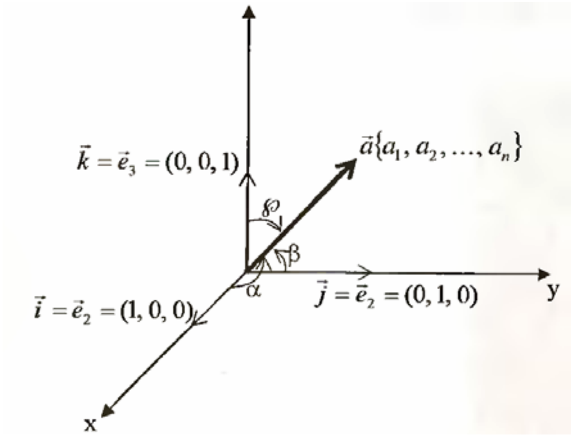
$$\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{n}\subset V_n;\quad \left(\vec{e}_i,\vec{e}_j\right)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, i=j,\\ 0, i\neq j.\end{cases}$$ δ_{ij} vadinamas Kronekerio simboliu.

Skaliarinė sandauga įgyja itin paprastą pavidalą, kai vektorinėje erdvėje V_n pasirenkame standartinę bazę $\{\vec{e}_i\}$. Išties, tegu turime du vektorius

$$\begin{aligned}\vec{a}&=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}+\ldots+a_n\vec{e_n}\\ \vec{b}&=b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2}+\ldots+b_n\vec{e_n}\end{aligned},$$

tuomet $$\boxed{\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i}$$

Pitagoro teoremos apibendrinimas trimatės erdvės atvejui.



$$\cos\alpha=\frac{(\vec{a},\vec{e_1})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{e_1}|}=\frac{(\vec{e},\vec{i})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{i}|}=\frac{a_1}{|\vec{a_1}|},$$

$$\cos\beta=\frac{a_2}{|\vec{a}|},$$

$$\cos\gamma=\frac{a_3}{|\vec{a}|},$$

$$\Rightarrow\boxed{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1}.$$

Paaiškinimas, ką reiškia žymėjimai: figūrinius skliaustus rašome prie vektoriaus koordinačių, pvz.: $\vec{a}\{a_1,a_2,a_3\}$;
paprastus skliaustus rašome prie taško koordinačių, pvz. : $M(a_1,a_2,a_3)$.

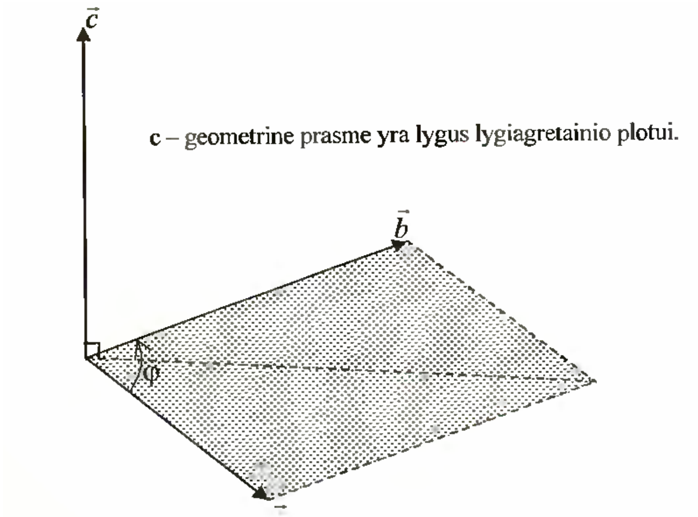
NAMŲ DARBAS

Įrodyti analogišką teoremą n-matėje vektorinėje erdvėje V_n . *Turime standartinę bazę* $\{\vec{e_i}\}_{i=1}^n$ **.**

Parodyti , kad $\sum_{i=1}^{n}\cos^2\alpha_i=1$

§7. Dviejų vektorių vektorinė sandauga

Apibrėžimas: Tegu $\vec{a},\vec{b}\in V_3$. Dviejų vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ vektorine sandauga vadinsime vektorių $\vec{c}$, kurio modulis c= $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$ (φ – kampas tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$). Vektorius $\vec{c}$ statmenas vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ plokštumai ir nukreiptas taip, kad, žiūrint iš jo galo į vektorius $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, vektorių $\vec{a}$ turime pasukti kampu φ prieš laikrodžio rodyklę, kad $\vec{a}$ sutaptų su $\vec{b}$.



Vektorius $\vec{c}$ žymimas keliais būdais $\vec{c} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{a} \times \vec{b}$.

Savybės :

1. $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = -\left[\vec{b}, \vec{a}\right]$ (antikomutatyvumas);

2. $\left[\lambda\vec{a}, \vec{b}\right] = \left[\vec{a}, \lambda\vec{b}\right] = \lambda\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$, čia λ - skaliaras;

3. $\left.\begin{array}{l} \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \\ \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \end{array}\right\}$ $\left(\textit{distributyvumas}\right)$;

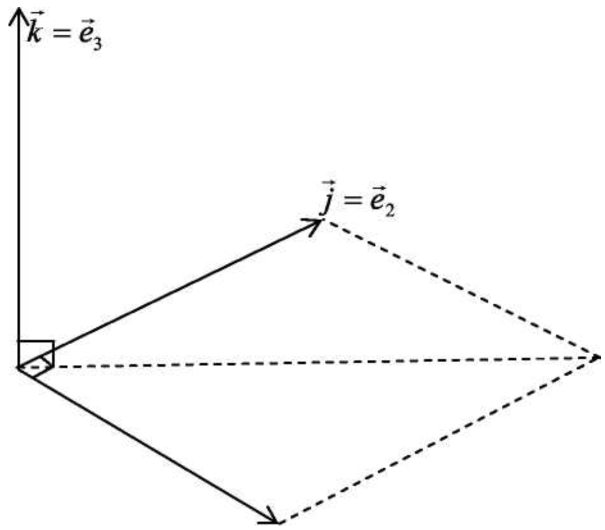
4. $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{a} \times \vec{b} = 0$, *jei* $\vec{a}$ *ir* $\vec{b}$ *kolinearūs arba bent vienas iš jų lygus 0.*

Pastaba : Skaliarinės ir vektorinės dalybos nėra (neegzistuoja atvirkštinė operacija dėl to, kad tiek skaliarinė, tiek ir vektorinė sandaugos yra nevienareikšmės).

Vektorinė sandauga koordinatinėj formoj.

Bazinių vektorių $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ *vektorinės sandaugos lentelė:*

x	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	0	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	0	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	0



Tegu $\begin{array}{l} \vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \\ \vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k} \end{array}$. Pasiremiant aukščiau nurodytomis savybėmis, lengva parodyti, kad

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Determinantą formaliai skleidžiame pagal vektorių eilutę:

$$\vec{i}\cdot M_{11} - \vec{j}\cdot M_{12} + \vec{k}\cdot M_{13} \quad \left(\quad čia \quad M_{11} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad ir\, t.t \right).$$

Iš kitos pusės skaičiuojame vektorinę sandaugą:

$$\left[a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}\,, \quad b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k} \right].$$

Po visų šitų veiksmų įsitikiname, kad vektorinę sandaugą išies formaliai galime skaičiuoti, skleisdami minėtą determinantą vektorių eilute.

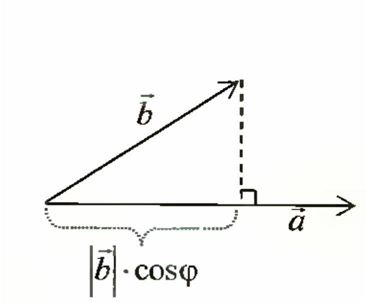
§8. Skaliarinės ir vektorinės sandaugos taikymas geometrijoje ir mechanikoje

I. Skaliarinės sandaugos dėka galime paskaičiuoti kampą tarp vektorių; patikrinti, ar jie ortogonalūs; rasti vieno vektoriaus projekciją į kitą.

Tegul turime du vektorius $\vec{a}, \vec{b} \in V_n$:

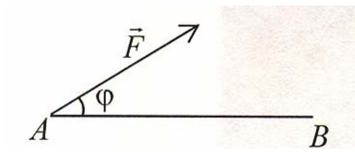
$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi .$$

Geometrine prasme $\left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi$ – tai vektoriaus $\vec{b}$ projekcija į vektorių $\vec{a}$.



Mechanikoje skaliarinė sandauga naudojama, kai skaičiuojamas pvz. darbas *A:*

$$A = (\vec{F}, \vec{S}) = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{S}\right| \cdot \cos\varphi$$



Čia $\vec{F}$ – jėga, veikianti kažkokį kūną kampu φ ir stumianti jį iš taško *A* į tašką *B;* $\vec{S} = \overrightarrow{AB}$.

NAMŲ DARBAS

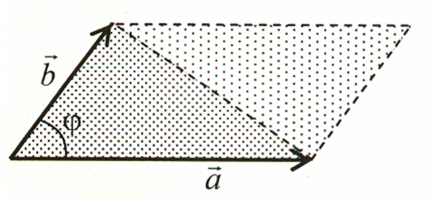
Duotos jėgos $\overrightarrow{F_1}\{3,-1,4\}\, ir\, \overrightarrow{F_2}\{5,3,-1\}$. Apskaičiuoti darbą A, kurį atlieka jėgų $\overrightarrow{F_1}$ ir $\overrightarrow{F_2}$ atstojamoji, perkeldama materialų tašką iš M_1 (3, 4, -1) į M_2 (5, -3, 2).

I I. Vektorinės sandaugos dėka galime paskaičiuoti kampą tarp vektorių; patikrinti, ar vektoriai kolinearūs; rasti lygiagretainio ir trikampio, kurių kraštinės yra vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, plotus.

Tegul turime du vektorius $\vec{a}, \vec{b} \in V_3$.

$$\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \sin\varphi = S .$$

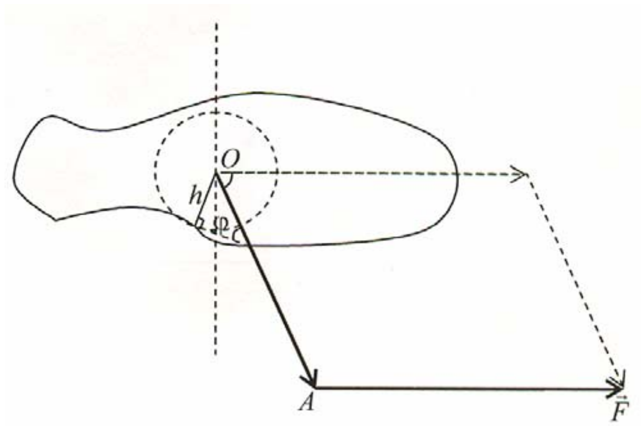
Geometrine prasme $|\vec{c}|$ – yra lygus lygiagretainio plotui;



$$Q=\frac{1}{2}\left\|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right\| \text{– trikampio plotas.}$$

Mechanikoje vektorinė sandauga naudojama pvz. jėgos momentui M paskaičiuoti. Jegos $\vec{F}$ momentas taško O atžvilgiu iš tiesų yra vektorius $\overrightarrow{M_0}=\overrightarrow{OA}\times\vec{F}=\left[\overrightarrow{OA},\vec{F}\right]$, taigi

$\left|\overrightarrow{M_0}\right|=\left|\vec{F}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\sin\varphi=F\cdot h,$ (čia $\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\sin\varphi=h$ – aukštinė arba mechanine prasme petys). Jėgos momentas yra vektorius, nukreiptas sukimosi ašies kryptimi, t.y. statmenai vektorių $\overrightarrow{OA}$ ir $\vec{F}$ plokštumai:



NAMŲ DARBAS

Duota: Kietas kūnas fiksuotas taške $A(2,3,5)$. Taške $B(0,3,7)$ kūną veikia jėga $\vec{F}\{2,-5,1\}$. Rasti jėgos $\vec{F}$ momentą taško A atžvilgiu $\overrightarrow{M_A}$, jo modulį $\left|\overrightarrow{M_A}\right|$ ir nubrėžti eskizą.

§9. Mišrioji trijų vektorių sandauga

Tarkime, turime tris vektorius $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V_3$

Apibrėžimas: Trijų vektorių $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V_3$ mišriąja sandauga vadinamas skaičius, lygus vektorinės sandaugos $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ ir vektoriaus $\vec{c}$ skaliarinei sandaugai, t.y.

$$\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\ \vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$$

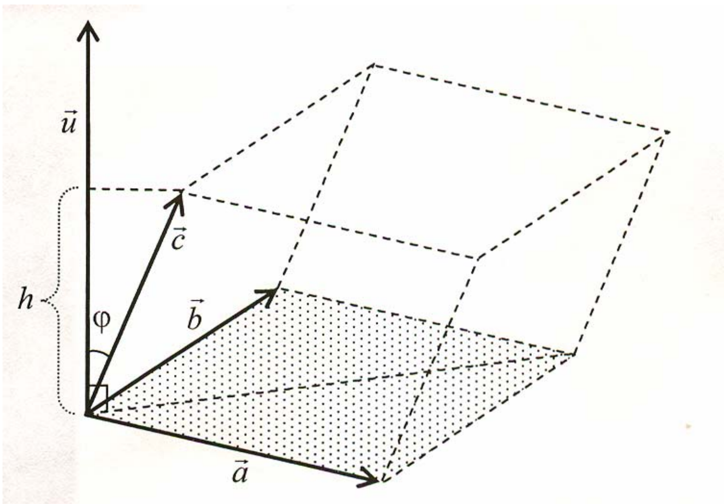
Mišriosios trijų vektorių sandaugos geometrinė prasmė:

Tegu $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V_3$ sudaro dešinį trejetą (tripletą). Tuomet $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{u}$ nukreiptas į tą pačią pusę kaip ir $\vec{c}$.

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{u},\vec{c}\right)=\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\cdot\cos\varphi=S\cdot h=V$$

(čia $\left|\vec{c}\right|\cdot\cos\varphi=h$ – gretasienio aukštinė, V – gretasienio tūris).

Jei $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ sudaro kairįjį tripletą (reperį), *h* yra neigiamas ir $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=-V$.



Mišriosios trijų vektorių sandaugos savybės:

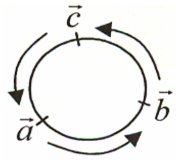
1. Mišrioji sandauga lygi nuliui, kai:
   a) visi vektoriai yra vienoje plokštumoje (t.y. komplanarūs);
   b) bent du vektoriai yra lygiagretūs (t.y. kolinearus);
   c) bent vienas iš vektorių yra lygus nuliui.

2. $\left(\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right)=\left(\left[\vec{b},\vec{c}\right],\vec{a}\right)$ arba $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}$ (leistina, nes skaliarinė sandauga komutatyvi);

3. $\left(\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right)=\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)$ arba $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ skaliarinę ir vektorinę sandaugas galime keisti vietomis;

4. a) $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right)=\left(\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right)$, t.y. jei vektorius keičiam vietomis cikliškai (pagal schemą prieš laikrodžio rodyklę), tai mišrioji sandauga nesikeičia (nekinta trejeto orientacija).

b) jei, keičiant vietomis, pažeistas cikliškumas, keičiasi mišriosios sandaugos ženklas:



$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=-\left(\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right)=-\left(\vec{c},\vec{b},\vec{a}\right)=-\left(\vec{a},\vec{c},\vec{b}\right).$$

Koordinatinė mišriosios sandaugos forma.

Kaip skaičiuojama mišrioji sandauga, kai žinome vektorių $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ koordinates? Tegu

$$\begin{aligned}\vec{a}&=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}\\ \vec{b}&=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}\\ \vec{c}&=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}\end{aligned}.$$

Mes jau žinome, kad

$$\left[\vec{b},\vec{c}\right]=\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ b_1&b_2&b_3\\ c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}.$$

Tuomet

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}\right)\cdot\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ b_1&b_2&b_3\\ c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}\overset{pagal\ det\ savybes}{=}\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\ b_1&b_2&b_3\\ c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}.$$

Pastaba: Mišriosios sandaugos išraiška per determinantą leidžia lengviau patikrinti eilę savybių, kurias tikrinti kitais būdais žymiai sudėtingiau (pasinaudojame jau žinomomis determinanto savybėmis) .

NAMŲ DARBAS

1. Paskaičiuoti bazinių vektorių mišriąją sandaugą, keičiant vietomis vektorius cikliškai ir ne cikliškai:

$$\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right).$$

2. Duoti keturi taškai A$(2, 1, 0)$, B$(1, -2, 1)$, C$(-2, -1, 1)$, D$(5, 0, 0)$. Patikrinti, ar šie taškai

yra vienoje plokštumoje.

III skyrius

Analizinės geometrija

§1. Tiesė plokštumoje

1.1. Kryptinė tiesės lygtis

Imkime tiesę t, nelygiagrečią koordinatėms ašims. Tiesės padėtis bus nustatyta, jei žinosime kampą φ, kurį tiesė sudaro su teigiamąja x ašies kryptimi, ir tašką N(0,n), kuriame tiesė t kerta y ašį. Kampą φ atskaitysime nuo teigiamosios x ašies krypties prieš laikrodžio rodyklę, todėl $0 < \varphi < \pi$ ir $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$. Kampo φ tangentas

$$tg\varphi = m$$

vadinamas tiesės t krypties koeficientu.

Tiesės t lygčiai išvesti imsime bet kurį jos tašką $M(x, y)$, nesutampantį su N, iš jo nuleisime statmenį MP į x ašį ir nubrėšime atkarpą NC, lygiagrečią x ašiai. Tada

$$y = PM = CM + PC.$$

Iš stačiojo trikampio CMN, kurio kampas $MNC = \varphi$ gauname, kad

$$CM = NCtg\varphi = xtg\varphi = mx .$$

Be to,

$$PC = ON = n .$$

Todėl

$$\boxed{y = mx + n} . \qquad (1)$$

Tą lygtį tenkina kiekvieno taško, esančio tiesėje, koordinatės (taip pat ir taško N koordinatės).

Lengva įsitikinti, kad taško, nesančio tiesėje, koordinatės negali tenkinti lygties. Vadinasi, (1) ir yra tiesės t lygtis; ją vadinsime kryptine tiesės lygtimi.

Jei tiesė eina per koordinačių pradžią, tai $n = 0$; todėl tiesės lygtis šiuo atveju bus

$$y = mx .$$

1.2. Bendroji tiesės lygtis

Turėdami lygtį

$$y = mx + n ,$$

įsitikinome, kad ši lygtis apibrėžia tiesę, einančią per tašką (0 , n) ir turinčią krypties koeficientą m. Lygtys $x = k$ ir $y = l$ apibrėžia tieses, lygiagrečias y ir x ašims atitinkamai.

Jei turime lygtį

$$ax + by + c = 0 , \qquad (2)$$

kurioje abu koeficientai a ir b kartu nėra lygūs nuliui, tai, padalinę šią lygtį iš $b \neq 0$, gauname

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Ši lygtis ekvivalenti (2) lygčiai, t.y. jas abi tenkina tie patys taškai. Pastroji lygtis apibrėžia tiesę, nes tai kryptinė tiesės lygtis $y = mx + n$, kurioje $m = -\frac{a}{b}, n = -\frac{c}{b}$, vadinasi, (2) lygtis irgi apibrėžia tiesę. Tokiu būdu lygtis

$$\boxed{ax + by + x = 0 \quad \left(kur \quad a \neq 0 \quad arba \quad b \neq 0\right)}$$

yra tiesės lygtis, kurią ir vadinsime bendrąja tiesės lygtimi plokštumoje.

1.3. Tiesės, einančios per duotą tašką duotąja kryptimi, lygtis

Imkime tiesę t, kuri su teigiamąja x ašimi sudaro kampą φ ir eina per tašką $A(x_1, y_1)$. Išvesime tos tiesės lygtį prileisdami, kad tiesė t nėra lygiagreti y ašiai.

Tokiu atveju tiesės lygtis yra

$$y = mx + n. \tag{3}$$

Čia $m = tg\varphi$ - žinomas tiesės krypties koeficientas. Kadangi taškas $A(x_1, y_1)$ yra tiesėje t, tai jo koordinatės turi tenkinti (3) lygtį, t.y.

$$y_1 = mx_1 + n.$$

Iš (3) lygybės, panariui atėmę paskutinę, gauname

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1).} \qquad (4)\,z$$

Tai ir yra ieškomoji lygtis.

Jeigu tiesė, eina per tašką $A(x_1, y_1)$ ir yra lygiagreti y ašiai, tai jos lygtis, aišku, bus

$$x = x_1.$$

1.4. Tiesės, einančios per du duotus taškus, lygtis

Per du skirtingus taškus galima nubrėžti tiesę ir tiktai vieną. Rasime tiesės t, einančios per taškus $A(x_1, y_1)$ ir $B(x_2, y_2)$, lygtį.

Iš pradžių tarkime, kad $x \neq x_1$, t.y. kad tiesė nelygiagreti y ašiai. Kadangi tiesė t eina per tašką

$A(x_1, y_1)$, tai jos lygtis bus

$$y - y_1 = m(x - x_1); \tag{5}$$

čia m – nežinomas tos tiesės krypties koeficientas. Tačiau taškas $B(x_2, y_2)$, irgi yra tiesėje t, todėl jo koordinatės tenkina (5) lygtį :

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1).$$

Iš čia randame m (turim omeny, kad $x_2 - x_1 \neq 0$):

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Įstatę surastąją m išraišką į (5) lygtį, gauname

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\left(x - x_1\right). \tag{6}$$

Tai ir yra ieškomoji tiesės t lygtis. Jeigu $y_1 \neq y_2$, (6) lygtį galime užrašyti taip, kad lengviau būtų prisiminti:

$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}\ . \tag{7}$$

Kai $x_1 = x_2$, tiesė, nubrėžta per taškus $A(x_1, y_1)$ ir $B(x_2, y_2)$, lygiagreti y ašiai, o jos lygtis, aišku, bus

$$x = x_1.$$

Pavyzdys: Rasime lygtį tiesės, einančios per taškus $A(-2,-3)$ ir $B(1,3)$. Remdamiesi (7) lygtimi, rašome

$$\frac{y+3}{3+3} = \frac{x+2}{1+2}.$$

Iš čia

$$2x - y + 1 = 0.$$

1.4. Ašinė tiesės lygtis

Tarkime, kad tiesė t, neinanti per koordinačių pradžią kerta abi koordinatines ašis. Tiesės padėtis bus nustatyta, kai žinomi taškai $A(a,0)$ ir $B(0,b)$, kuriuose ši tiesė kerta koordinačių ašis. Pasinaudojus (7) lygtimi, nesunku parašyti minimos tiesės lygtį:

$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a};$$

iš čia

$$\frac{y}{b}=-\frac{x}{a}+1$$

ir galutinai

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1}.$$

Gautoji lygtis vadinama ašine tiesės lygtimi; joje parodyti atkarpų, kurias tiesė atkerta koordinatinėse ašyse, ilgiai $OA=|a|$ ir $OB=|b|$.

1.6. Normalinė tiesės lygtis

Tiesės t padėtį nusakysime jos atstumu $p>0$ nuo koordinačių pradžios bei normalės vektoriaus $\vec{n}$ ortu $\vec{n}_0=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$. Bet koks vektorius $\vec{n}$, statmenas tiesei t, vadinamas normaliniu vektorium (normale); α - kampas, kurį normalė $\vec{n}$ sudaro su Ox ašimi. Kintamąjį tiesės t tašką pažymėkime M(x,y). Tegu $\overrightarrow{OM}$ - taško M spindulys-vektorius. Tuomet

$$pr_{\vec{n}_0}\vec{r}=p>0,$$

kadangi kampas φ tarp vektorių $\vec{n}$ ir $\vec{r}$ neviršija $\pi/2$. Iš kitos pusės

$$pr_{\vec{n}_0}\vec{r}=|\vec{r}|\cos\varphi=\frac{(\vec{r},\vec{n}_0)}{|\vec{n}_0|}=(\vec{r},\vec{n}_0),\quad nes\quad |\vec{n}_0|=1.$$

Iš čia gauname normalinę tiesės t lygtį vektorinėj formoj:

$$(\vec{r},\vec{n}_0)=p.$$

Arba pakoordinačiui:

$$\boxed{x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0}.$$

1.7. Tiesės bendrosios lygties suvedimas į normalinį pavidalą

Kadangi kiekvieną plokštumos tiesę galima užrašyti normaline lygtimi

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0, \tag{8}$$

tai kyla klausimas, iš kokio daugiklio reikia padauginti bendrąją lygtį

$$ax + by + c = 0,$$

aprašančią tą pačią tiesę, kad gautume (8). Jei toks daugiklis yra M, tai lygties

$$Max + Mby + Mc = 0$$

koeficientai sutampa su atitinkamais (8) lygties koeficientais:

$$Ma = \cos\alpha, \qquad Mb = \sin\alpha, \qquad Mc = -p.$$

Pirmųjų dviejų lygybių abi puses pakėlę kvadratu ir sudėję, gauname

$$M^2(a^2 + b^2) = 1.$$

Iš čia, žinodami, kad $a^2 + b^2 \neq 0$ (bent vienas iš skaičių a ir b nelygus nuliui), randame taip vadinamą normuojantį daugiklį M :

$$M = \frac{1}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Kaip matome, šioje lygybėje M ženklas liko nenustatytas. Tačiau iš lygybės $MC = -p$, kurioje $p > 0$, matome, kad $MC < 0$, kai $c \neq 0$, todėl M ženklą reikia imti priešingą c ženklui.

Kai $c = 0$, M ženklas lieka nenustatytas: tiesė eina per koordinačių pradžią ir p=0, nes $\varphi = \pi / 2$.

1.8. Taško atstumas iki tiesės

Imkime tiesę t, užduotą normaline lygtimi

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0, \tag{9}$$

ir tašką $M_0(x_0, y_0)$, esantį šalia jos. Pradžioje tegu šis taškas ir koordinačių pradžios taškas O yra skirtingose tiesės t pusėse. Rasime taško M_0 atstumą h iki tiesės t. Tegu $M_1(x_1, y_1)$ - bet kuris tiesės t taškas, $\vec{r} = \overrightarrow{M_1M_2}$, tuomet

$$h = pr_{\vec{n}_0}\vec{r} = (\vec{r}, \vec{n}_0) = (x_0 - x_1)\cos\alpha + (y_0 - y_1)\sin\alpha =$$

$$= x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - (x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha) = x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p,$$

kur $p = x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha$, nes taškas $M_1 \in t$, t.y. jo koodinatės tenkina (9) lygtį. Jei taškas M_1 ir O yra toje pačioje tiesės t pusėje, tada h < 0, nes $\pi / 2 \leq \varphi \leq \pi$ (φ - kampas tarp vektorių $\vec{r}$ *ir* $\vec{n}_0$).

Iš čia

$$\boxed{h = | x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p |},$$

t.y. taško atstumą nuo tiesės gauname, į tiesės normalinės lygties kairės pusės reiškinį

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p$$

įstatę to taško koordinates.

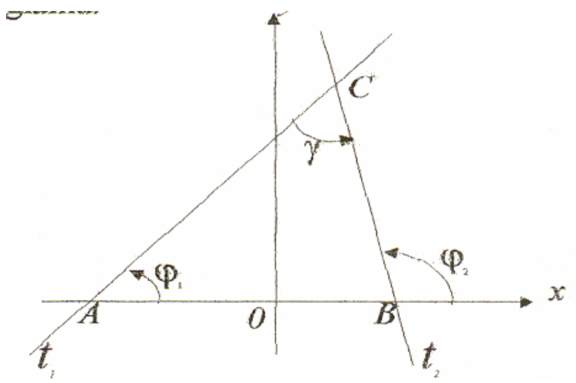
1.9. Kampas tarp dviejų tiesių. Tiesių lygiagretumas ir statmenumas

Imkime dvi tieses t_1 ir t_2, susikertančias taške C. Smailų kampą γ, kuriuo reikia sukti tiesę t_1 apie tašką C, kad sutaptų su tiese t_2, vadinsime kampu tarp tų tiesių. Šis kampas laikomas teigiamu, kai nurodytas sukimas vyksta prieš laikrodžio rodyklę; priešingu atveju kampas γ laikomas neigiamu.

Tarkime, kad tiesės t_1 ir t_2 duotos lygtimis

$$y = m_1 x + n_1 \text{ ir } y = m_2 x + n_2 .$$

Rasime kampą γ.



Brėžinyje nurodytu atveju kampas φ_2, yra trikampio ABC priekampis, todėl

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \gamma$$

Vadinasi $\gamma = \varphi_2 - \varphi_1$, o $tg\gamma = tg(\varphi_2 - \varphi_1)$. Galima įsitikinti, kad paskutinė lygybė tinka ir kitais atvejais. Iš jos gauname

$$tg\gamma = \frac{tg\varphi_2 - tg\varphi_1}{1 + tg\varphi_1 \cdot tg\varphi_2}.$$

Nors kampai φ_1 ir φ_2 sąlygoje neduoti, bet iš duotųjų lygčių žinome $tg\varphi_1 = m_1$ ir $tg\varphi_2 = m_2$.

Todėl galutinai

$$tg\gamma = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}. \tag{10}$$

Jei tiesės t_1 ir t_2 yra lygiagrečios, tai $\varphi_1 = \varphi_2$. Vadinasi, šiuo atveju

$$tg\varphi_1 = tg\varphi_2$$

arba

$$m_1 = m_2 .$$

Atvirkščiai, jei $m_1 = m_2$, arba $tg\varphi_1 = tg\varphi_2$, tai, turėdami omeny, kad φ_1 ir φ_2 yra tarp 0 ir π, gauname $\varphi_1 = \varphi_2$. Vadinasi, tiesės t_1 ir t_2 yra lygiagrečios.

Taigi įrodėme, kad tiesės yra lygiagrečios tada ir tik tada, kai jų krypties kooficientai yra lygūs.

Jei t_1 ir t_2 yra statmenos, tai

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2} \text{ arba } \varphi_1 = \varphi_2 + \frac{\pi}{2};$$

abiem atvejais
$$tg\varphi_2 = -ctg\varphi_1 = -\frac{1}{tg\varphi_1};$$

arba
$$m_2 = -\frac{1}{m_1} . \tag{11}$$

Lengva įsitikinti ir atvirkščiai: kai patenkinta pastaroji sąlyga, tai tiesės t_1 ir t_2 yra statmenos.

Vadinasi, dvi tiesės yra statmenos viena kitai tada ir tik tada, kai jų krypties koeoficientai yra vienas kitam atvirkštiniai ir priešingų ženklų skaičiai.

Dabar tarkime, kad tiesės t_1 ir t_2 duotos bendrosiomis lygtimis

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ ir } a_2x + b_2y + c_2 = 0 .$$

Kai b_1 ir b_2 nelygūs nuliui, tų tiesių krypties koeficientai bus tokie:

$$m_1 = -\frac{a_1}{b_1},\ m_2 = -\frac{a_2}{b_2}$$

Šias m_1 ir m_2 išraiškas įstatę į (10) formulę, gauname

$$tg\gamma = \frac{-\frac{a_2}{b_2} + \frac{a_1}{b_1}}{1 + \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2}}$$

arba

$$tg\gamma = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 a_2 - b_1 b_2}.$$

Duotos tiesės bus lygiagrečios, kai $m_1 = m_2$, t.y.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}.$$

Vadinasi, tiesės, duotos bendromis lygtimis, bus lygiagrečios tada ir tik tada, kai lygčių koeficientai prie kintamųjų x ir y proporcingi.

Tiesių, duotų bendromis lygtimis, statmenumo sąlyga gaunama iš (13) lygybės, imant $m_1 = -\frac{a_1}{b_1}$, $m_2 = -\frac{a_2}{b_2}$. Tada

$$a_1 a_2 - b_1 b_2 = 0.$$

Pavyzdys: Parašysime lygtį tiesės, einančios per tašką $(1,2)$ ir lygiagrečios tiesei

$$2x - 3y + 3 = 0.$$

Ieškomoji lygtis bus šitokia:

$$2x - 3y + c = 0.$$

Kadangi taškas $(1,2)$ yra šioje tiesėje, tai

$$2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + c = 0.$$

Iš čia $c = 4$. Vadinasi, ieškomoji lygtis yra

$$2x - 3y + 4 = 0.$$

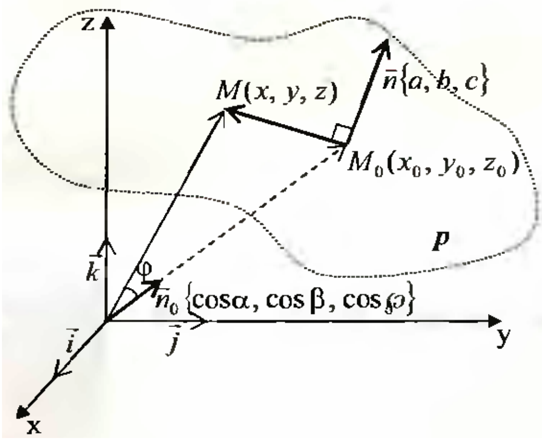
§2. Plokštuma erdvėje

2.1. Bendroji plokštumos lygtis

Tegu $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$. Pasirenkame bet kokį tašką $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ir per tą tašką išvedame plokštumą ***p*** statmenai vektoriui $\vec{n}$. Pasirenkame kitą tašką $M(x, y, z)$ plokštumoje ***p***:

$$\overrightarrow{M_0 M} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k};$$

$\vec{n}$ - vadinamas normaliniu vektorium plokštumai ***p*** $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{M_0 M} \perp \vec{n}$.



$$\Rightarrow \qquad \left(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}\right) = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

$$ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0.$$

Tegu $\quad - ax_0 - by_0 - cz_0 \overset{pažymime}{=} d$, tuomet

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0}\,.$$

Tai bendroji plokštumos lygtis koordinatinėj formoj.

$$\boxed{(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}) = 0}.$$

Pastaroji lygtis vadinama bendrąją plokštumos lygtimi vektorinėje formoje.

2.1. Normalinė plokštumos lygtis

Tegu $\overrightarrow{n_0} = \dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \vec{i} \cdot \cos\alpha + \vec{j} \cdot \cos\beta + \vec{k} \cdot \cos\wp$, $\quad |\vec{n}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Vektorius $\overrightarrow{n_0}$ - vadinamas normuotu normaliniu vektorium (normaliniu ortu).

Imame $\left(\overrightarrow{OM}, \vec{n}_0\right)$ -skaliarinę sandaugą, kuri lygi vektoriaus $\overrightarrow{OM}$ projekcijai į normalę $\vec{n}_0$,
$\vec{n}_0\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, $\quad \overrightarrow{OM}\{x, y, z\}$.

$$\left(\overrightarrow{OM}, \vec{n}_0\right) = p = x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma\,.$$

Iš čia gauname plokštumos ***p*** normalinę lygtį:

$$\boxed{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0, \quad (p > 0)}\,.$$

Lygtys

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{ir}$$

$$x\cdot\cos\alpha + y\cdot\cos\beta + z\cdot\cos\gamma - p = 0$$

yra ekvivalenčios, t.y. tie patys taškai tenkina abi lygtis (šiuo atveju plokštumos ***p*** taškai). Kaip ir tiesės atveju bendrąją plokštumos lygtį suvesime į normalinę lygtį, daugindami iš normuojančio daugiklio M. Tuomet

$$Ma = \cos\alpha, \qquad Mb = \cos\beta, \qquad Mc = \cos\gamma,$$

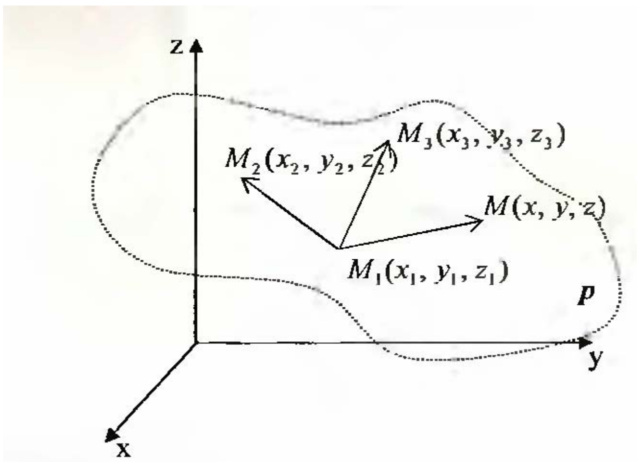
$$M^2(a^2 + b^2 + c^2) = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

$$M^2 = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}, \qquad M = \pm\frac{1}{|\vec{n}|}.$$

$Md = -p < 0$ ir M ženklą renkamės pagal d: kai d<0, tai pasirenkame M>0; kai d>0, tai M<0.

2.3. Plokštumos, einančios per tris duotus taškus, lygtis

Trys taškai pilnai apibrėžia plokštumą. Tegu $M(x, y, z)$ bet kuris plokštumos ***p*** taškas, o taškai M_1, M_2, M_3 fiksuoti plokštumoje ***p***.



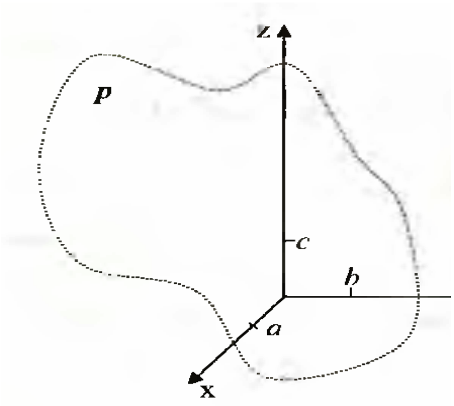
Tuomet mišrioji sandauga

$$(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}) = \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Tai ir yra ieškomoji lygtis.

NAMŲ DARBAS

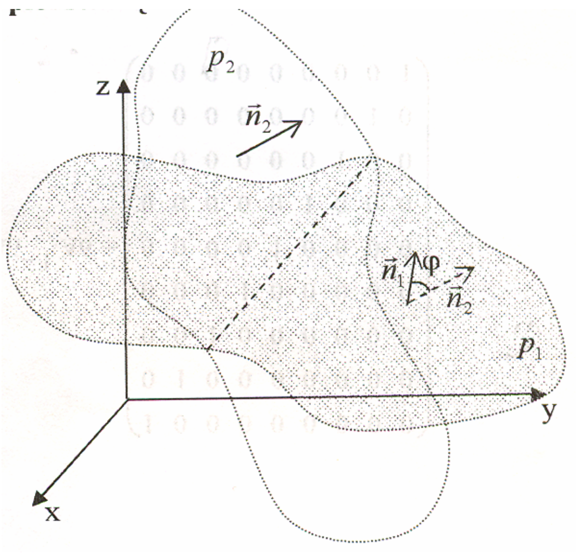
Išvesti ašinę plokštumos ***p*** lygtį: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.



2.4. Kampas tarp plokštumų

Tegu $\overrightarrow{n_1}$, $\vec{n}_2$ -normaliniai vektoriai plokštumoms p_1 *ir* p_2. Kampas tarp plokštumų yra lygus kampui φ tarp normalės vektorių. Tegu

$$p_1: \; a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0, \quad p_2: \; a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 .$$



$$\cos\varphi = \frac{\left(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right)}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right|}; \quad \text{tegu} \quad \overrightarrow{n_1} = (a_1, b_1, c_1), \ \ \overrightarrow{n_2} = (a_2, b_2, c_2).$$

Tada
$$\boxed{\cos\varphi = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right|}}.$$

Kada plokštumos yra lygiagrečios? Kai plokštumų p_1 ir p_2 normaliniai vektoriai $\vec{n}_1$ ir $\overrightarrow{n_2}$ kolinearūs, t.y

$$\overrightarrow{n_1} = \lambda \overrightarrow{n_2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_1 = \lambda a_2 \\ b_1 = \lambda b_2 \\ c_1 = \lambda c_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

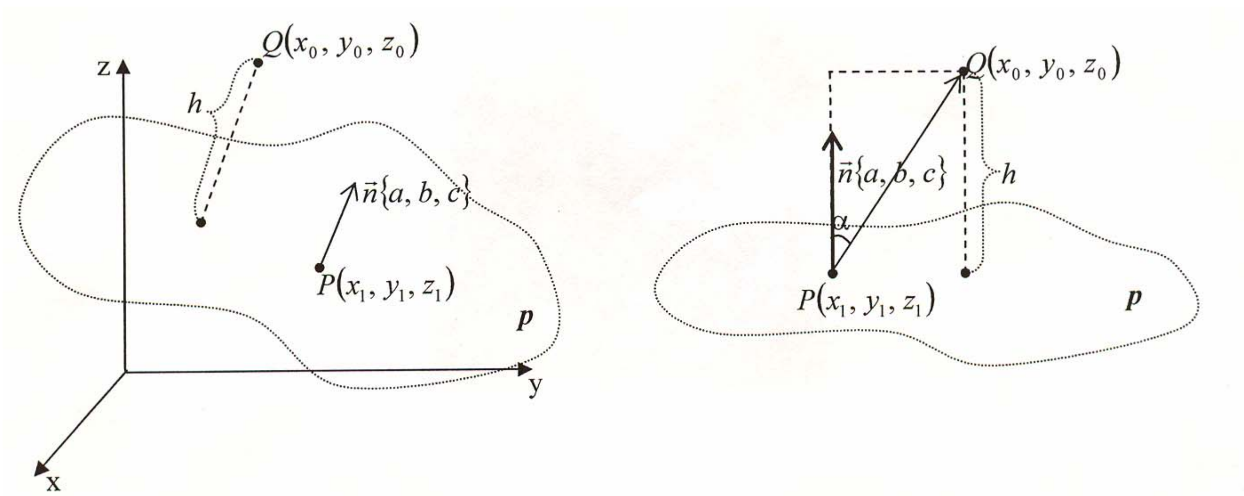
Jei ir $\frac{d_1}{d_2} = \lambda$, tai plokštumos sutampa.

Kada plokštumos statmenos? Kai $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \ \Rightarrow \ (\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0 \ \Leftrightarrow \ a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$.

NAMŲ DARBAS

Duota: $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0. \end{cases}$ Koks lygčių sistemos rangas, kai $\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2$, $\frac{d_1}{d_2} = \lambda$?

2.5. Taško atstumas iki plokštumos



Tegu plokštumos $\boldsymbol{p}$ lygtis $ax+by+cz+d=0$ ir tegu taškas $Q(x_0,y_0,z_0)$ yra šalia plokštumos $\boldsymbol{p}$. Imkime bet kurį tašką $P(x_1,y_1,z_1)$ plokštumoje $\boldsymbol{p}$ ir išveskime jame normalę $\vec{n}\{a,b,c\}$ plokštumai $\boldsymbol{p}$. h lygi $\overrightarrow{PQ}$ projekcijai į normalės vektorių $\vec{n}$, t.y.

$$h=\left|pr\overrightarrow{PQ}\right|=\left|\overrightarrow{PQ}\right|\cdot\left|\cos\alpha\right|, \qquad \left|\cos\alpha\right|=\frac{\left|\overrightarrow{PQ},\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{PQ}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|} \quad\Rightarrow\quad \boxed{h=\frac{\left|\left(\overrightarrow{PQ},\vec{n}\right)\right|}{\left|\vec{n}\right|}}.$$

Arba koordinatiniame pavidale:

$$h=\frac{\left|\left(\overrightarrow{PQ},\vec{n}\right)\right|}{\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)+c(z_0-z_1)\right|}{\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|ax_0+by_0+cz_0-\left(ax_1+by_1+cz_1\right)\right|}{\left|\vec{n}\right|},$$

bet taškas P priklauso plokštumai $\boldsymbol{p}$, t.y. $ax_1+by_1+cz_1=-d$,

taigi

$$\boxed{h=\frac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\left|\vec{n}\right|}}.$$

Jei plokštuma uždota normaline lygtimi, tuomet:

$$\frac{a}{\left|\vec{n}\right|}=\cos\alpha\,; \qquad \frac{b}{\left|\vec{n}\right|}=\cos\beta\,; \qquad \frac{c}{\left|\vec{n}\right|}=\cos\wp\,; \qquad \frac{1}{\left|\vec{n}\right|}=M$$

ir

$$\boxed{h=\left|x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\wp-p\right|}.$$

Čia $-p=Md$

§ 3. Tiesė erdvėje

3.1. Įvairios tiesės lygtys

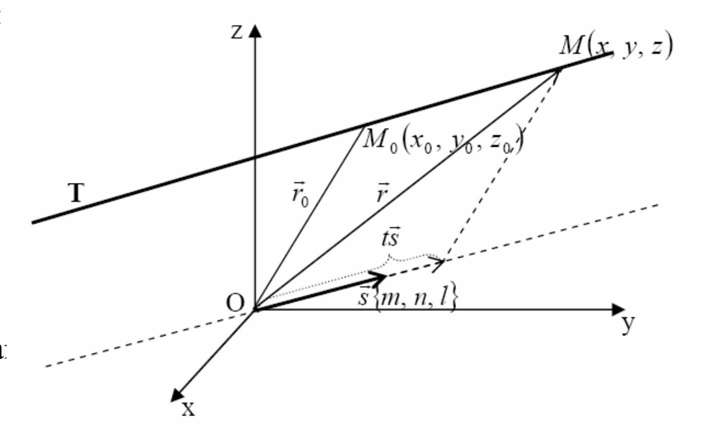
Tiesę erdvėje pilnai apibrėžia taškas $M_0(x_0,y_0,z_0)$ ir pasirinkta kryptis $\vec{s}=(m,n,l)$: per tašką M_0 lygiagrečiai vektoriui $\vec{s}$ išveskime tiesę T. Tegu $M(x,y,z)$ - bet kuris tiesės T taškas. Įveskime pažymėjimus:

$$\vec{r}_0=\overrightarrow{OM_0}\,; \qquad \vec{r}=\overrightarrow{OM}=\vec{r}_0+t\vec{s}\,.$$

Čia $t\in R^1$ vadinamas parametru; $\vec{s}$ - tiesės krypties vektorium, $\vec{s}=(m,n,l)$ lygiagretus tiesei T. Tiesės T lygties vektorinis – parametrinis pavidalas:

$$\mathbf{T}: \qquad \vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{s}\,,\ t\in R^1\,.$$

Tiesės **T** koordinatinė - parametrinė lygtis:



$$\mathbf{T}: \quad \begin{cases} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + tn, \\ z = z_0 + tl. \end{cases}$$

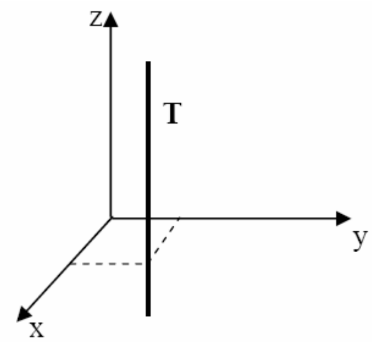
Elinimavę parametrą t šiose lygtyse, gauna[me]
kanoninę lygtį :

$$t = \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{l}$$

Čia $|m| + |n| + |l| \neq 0$

Pvz.: kai $\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{l}$, tiesė eina

lygiagrečiai Oz ašiai per tašką $M(x_0, y_0, 0)$:



NAMŲ DARBAS

Kaip atrodys tiesė, kai $l = 0$, o $m, n \neq 0$? Nubrėžti tiesės T eskizą.

------- ∘ -------

Tegu turime kanoninę tiesės lygtį:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{l},$$

Padalyję vardiklius iš krypties vektoriaus $\vec{s}$ ilgio $|\vec{s}| = \sqrt{m^2 + n^2 + l^2}$, gauname:

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\cos\beta} = \frac{z - z_0}{\cos\wp}.$$

Ją vadinsime tiesės normaline lygtimi (čia $\alpha, \beta, \wp$ - kampai tarp tiesės T (arba krypties vektoriaus $\vec{s}$) ir ašių Ox,Oy,Oz atitinkamai).

3.2. Bendroji tiesės lygtis

Bendroji tiesės lygtis erdvėje apibrėžiama kaip dviejų plokštumų p_1 ir p_2 susikirtimo linija, t.y. $\vec{n}_1 \neq \lambda \vec{n}_2$, ($\vec{n}_1$ ir $\vec{n}_2$ nekolinearūs).

$$\begin{matrix} p_1: \\ p_2: \end{matrix} \quad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases}$$

Tuomet lygčių sistemos koeficientų matricos $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$ rangas $r(A) = 2$ ir sistema turi be galo daug sprendinių.

<u>NAMŲ DARBAS</u>

Duota lygčių sistema
$$\begin{matrix} p_1: \\ p_2: \end{matrix} \quad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases}$$

Jos rangas $r = r(A) = r(A/B) = 2$. Kaip gauti kanoninę tiesės lygtį? Kaip aprašyti tiesės krypties vektorių $\vec{s}$? $T = p_1 \cap p_2 \neq 0$ ($\cap$ - pjūvis).

Paaiškinimas: tegu x, y - baziniai nežinomieji, z - laisvas nežinomasis. Fiksuojam bet kokią reikšmę $z = z_0$, tuomet vienareikšmiškai surandame x_0, y_0 tokius, kad taškas $M(x_0, y_0, z_0) \in T$. Kadangi $\vec{n}_1$ nekolinearus $\vec{n}_2$, tai $\vec{n_1} \times \vec{n_2} = \vec{s} \neq \vec{0}$ yra tiesės T krypties vektorius,

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Lieka į kanoninę tiesės T lygtį surašyti duomenis.

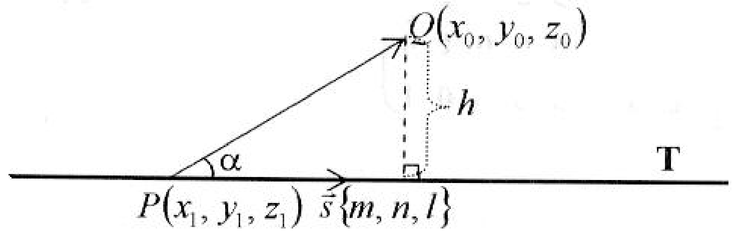
3.3. Atstumas nuo taško iki tiesės erdvėje

Tegu taškas $Q(x_0, y_0, z_0)$ yra šalia tiesės T ir tegu $P(x_1, y_1, z_1)$ - bet kuris tiesės T taškas.

Tada $h = \left|\overrightarrow{PQ}\right| \cdot \sin\alpha$,

$$\sin\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{PQ} \times \vec{s}\right|}{\left|\overrightarrow{PQ}\right| \cdot \left|\vec{s}\right|},$$

$$\Rightarrow \boxed{h = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{s}\,|}{\left|\vec{s}\right|}}.$$



Taigi, norint rasti atstumą nuo taško Q iki tiesės T, reikia surasti bent vieną tašką P, priklausantį tiesei T.

3.4. Tiesės, einančios per du duotuosius taškus, lygtis

Duoti du tiesės taškai $A(x_1, y_1, z_1)$ ir $B(x_2, y_2, z_2)$. Reikia užrašyti tos tiesės lygtį. Šiuo atveju tiesės krypties vektoriumi imame vektorių, kurio koordinates randame taip:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} .$$

Vadinasi, turime duotos tiesės krypties vektorių $\vec{s} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Žinodami tašką $A(x_1, y_1, z_1)$, per kurį eina tiesė, ir tos tiesės krypties vektorių, galime užrašyti jos lygti, remdamiesi kanonine lygtimi:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

3.5. Kampas tarp tiesių. Statmenumo ir lygiagretumo sąlygos

Duotos tiesių T_1 ir T_2 kanoninės lygtys:

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{l_1} \quad \text{ir} \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{l_2}.$$

Kampu tarp šių tiesių vadinsime kampą φ, kurį sudaro tų tiesių krypčių vektoriai $s_1 = m_1 i + n_1 j + l_1 k$ ir $s_2 = m_2 i + n_2 j + l_2 k$. Vadinasi kampo tarp jų kosinusas :

$$\cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + l_1 l_2}{|s_1| \cdot |s_2|}.$$

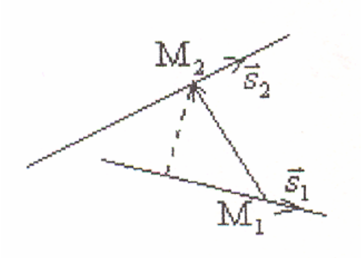
Čia $s_1 = \sqrt{m_1^2 + n_1^2 + l_1^2}, s_2 = \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + l_2^2}$.

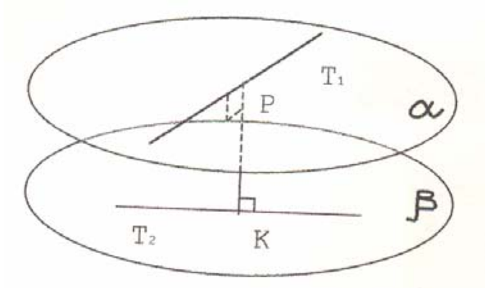
Jei tiesės statmenos, tai $\vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$ ir $(\vec{s}_1, \vec{s}_2) = 0$, arba $m_1 m_2 + n_1 n_2 + l_1 l_2 = 0$.

Jei tiesės T_1 ir T_2 lygiagrečios, vektoriai s_1 ir s_2 yra kolinearūs ir jų koordinatinės proporcingos: $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{l_1}{l_2}$.

3.6. Atstumas tarp dviejų prasilenkiančių tiesių

Duotos dvi prasilenkiančios (nesikerta ir nelygiagrečios) tiesės T_1 *ir* T_2





$$T_1:\ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{l_1}\ ; \qquad T_2:\ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{l_2}\ .$$

Reikia rasti trumpiausią atstumą h tarp šių tiesių. Jeigu tiesės prasilenkia (nesikerta ir nėra lygiagrečios), t.y. jos nėra vienoje plokštumoje, tuomet vektoriai

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1),\ \vec{s_1}=(m_1,n_1,l_1),\ \vec{s_2}=(m_2,n_2,l_2)\ \text{nekomplanarūs.}$$

Vektorius $\vec{n}=\left[\vec{s_1},\vec{s_2}\right]$ yra statmenas abiem tiesėms. Kadangi taškas $M_1(x_1,y_1,z_1)$ yra pirmoje tiesėje, o $M_2(x_2,y_2,z_2)$ - antroje, tai vektoriaus $\overrightarrow{M_1M_2}$ projekcija į vektorių $\vec{n}$ ir yra mūsų ieškomas trumpiausias atstumas tarp dviejų tiesių:

$$\boxed{h=\left|\Pr_{\vec{n}}\overrightarrow{M_1M_2}\right|=\frac{\left|(\overrightarrow{M_1M_2},\vec{n})\right|}{\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left(\overrightarrow{M_1M_2},\vec{s}_1,\vec{s}_2\right)}{\left|\left[\vec{s}_1,\vec{s}_2\right]\right|}}.$$

Čia išraiškos skaityklyje vektorių mišri sandauga

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & l_1 \\ m_2 & n_2 & l_2 \end{vmatrix}\neq 0,$$

nes vektoriai nekomplanarūs; vardiklyje – vektorinė sandauga :

$$\left[\vec{s}_1,\vec{s}_2\right]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ m_1 & n_1 & l_1 \\ m_2 & n_2 & l_2 \end{vmatrix}.$$

3.7. Tiesės ir plokštumos bendrieji taškai

Tegul duota tiesė, kurios kanoninė lygtis:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{l}.$$

Ir plokštuma, kurios lygtis:

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Reikia rasti tiesės ir plokštumos bendruosius taškus.
Tam reikia spręsti kartu tiesės ir plokštumos lygtis, kurių nežinomieji yra x,y,z.

Tegul $$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{l}=t.$$

Tada tiesės lygtį galima užrašyti parametriniu pavidalu:

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+lt. \end{cases} \tag{1}$$

Gautas x,y,z reikšmes įstatome į plokštumos lygtį:

$$\begin{aligned} &A\left(x_0+mt\right)+B\left(y_0+nt\right)+C\left(z_0+lt\right)+D=0, \\ &Ax_0+By_0+Cz_0+D+t\left(Am+Bn+Cl\right)=0. \end{aligned} \tag{2}$$

Galimi trys atvejai:

1) $Am+Bn+Cl\neq 0$,

tada $t=\dfrac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Am+Bn+Cl}$;

įstatę t reikšmę į (1) lygtis, gausime **tiesės ir plokštumos susikirtimo tašką**;

2) $Am+Bn+Cl=0$, o $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$;

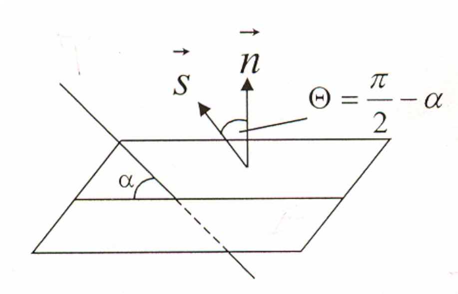
tada (2) lygtis neturi sprendinių, nes **tiesė lygiagreti plokštumai** $\left(\vec{s}\perp\vec{n}\right)$;

3) $$\begin{cases} Am+Bn+Cl=0, \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0, \end{cases} \tag{3}$$

tada **tiesė yra plokštumoje**, nes ši tiesė lygiagreti plokštumai $\left(\vec{s}\perp\vec{n}\right)$ ir eina per tašką $M_0(x_0,y_0,z_0)$, kuris yra plokštumoje. Vadinasi, sąlygos (3) yra būtinos ir pakankamos, kad tiesė būtų nagrinėjamoje plokštumoje.

3.8. Kampas tarp tiesės ir plokštumos

Kampas tarp tiesės ir plokštumos lygus kampui tarp tiesės ir jos projekcijos plokštumoje.



Tegu tiesės T lygtis :

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{l},$$

o plokštuma ***p*** užduota lygtimi:

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

Tada vektoriaus $\vec{s}$, lygiagretaus tiesei T , koordinatės $\vec{s} = (m, n, l)$. Pasinaudojant skaliarinės sandaugos savybemis, kampą Θ tarp vektorių $\vec{n}$ ir $\vec{s}$ galima paskaičiuoti taip:

$$\cos\Theta = \frac{Am + Bn + Cl}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + l^2}}.$$

Kampas α tarp mūsų nagrinėjamos tiesės ir plokštumos bus papildantis Θ iki $\frac{\pi}{2}$, o tada

$$\cos\Theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha.$$

Galutinai,

$$\boxed{\sin\alpha = \pm\frac{Am + Bn + Cl}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + l^2}}}.$$

Čia abu ženklus imame dėl to, kad tiesei galima suteikti bet kurią iš dviejų krypčių.

Jei tiesė yra lygiagreti plokštumai, tai $\sin\alpha = 0$, ir tiesės bei plokštumos lygiagretumo sąlyga yra:

$$Am + Bn + Cl = 0.$$

Jei tiesė statmena plokštumai, tai vektoriai $\vec{n}$ ir $\vec{s}$ lygiagretūs ir jų koordinatės yra proporcingos:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{l}.$$

§4. Antros eilės kreivės

Antros eilės kreivės – tai kreivės, kurių lygtys yra antrojo laipsnio. Bendroji antrojo laipsnio lygtis yra

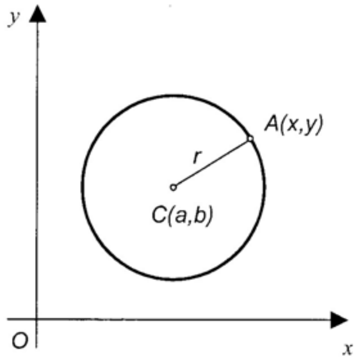
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{1}$$

kur bent vienas iš kooficientų A,B,C nelygus 0 (jei $A = B = C = 0$, lygtis pirmojo laipsnio).
Imant skirtingas (1) lygties koeficientų reikšmes, gaunamos įvairių antros eilės kreivių lygtys.
Antros eilės kreivės vadinamos *kūgio pjūviais*, nes jos gaunamos, plokštuma kertant (pjaunant) sukimosi kūgį. Bet kuri antrojo laipsnio lygtis Dekarto koordinačių sistemoje gali reikšti tik vieną iš šių kreivių – apskritimą, elipsę, hiperbolę, parabolę.

4.1. Apskritimas

Apskritimas – *tai geometrinė vieta taškų, lygiai nutolusių nuo vieno ir to paties taško, vadinamo apskritimo centru.*

Turime apskritimą, kurio centras yra taškas $C(a,b)$, o spindulys lygus r (1 pav.).



1 pav.

Normalinė apskritimo lygtis:
$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

Jei $A(a,b)$ - bet kuris apskritimo taškas, tai $|CA| = r$ arba $|CA|^2 = r^2$. (2)

Atstumas tarp dviejų taškų $A(x,y)$ ir $C(a,b)$:

$$|CA| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\ . \tag{3}$$

Iš (2) ir (3) formulių gauname:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\ . \tag{4}$$

Kiekvienas apskritimo taškas $A(x,y)$ tenkina (4) lygtį. Lengva įsitikinti, kad taškai, esantys šalia apskritimo, (4) lygties netenkina.Taigi (4) lygtis yra apskritimo, turinčio centrą $C(a,b)$ ir spindulį r, lygtis. Ji vadinama *normaline apskritimo lygtimi*.
Kai apskritimo centras yra koordinačių pradžios taškas, gauname tokią apskritimo lygtį:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

(4) lygtyje atskliaudę skliaustus ir pergrupavę narius, gauname

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0 .$$

Ši lygtis yra atskiras (1) lygties atvejis, kai $A = C = 1$, $B = 0$, $D = -2a$, $E = -2b$, $F = a^2 + b^2 - r^2$. Vadinasi, apskritimas tikrai yra antros eilės kreivė.

Dabar įsitikinsime, kad bendroji antrojo laipsnio lygtis

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

apibrėžia apskritimą, jei koeficientai prie koordinačių kvadratų yra lygūs ir jei nėra nario su koordinačių sandauga, t.y. jei A = C ir B = 0, tai

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{5}$$

yra apskritimo lygtis.

Tuo tikslu visus (5) lygties narius padaliname iš A $(A \neq 0)$:

$$x^2 + y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0 .$$

Po to prie abiejų pusių pridedame po $\frac{D^2}{4A^2}$ ir $\frac{E^2}{4A^2}$, o $\frac{F}{A}$ perkeliame į dešinę pusę:

$$\left(x^2 + \frac{D}{A} + \frac{D^2}{4A^2}\right)^2 + \left(y^2 + \frac{E}{A} + \frac{E^2}{4A^2}\right) = \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4A^2} - \frac{F}{A} .$$

Dabar kairėje lygties pusėje turime pilnus kvadratus:

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right) + \left(y + \frac{E}{2A}\right) = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2} . \tag{6}$$

Galimi 3 atvejai:

1) atvejis. Jei $D^2 + E^2 - 4AF > 0$, tai ši lygtis sutampa su (4) lygtimi, imant $a = -\frac{D}{2A}$, $b = -\frac{E}{2A}$, $r^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}$. Vadinasi, kai $D^2 + E^2 - 4AF > 0$, (5) lygtis apibrėžia apskritimą, kurio centras yra taškas $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A}\right)$, o spindulys lygus $\sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4AF}{2A}}$.

2)atvejis. Kai $D^2 + E^2 - 4AF = 0$, (6) lygtį galime rašyti šitaip:

$$\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2A}\right)^2=0 .$$

Ją tenkina tik vienas taškas $\left(-\frac{D}{2A},-\frac{E}{2A}\right)$. Šiuo atveju (5) lygtis reiškia apskritimą, kurio spindulys lygus nuliui.

3) atvejis. Pagaliau, kai $D^2+E^2-4AF<0$, (6) lygtis visiškai neturi sprendinių, nes, imdami bet kokias x ir y reikšmes, kairėje pusėje gauname teigiamą skaičių (arba 0), kuris negali būti lygus neigiamam skaičiui, esančiam dešinėje pusėje. Šiuo atveju sakome, kad (5) lygtis reiškia menamą apskritimą.

Norint rasti apskritimo centrą ir spindulį, kai duota jo lygtis, reikia duotąją lygtį pakeisti normaline.

4.2.Elipsė

Elipsė – *tai geometrinė vieta taškų, kurių kiekvieno atstumų nuo dviejų pastovių taškų, vadinamų elepsės židiniais, suma yra pastovus dydis*.

Židiniai yra žymimi raidėmis F_1, F_2. Atstumai iki bet kurio elipses taško žymimi r_1 (nuo F_1) ir r_2 (nuo F_2) ir vadinami *spinduliais vektoriais*. Pastovi suma žymima 2a:

$$r_1+r_2=2a \quad . \tag{7}$$

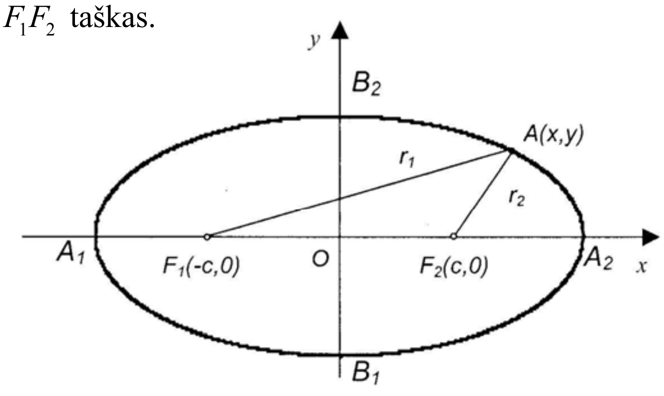
Atstumas tarp židinių F_1, F_2 žymimas $2c$.

Jei $c=0$, tai $r_1=r_2$ ir *elipsė tampa apskritimu*. Visada $c<a$.
Jeigu $c=a$, taškas A gali būti tik atkarpos F_1F_2 taškas.

Kanoninė elipsės lygtis:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

kur $a^2-c^2=b^2$.



2 pav.

Elipsės lygties forma priklauso nuo to, kaip parenkama koordinačių sistema. Lygtis yra papraščiausia, jeigu x eina per taškus F_1, F_2, o koordinačių centras O yra atkarpos F_1F_2 vidurio taškas: $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$. Jei taško A koordinatės yra x,y, tai

$$r_1 = F_1A = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\ , \tag{8}$$

$$r_2 = F_2A = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\ . \tag{9}$$

Įstatę (8) ir (9) į (7), gauname:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \tag{10}$$

Panaikinsime radikalus. Tuo tikslu (10) padauginsime iš jungtinės išraiškos:

$$\left(x^2 + 2xc + c^2 + y^2 - x^2 + 2xc - c^2 - y^2\right)\cdot\frac{1}{2a} = \frac{4xc}{2a} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \tag{11}$$

Sudėjus (10) ir (11) lygtis, lieka tik viena šaknis:

$$a + \frac{c}{a}x = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\ . \tag{12}$$

Pakėlę abi lygybės (12) puses kvadratu, gauname:

$$a^2 + 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2 = x^2 + 2xc + c^2 + y^2$$

arba

$$a^2 - c^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2}x^2 + y^2\ .$$

Pažymėję $a^2 - c^2 = b^2$ ($a^2 - c^2 > 0$, nes $a > c$), gauname $\frac{b^2}{a^2}x^2 + y^2 = b^2$, o padalyję iš b^2, turime

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ . \tag{13}$$

Ši lygtis vadinama kanonine elepsės lygtimi.

Lygybę (12) galime užrašyti ir taip:

$$r_1 = a + \frac{c}{a}x = a + \varepsilon x\ , \qquad r_2 = a - \frac{c}{a}x = a - \varepsilon x$$

Čia $\varepsilon = \frac{c}{a}$ - elipsės ekscentricitetas. Kadangi $c < a$, tai elipsės atveju $\varepsilon < 1$. Lengva įsitikinti, kad elipsė su dideliu ekscentricitetu yra labiau ištęsta, negu su mažu ekscentricitetu.

Elipsės forma.

(13) lygties kairėje pusėje yra dviejų dydžių kvadratų suma. Jei taškas $M(x,y)$ tenkina šią lygtį, tai ir taškai $M_1(-x,y)$, $M_2(-x,-y)$, $M_3(x,-y)$, taip pat tenkina lygtį. Taigi koordinačių pradžios taškas O yra elipsės *simetrijos centras*, o koordinačių ašys - *simitrijos ašys*. Tiesės $A_1A_2 = 2a$ ir $B_1B_2 = 2b$ vadinamos *pagrindinėmis ašimis*, be to, $A_1O = OA_2 = a$ ir $B_1O = OB_2 = b$; čia a - *didžioji pusašė*, b - *mažoji pusašė*. Pagrindinių ašių sankirtos su elipse taškus vadinsime elepsės *viršūnėmis*. Atkarpa $F_1F_2 = 2c$ vadinama elipsės židinių nuotoliu. Jei $c = 0$, židiniai sutampa $(r_1 = r_2)$ ir elipsė virsta apskritimu. Iš (13) lygties matyti, kad:

1. $\frac{x^2}{a^2} \le 1$, arba $x^2 \le a^2$, taigi $|x| \le a$ ir $-a \le x \le a$;
2. $\frac{x^2}{b^2} \le 1$, arba $x^2 \le b^2$, taigi $|x| \le b$ ir $-b \le x \le b$.

Elipsės brežimas.

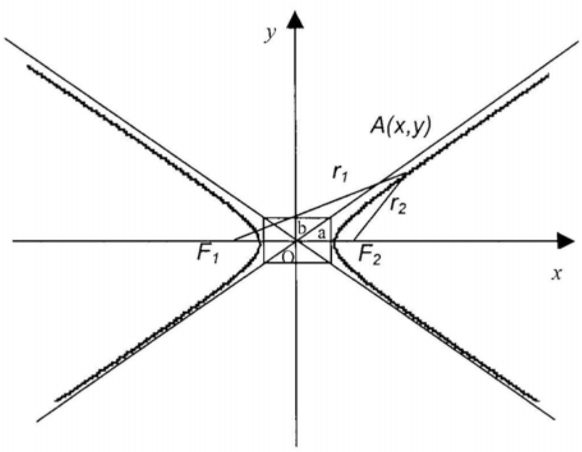
Norint tiksliai nubrėžti elipsę, reikia paimti $2a$ ilgio siūlą, jo galus pritvirtinti taškuose F_1 ir F_2, įtempti pieštuko smaigaliu ir leisti pieštukui judėti taip, kad siūlas visą laiką būtų įtemptas.

4.1. Hiperbolė

Hiperbolė – *tai geometrinė vieta taškų, kurių kiekvieno atstumų nuo dviejų pastovių taškų, vadinamų hiperbolės židiniais, skirtumas yra pastovus (absoliučiuoju didumu).*

Pastovūs taškai – židiniai yra žymimi raidėmis F_1, F_2. Atstumas tarp židinių žymimas $2c$, t.y. atkarpa $F_1F_2 = 2c$. Pastovų skirtumą žymime $2a$, be to, $c > a$.

Bet kurio kreivės taško $A(x,y)$ atstumus nuo židinių F_1 ir F_2 pažymėję $|F_1A| = r_1$, $|F_2A| = r_2$, pagal apibrėžimą gauname $r_1 - r_2 = \pm 2a$.



3 pav.

Kaip ir elipsės atveju, koordinačių pradžios tašku parenkame atkarpos F_1F_2 vidurio tašką, o x ašimi – tiesę, einančią per taškus F_1 ir F_2 ir nukreiptą iš F_1 į F_2, y ašimi – tiesę, einančia per O ir statmeną x ašiai.

Hiperbolės kanoninė lygtis: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

Tokioje koordinačių sistemoje (14) lygybė yra $\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a$

Panaikinę radikalus, gausime

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1.$$

Kadangi $c>a$, tai galime pažymėti $c^2-a^2=b^2$, ir užrašyti *hiperbolės kanoninę lygtį*:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (15)$$

Hiperbolės forma.

Kaip ir elipsės atveju, koordinačių pradžios taškas O yra *hiperbolės simetrijos centras*, o koordinačių ašys – *hiperbolės simetrijos ašys.* Abscisių ašis x kerta hiperbolę dviejuose taškuose, kurie vadinami hiperbolės *viršūnėmis*. Ordinačių ašies hiperbolė nekerta, todėl ši ašis vadinama menamąja ašimi. Santykis $\frac{c}{a}$ vadinamas ekscentricitetu.

Kadangi $c>a$, tai hiperbolės atvėju $\varepsilon>1$. Koordinačių ašys yra hiperbolės simetrijos ašys, tad užtenka rasti jos pavidalą viename koordinačių ketvirtyje, pvz., pirmajame. (15) lygtį užrašysime taip:

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}. \qquad (16)$$

Kai $x=a$, tai $y=0$. Tai yra minimali y reikšmė. Didėjant x, neribotai didėja y ir tada (16) lygybę galima suprastinti:

$$y\cong\frac{b}{a}x. \qquad (17)$$

Tai tiesės, vadinamos hiperbolės asimptote, lygtis. Didėjant x, hiperbolės (16) ir jos asimptotės (17) taškų skirtumas artėja prie nulio:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{a^2}{\infty+\infty}=0\,.$$

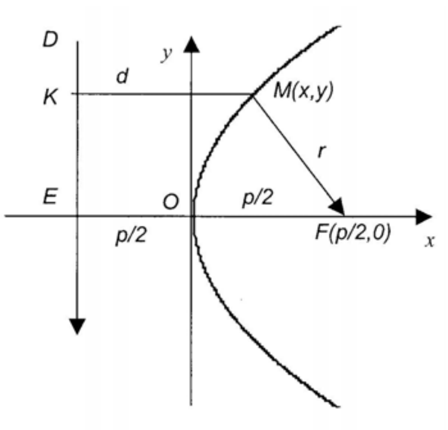
Hiperbolės brėžimas.

Hiperbolę (15) braižome taip: pažymime viršūnių taškus $(0,a)$ ir $(0,-a)$, nubrėžiame asimptotes, t.y. tieses, einančias per koordinačių pradžios tašką $(0,0)$ ir taškus (a,b), $(a,-b)$, brėžiame kreives, einančias per atitinkamas viršūnes ir, didėjant x koordinatei, artėjančias prie asimptočių.

4.4.Parabolė

Parabolė - tai geometrinė vieta taškų, kurių atstumai nuo pastovaus taško, vadinamo parabolės *židiniu*, ir pastovios tiesės yra lygūs.

Pastovus taškas – židinys yra žymimas F. Pastovi tiesė vadinama parabolės direktrise. Parabolės taško atstumas žymimas r ir vadinamas *spinduliu- vektoriumi,* o atstumas nuo direktrisės – d. Santykis $\frac{r}{d}=\varepsilon$ vadinamas ekscentricitetu.



4 pav.

Parabolės kanoninė lygtis:

$$y^2=2px\,.$$

Parabolės židinio atstumą nuo direktrisės žymime p, vadiname parabolės *parametru* ir laikome teigiamu. Parinksime koordinačių sistemą. Tegul koordinačių pradžios taškas yra iš židinio F į direktrisę nuleisto statmens vidurio taškas O, x ašis – tiesė, einanti per taškus O ir F ir nukreipta iš O į F, y ašis statmena x ašiai. Židinio koordinatės $F(\frac{p}{2},0)$, direktrisės lygtis $x=\frac{-p}{2}$. Tada bet kurio parabolės taško spindulio vektoriaus ilgį galima užrašyti

$$r=\sqrt{\left(\frac{p}{2}-x\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}\,.$$

nes pagal parabolės apibrėžimą $r=d$, o $d=x+\frac{p}{2}$. Panaikinę radikalus, gausime kanoninę parabolės lygtį:

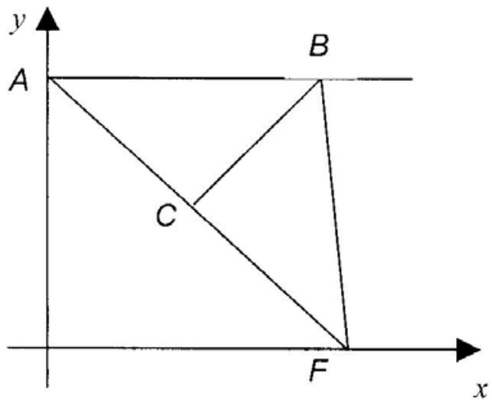
$$y^2=2px\,. \qquad (18)$$

Parabolės forma.

Abscisių ašis x yra parabolės simetrijos ašis, nes kreivės lygtį tenkina simetriškų jos atžvilgiu taškų $A(x_1, y_1)$ ir $A_1(x_1, -y_1)$ koordinatės. Ji vadinama *pagrindine parabolės ašimi*. Parabolės viršūnė, t.y. taškas, kuriame ji kerta pagrindinę ašį, yra koordinačių pradžios taškas $O(0,0)$. Simetrijos centro parabolė neturi. Kai x didėja, neribotai didėja ir koordinatė y, todėl parabolės šakos tolsta į begalybę.

Parabolės brėžimas.

Bet kuris parabolės taškas gali būti randamas, kai žinomas parabolės židinys ir direktrisė. Sujungę tiese bet kurį direktrisės tašką A su židiniu F, iš jo brėžiame statmenį direktrisei. Brėžiame kitą statmenį tiesės atkarpai AF iš jos vidurio taško C iki susikirtimo taške B su pirmuoju statmeniu (5pav.). Kadangi $\Delta ABC = \Delta CFB$ (statūs trikampiai turi po du lygius statmenis), tai $AB = d$, $FB = r$ ir $r = d$. Vadinasi, taškas B yra parabolės taškas.



5 pav.

§ 5. Antros eilės paviršiai

Plokštuma apibrėžiama pirmojo laipsnio lygtimi. Todėl plokštuma kartais vadinama *pirmos eilės paviršiumi*.

Antros eilės paviršiai – tai paviršiai, kurie apibrėžiami *anrojo laipsnio* lygtimi

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0, \qquad (19)$$

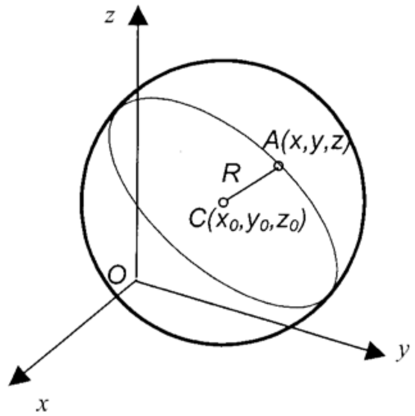
kur bent vienas iš kooficientų A,B,C nelygus 0.

Antros eilės paviršiai: sfera, elepsoidas, heperboloidas, paraboloidas.

5.1.Sfera

Sfera (rutulio paviršius) – tai paviršius, kurio kiekvienas taškas vienodu atstumu nutolęs nuo vieno ir to paties taško, vadinamo *sferos centru*.

Turime sferą, kurios centras yra taškas $C(x_0, y_0, z_0)$, o spindulys lygus R (6 pav.):



Sferos lygtis:
$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

Jei $A(x,y,z)$ - bet kuris sferos taškas, tai

$$|CA|=R \text{ arba } |CA|^2=R^2 \tag{20}$$

Atstumas tarp dviejų taškų $A(x,y,z)$ ir $C(x_0,y_0,z_0)$:

$$|CA|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} \tag{21}$$

Iš (20) ir (21) formulių gauname:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2 \tag{22}$$

Kiekvienas sferos taškas $A(x,y,z)$ tenkina (22) lygtį, taigi (22) lygtis yra sferos, turinčios centrą $C(x_0,y_0,z_0)$ ir spindulį R, lygtis.

Lengva įsitikinti, kad (22) lygtis yra (19) lygties atskiras atvejis. (22) lygtyje atskliaudę skliaustus ir pergrupavę narius, gauname

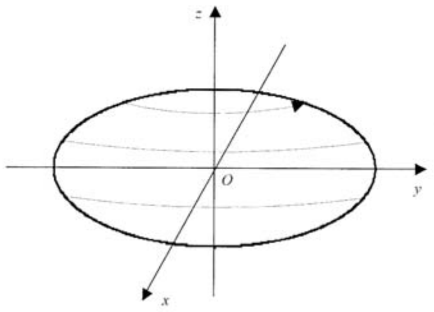
$$x^2+y^2+z^2-2x_0x-2y_0y-2z_0z+x_0^2+y_0^2+z_0^2-R^2=0$$

Ši lygtis gaunama iš (19) lygties, kai $A=B=C=1$, $D=E=F=0$, $G=-2x_0$, $H=-2y_0$, $K=-2z_0$, $L=x_0^2+y_0^2+z_0^2-R^2$. Vadinasi, *sfera tikrai yra antros eilės paviršius*.

Galima įrodyti ir atvirkštinį teiginį: jei (19) lygtyje $A=B=C\neq 0$, $D=E=F=0$, tai ši lygtis yra kokios nors sferos lygtis.

5.2. Elipsoidas

Elipsoidas – tai paviršius, gautas sukant elipsę apie vieną iš pagrindinių jos ašių. Kanoninė elipsės lygtis plokštumoje yra



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{23}$$

kur $a^2 - c^2 = b^2$.

Esant tokiam lygties pavidalui, elipsės (23) ašis b sutampa su koordinačių y ašimi, o c – su z ašimi. Sukimosi paviršiaus, gauto sukant šią elipsę apie Oz ašį (7 pav.), lygtį galima užrašyti taip:

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ arba } \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{24}$$

Sukant apie Oy ašį, lygtis tampa tokia:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2 + z^2}{c^2} = 1 \text{ arba } \frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{25}$$

Kiekvieno (24) lygties taško koordinates (x,y,z) pakeitus (X,Y,Z), kai $x = \frac{b}{a} X, y = Y, z = Z$, (24) lygtį galima užrašyti

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1 . \tag{26}$$

Geometriškai tokia deformacija reikštų besisukančio taško papildomą judėjimą lygiagrečiai su Ox ašimi. Jeigu $a > b$, vyksta *tempimo deformacija,* jeigu $b > a$ - *gniuždimo(suspaudimo) deformacija.*

Paviršius, aprašytas (26) lygtimi, vadinamas **triašiu elipsoidu**.

5.3. Hiperboloidas

Hiperbolės, nubrėžtos yOz plokštumoje, lygtis:

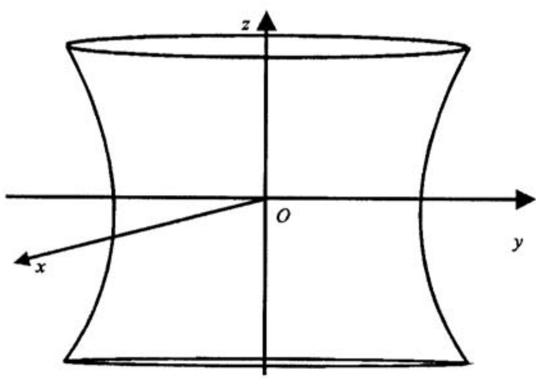
$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{c^2} = 1. \qquad (27)$$

Sukant šia kreivę apie Oz ašį, gaunamas paviršius, vadinamas **vienašakiu sukimosi hiperboloidu.** Jo formulė:

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ arba } \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (28)$$

Atlikus deformaciją, analogišką elipsoido atvejui, t.y. pakeitus $x = \frac{b}{a}X, \quad y = Y, \quad z = Z$, iš (28) lygties gauname (28) **vienašakio hiperboloido** (8 pav.) **lygtį**:

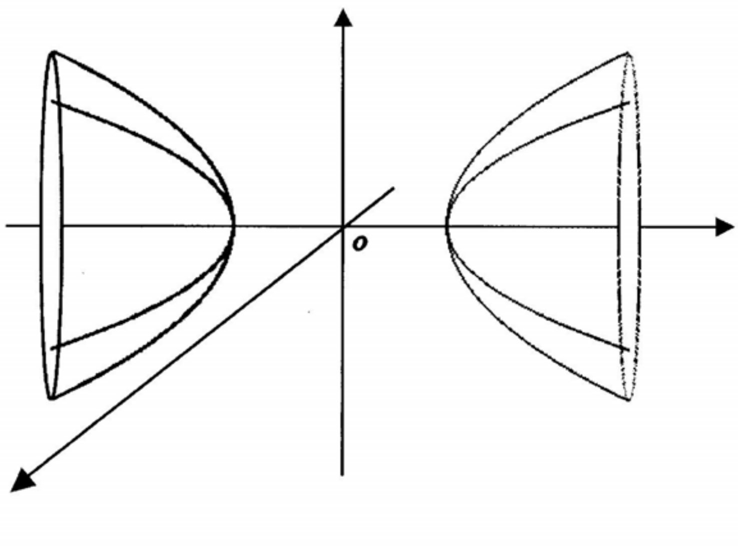
$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1. \qquad (29)$$



8 pav.

Kertant šį paviršių plokštumomis, lygiagrečiomis xOy plokštumai, gaunama *elipsė* (vienašakio sukimosi hiperboloido atveju - *apskritimas*).

Sukant hiperbolę apie realiąją ašį Ox, gaunamas sukimosi paviršius, vadinamas **dvišakiu hiperboloidu.** (9 pav.).



9 pav.

Jo lygtis gaunama iš (27), pakeitus

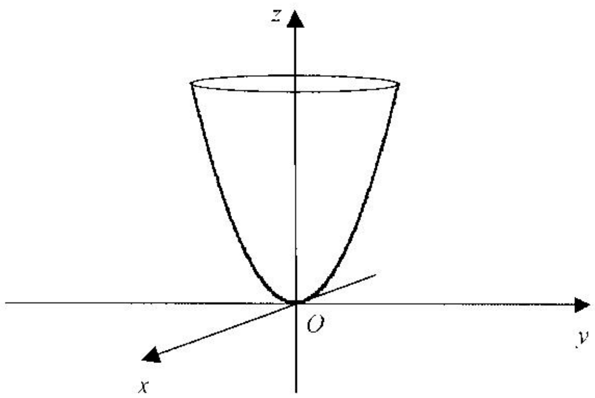
$$\frac{z^2}{c^2} \to \frac{y^2+z^2}{c^2}.$$

Tada **dvišakio hiperboloido lygtis**:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (30)$$

5.4. Parabolaidas

Sukimosi parabolaidas – tai paviršius, gaunamas sukant parabolę $y^2 = 2pz$, $x = 0$ apie Oz ašį (10 pav.).

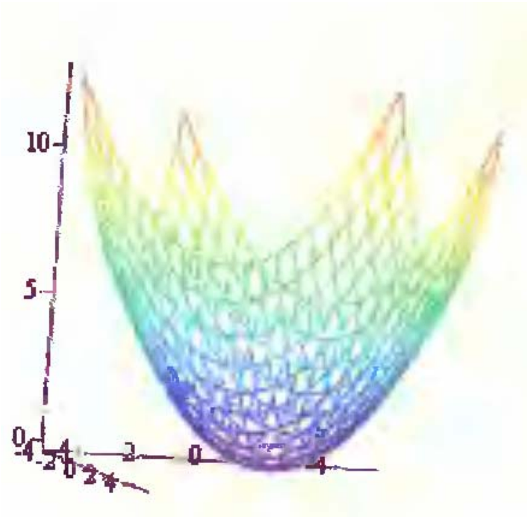


Sukimosi paraboloido lygtis: $x^2 + y^2 = 2pz$ (31)

Deformavę sukimosi paraboloidą, t.y. jo taškus (x,y,z) pakeitę (X,Y,Z), čia $x = X$, $y = \sqrt{\frac{p}{q}}Y$, $z = Z$ (p ir q yra vienodo ženklo dydžiai), gausime paviršių

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \qquad (32)$$

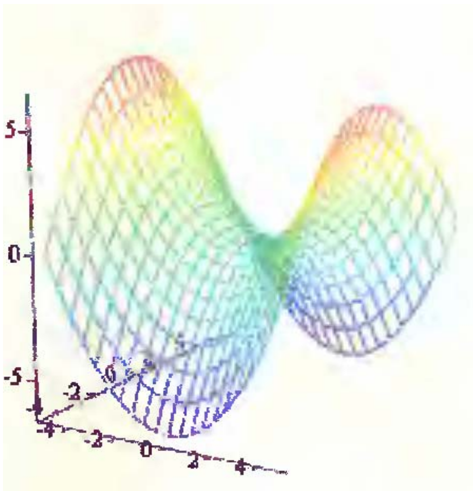
vadinamą **elipsiniu paraboloidu**:



Kertant šį paviršių plokštumomis $Y = h$ ar $X = h$, gaunamos *parabolės*.
Kertant elipsinį paraboloidą plokštuma $Z = h$, pjūvio plokštumoje gaunama *elipsė*.
Kertant sukimosi paraboloidą plokštuma, lygiagrečia su xOy plokštuma $(z = h)$, gaunamas *apskritimas*.

Elipsinio paraboloido (32) lygtyje pakeitus ženklą, gaunama lygtis paviršiaus, vadinamo **hiperboliniu paraboloidu**:

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \text{, čia } p \text{ ir } q \text{ vienodo ženklo } (p > 0, q > 0).$$



Kertant hiperbolinį paraboloidą plokštuma, lygiagrečia xOy plokštumai $(z = h)$, gauname *hiperbolę*.

Egzamino klausimai

1. Tiesinių lygčių sistemos. Gauso metodas.
2. Teorema (alternatyva apie tiesinių LS sprendinius).
3. Tiesinių lygčių sistemos ir matricos. Veiksmai su matricomis.
4. Matricų komutatyvumas.
5. Kramerio formulės antros eilės LS.
6. Detreminantai ir jų savybės.
7. Trečios eilės determinantai.
8. Matricos minorai ir adjunktai.
9. Determinanto skleidinys eilute (stulpeliu).
10. Kramerio formulės trečios eilės LS.
11. Aukštesnės eilės determinantai.
12. Atvirkštinė matrica.
13. Tiesinių LS sprendimas atvirkštinės matricos metodu.
14. Teorema (apie atvirkštinę matricą).
15. Teorema (apie kvadratinių matricų sąryšį su tiesinėmis LS).
16. Atvirkštinės matricos skaičiavimas Gauso metodu.
17. Matricos rangas.
18. Matricos eilučių (stulpelių) tiesinė nepriklausomybė.
19. Bazinio minoro teorema.
20. Bazinės lygtys, baziniai nežinomieji.
21. Kronekerio – Kapeli teorema.
22. Tiesinės erdvės.
23. Tiesinės erdvės bazė.
24. Standartinė vektorinės erdvės bazė.
25. Teorema (vektorinės bazės kriterijus).
26. Bet kokio vektoriaus reiškimas bazinių vektorių tiesiniu dariniu.
27. Vektorinės bazės transformacija.
28. Atkarpos dalijimas duotuoju santykiu.
29. Dviejų vektorių skaliarinė sandauga ir savybės.
30. Dviejų vektorių vektorinė sandauga ir savybės.
31. Skaliarinės sandaugos taikymai geometrijoje ir mechanikoje.
32. Vektorinės sandaugos taikymai geometrijoje ir mechanikoje.
33. Mišrioji trijų vektorių sandauga ir savybės.
34. Mišriosios sandaugos geometrinė interpretacija.
35. Kanoninė tiesės lygtis plokštumoje.
36. Bendroji tiesės lygtis plokštumoje.
37. Taško atstumas iki tiesės plokštumoje.
38. Kampas tarp tiesų (plokštumoje ir erdvėje).
39. Bendroji plokštumos lygtis.
40. Normalinė plokštumos lygtis.
41. Plokštumos, einančios per tris duotus taškus, lygtis.
42. Ašinė plokštumos lygtis.
43. Kampas tarp plokštumų.
44. Taško atstumas iki plokštumos.
45. Tiesės erdvėje vektorinė – parametrinė lygtis.
46. Kanoninė ir normalinė tiesės lygtys erdvėje.
47. Taško atstumas iki tiesės erdvėje.

48. Bendroji tiesės lygtis erdvėje.
49. Tiesės, einančios per du duotus taškus, lygtis (plokštumoje ir erdvėje).
50. Atstumas tarp dviejų prasilenkiančių tiesių.
51. Tiesės ir plokštumos bendrieji taškai.
52. Kampas tarp tiesės ir plokštumos.
53. Apskritimas.
54. Elipsė.
55. Hiperbolė.
56. Parabolė.
57. Sfera.
58. Elipsoidas.
59. Hiperboloidas.
60. Paraboloidas.